

Функции в уравнениях и неравенствах. 2

Данный листок посвящён уравнениям и неравенствам с участием показательных и логарифмических функций, в которых ключевую роль играют свойства непрерывности, монотонности или выпуклости этих функций.

1. (МГУ, филологич. ф-т, 2004) Решите уравнение

$$(x - 3)(x^2 + 2) = 12 - 3^{x-1} - \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{3})^{x+1}.$$

8

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 = \left(\frac{3}{4} - \log_3 \sqrt{2}\right) \cdot \log_2 49.$$

2

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2018) Решите уравнение

$$\lg(-x^3 - x) = \log_2 |x|.$$

7 = x

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

$\frac{2}{1} = n \cdot 1 = x$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2018) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 3^{2\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{y} - \sqrt{x}, \\ x^2 + y^2 \leq 9 + 2xy. \end{cases}$$

23

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2019) Решите неравенство

$$\sqrt{4x + 1 - 12\sqrt{x - 2}} + \sqrt{4x + 8 - 16\sqrt{x - 2}} \leq \log_{1/4} \left(x - \frac{17}{4}\right).$$

$\left[\frac{2}{6}; \frac{17}{17}\right)$

7. («Ломоносов», 2016) Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5) - \log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right) \left(\cos\left(x + \frac{7}{4}\right) - \cos(2x-1)\right) (|x-4| - |2x-5|) \geq 0.$$

$$\{\varepsilon\} \cap \left[\frac{\pi}{11}; \frac{\pi}{6}\right)$$

8. («Курчатов», 2017, 11) Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{1+x+x^2} = \sqrt{3}?$$

9

9. («Ломоносов», 2016) Найдите произведение всех значений x , при каждом из которых

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}, \quad 2^{x^2-9x+11}, \quad \left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$$

— арифметическая прогрессия.

66

10. («Ломоносов», 2006) Решите неравенство

$$(1 - \operatorname{ctg} x)^{2006} + 4(1 + \operatorname{ctg} x)^{2004} \leq 2^{2006}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left[u\pi + \frac{\pi}{2\varepsilon}; u\pi + \frac{\pi}{\varepsilon} \right]$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите неравенство

$$x + \sqrt{x^2 + 4} \geq (2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}) \cdot 8^{x+1}.$$

$$\left[\frac{\pi}{\varepsilon}; +\infty\right)$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{5-\sqrt{15}}(12 + 2x - x^2).$$

$$\sqrt{1} \wedge - 2 -$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

$$\sqrt{3} \wedge \sqrt{11} \wedge \mp 1$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите уравнение

$$x - \sqrt{x} \cdot 2^{-x^6} = 2^{1-2x^6}.$$

1

15. («Ломоносов», 2012) Найдите область значений функции

$$f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3(27 - 3x) \cdot \log_3 \frac{9}{27 - 3x}}.$$

[6:0]

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{16}} x \geq -2^{-x}.$$

[7:0]

17. («Физтех», 2008) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y^2 - y^4 = e^x, \\ \arccos x + 2 \operatorname{arctg} y = 0. \end{cases}$$

[1:0]

18. («Физтех», 2008) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^4 - 4x^2 + y = \ln y, \\ \arcsin x + \operatorname{arctg} y = 0. \end{cases}$$

$\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11 \log_2([\log_3 x]) + 18 \log_2(\log_3[x]) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t , то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

[3:4]

20. (МГУ, биологич. ф-т, 2006) Решите уравнение

$$9^{\arcsin(2x+1)} + \log_3(2 \arcsin(2x+1)) - 3^{\arccos(6x+3)} + \log_{\frac{1}{3}} \arccos(6x+3) = 0.$$

$\frac{8}{2-2i}$

21. (МГУ, мехмат, 2003-05.1) Решить неравенство

$$\frac{1}{|7 - \log_3 3x|} + \frac{1}{|4 - \log_9 9x^2|} \leq \frac{1}{|\log_9 81x|}.$$

$\forall x \neq 0; x > 0$

22. (МГУ, мехмат, 2005.3) Решить неравенство

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos \frac{2x-7}{4} - \cos \frac{x-5}{4}} \geq 0.$$

$$\boxed{\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{2} \vee x \geq 1}$$