Игры и стратегии

1. Аня и Таня играют в такую игру. Аня пишет на листке натуральное число, а затем Таня на этом же листке пишет своё натуральное число. Если сумма этих чисел окажется чётной, то выигрывает Аня, а если сумма этих чисел будет нечётной, то выигрывает Таня. Кто из них выигрывает при правильной игре, как бы ни действовала соперница?

Таня

2. Миша и Гриша тоже играют в игру. Оба загадывают какое-то натуральное число. Затем называют загаданные числа и перемножают их. Если получится нечётное число, то выигрывает Миша, а если получится чётное число, то выигрывает Гриша. Кто из них выигрывает независимо от действий соперника?

Гриша

3. (*Московская устная олимпиада, 2003, 6.4*) Вася и Митя играют в «морской бой» на поле размером 8×8 по следующим правилам. Митя расставляет 16 одноклеточных кораблей так, чтобы они не соприкасались (даже углами). Каждым ходом Вася называет одну из клеток поля и, если на этой клетке стоит корабль, то корабль считается уничтоженным. Докажите, что независимо от расстановки кораблей Вася за 4 хода сможет уничтожить хотя бы один корабль.

4. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.7*) Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись

`ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА.`

Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву А. Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

5. (*Московская устная олимпиада, 2017, 6.7*) Два пирата, Билл и Джон, имея каждый по 74 золотые монеты, решили сыграть в такую игру: они по очереди будут выкладывать на стол монеты, за один ход — одну, две или три, а выиграет тот, кто положит на стол сотую по счёту монету. Начинает Билл. Кто может выиграть в такой игре, независимо от того, как будет действовать соперник?

6. (*Московская устная олимпиада, 2019, 6.9*) В начале игры имеется набор из 2019 прямоугольных параллелепипедов размером $1 \times 1 \times 2$. За один ход игрок может выбрать два имеющихся параллелепипеда и склеить их по грани в один параллелепипед. Кто не сможет сделать ход — проиграл. Играют двое. Кто из них сможет выиграть, независимо от того, как будет играть соперник?

7. (*Московская устная олимпиада, 2005, 7.2*) Аня и Катя играют в игру «Быки и коровы». Аня загадала четырёхзначное число с неповторяющимися цифрами, а Катя пытается это число угадать. Для этого она предлагает свои четырёхзначные числа (тоже с неповторяющимися цифрами), а Аня про каждое из них сообщает, сколько в нём «быков» (т. е. цифр, которые не только присутствуют и в Катином числе, и в Анином, но даже стоят на одних и тех же местах) и «коров» (цифр, которые присутствуют в обоих числах, но стоят на разных местах). Катя предложила числа 5860, 1674, 9432 и 3017 и на каждое число получила ответ «2 коровы». Какое число загадала Аня?

8. (*Турнир Архимеда, 2014.3*) Маша и Катя играют в такую игру: по очереди обрывают лепестки у ромашки с 64 лепестками. За один ход разрешается сорвать любое нечётное количество лепестков, меньшее 16, причем запрещается повторять уже сделанные ходы. (*Например, если Катя при своём ходе сорвёт 3 лепестка, то в дальнейшем ни Маша, ни Катя сорвать 3 лепестка не имеют права.*) Выигрывает тот, кто сорвёт последний лепесток. Начинает Маша. Кто из них выиграет, как бы ни играл соперник?

Катя выигрывает

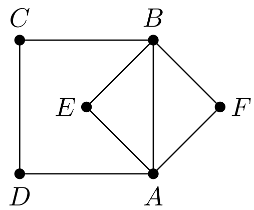
9. (*Математический праздник, 2019, 7.4*) Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник?

10. (*«Ломоносов», 2017, 5–6.6, 7–8.7, 9.5*) Петя и Вася играют в игру. На доске написано число:

$$112233344455555666677777.$$

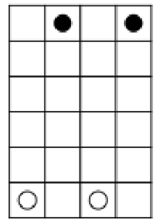
За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

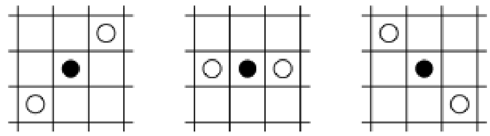
11. (*«Высшая проба», 2014, 7.5*) Двое играют в такую игру. На рисунке в точке A стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединённую с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.



Второй выигрывает

12. (*Математический праздник, 1994, 7.5*) На доске 4×6 клеток стоят две чёрные фишки (Вани) и две белые фишки (Серёжи, см. рисунок справа). Ваня и Серёжа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперёд (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят чёрная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали (как на нижних рисунках), она считается «убитой» и снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Серёжа ему помешать?





13. (*Турнир Архимеда, 2013.6*) Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4. Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор, пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2. Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Коля выигрывает

14. (*Математический праздник, 2014, 7.6*) На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно

— либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

— либо разделить одно из чисел пополам, если оно чётное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Петя выигрывает

15. (*Турнир Архимеда, 2015.6*) Иван-Царевич и Кощей нашли кошелёк с 12 монетами номиналом 1, 2, 3, 4, ..., 12 тугриков. Они решили разделить найденные деньги по следующим правилам:

1) Кощей достает из кошелька две монеты (какие пожелает) и показывает их Ивану-Царевичу;

2) Иван решает, сколько и каких монет отдать Кощею (одну, две или ни одной). Все монеты, не доставшиеся Кощею, возвращают в кошелёк.

Если сумма в кошельке не кратна 3, то делёж заканчивается и Иван забирает все монеты, которые остались в кошельке. Если сумма кратна 3, то процесс повторяется.

а) Может ли Иван действовать так, чтобы наверняка получить больше денег, чем Кощей?

б) На какую наибольшую сумму он может рассчитывать независимо от игры Кощея?

а) Да; б) 49 тугриков

16. (*Московская устная олимпиада, 2014, 7.6*) Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

17. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.6*) Людоедом называется фантастическая шахматная фигура, которая может ходить как шахматный король — на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали, но не может ходить по диагонали. Два людоеда стоят на противоположных угловых полях шахматной доски и начинают ходить по очереди. Людоеду, вставшему на клетку, где уже стоит другой людоед, разрешается им пообедать. Кто кого съест при правильной игре и как ему надо для этого играть?

18. (*Московская устная олимпиада, 2003, 7.6*) Двое играют в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Побеждает тот, кто первым сумеет поставить пять одинаковых значков подряд (по горизонтали или вертикали). Докажите, что второй может играть так, чтобы не проиграть.

19. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.6*) На доске записано: $*\,*\,*\times *\,*\,*\times *\,*\,*\times *\,*\,*$. Играют двое: учитель и ученик. Учитель называет ненулевую цифру, а ученик ставит ее вместо одной из звёздочек, причем учитель видит, куда именно. Ученик хочет, чтобы после двенадцати пар ходов произведение четырёх получившихся трёхзначных чисел делилось на 9. Сможет ли он этого добиться независимо от того, какие цифры назовет учитель?

20. (*Московская устная олимпиада, 2016, 7.7*) Буратино выложил на стол 2016 спичек и предложил Арлекину и Пьеро сыграть в игру, беря по очереди спички со стола: Арлекин может своим ходом брать либо 5 спичек, либо 26, а Пьеро — либо 9, либо 23. Не дождавшись начала игры, Буратино ушёл, а когда он вернулся, партия уже закончилась. На столе осталось две спички, а проиграл тот, кто не смог сделать очередной ход. Хорошенько подумав, Буратино понял, кто ходил первым, и кто выиграл. Выясните это и вы!

21. (*Московская устная олимпиада, 2010, 7.7*) Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы, произвольно чередуя М и П, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдаёт посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

22. (*Московская устная олимпиада, 2018, 6.9*) В ряд записаны всевозможные правильные несократимые дроби, знаменатели которых не больше ста. Маша и Света ставят знаки «+» или «–» перед любой дробью, перед которой знак ещё не стоит. Они делают это по очереди, но известно, что Маше придётся сделать последний ход и вычислить результат действий. Если он получится целым, то Света даст ей шоколадку. Сможет ли Маша получить шоколадку независимо от действий Светы?

23. (*Турнир Архимеда, 2019.6*) На лавке стоят два пустых мешка: чёрный и белый и лежит много мелких алмазов. Кощей Бессмертный и Баба-Яга играют в игру: по очереди кладут алмазы в мешки. Кощей каждым своим ходом имеет право положить либо два алмаза в белый мешок, либо один — в чёрный, а Баба-Яга — либо два алмаза в чёрный мешок, либо один — в белый. Начинает Кощей. Побеждает тот, после хода которого в каком-нибудь мешке окажется больше 2019 алмазов. Кто может гарантированно победить и как для этого нужно играть?

24. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.7*) На столе лежат карточки с числами от 1 до 8: одна карточка с числом 1, две с числом 2, три с числом 3, и т. д. Петя и Вася поочерёдно берут по одной карточке и складывают в одну колоду (начинает Петя). После очередного хода Васи Петя может сказать «стоп», и тогда все невыбранные карточки убираются со стола, а далее Вася и Петя поочерёдно выбирают любые карточки из получившейся колоды (начинает Вася) и выкладывают их на стол слева направо. Если после того, как на стол будет выложена последняя карточка, получившееся число будет являться разностью квадратов каких-то целых чисел, побеждает Вася, иначе побеждает Петя. Может ли кто-то из игроков действовать так, чтобы обеспечить себе выигрыш независимо от действий другого?

25. (*«Высшая проба», 2020, 7.6*) Имеется клетчатая доска $(2n+1) \times (2n+1)$. В центральной клетке сидит таракан. Семиклассник Семён хочет убить таракана и кидает в него камешками (не обязательно на ту самую клетку, где находится таракан). Пока камешек летит, таракан перебегает в любую соседнюю по стороне клетку. Камешек, попавший на клетку с тараканом, убивает его. Если камешек попал на пустую клетку (без таракана), то на эту клетку таракан заползать больше никогда не будет. (В частности, если во все соседние с тараканом клетки уже попадали камешки, то таракан больше никуда не перебегает.) Как только таракан попадает на край доски, Семён утрачивает к нему интерес и перестаёт кидаться камешками. Найдите наименьший размер доски, при котором Семён гарантированно добьётся своего.