Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Что такое функция?

Понятие функции пронизывает все разделы математики. Это одно из самых фундаментальных математических понятий. Что же это такое — функция?

Прежде чем давать строгое определение, опишем на примерах смысл этого понятия.

Функция выражает идею зависимости величин: с изменением некоторой величины x может изменяться другая величина y.

Например, любая физическая формула выражает зависимость одной величины от другой. Так, связь давления и температуры для постоянного объёма газа даётся формулой $p = \alpha T$, то есть давление p является линейной функцией температуры T.

И когда мы пишем $y = f(x)$, мы как раз и имеем в виду эту идею зависимости: переменная y зависит от переменной x по определённому закону (предписанию, правилу). Закон этот обозначен буквой f.

Встречаются зависимости не только от одной, но и от нескольких величин. Например, уравнение состояния идеального газа можно записать в виде $p = nkT$. Давление p зависит от двух величин: концентрации газа n и его температуры T. Такие зависимости, называемые функциями нескольких переменных, вы будете изучать уже в высшей школе.

Вернёмся к записи $y = f(x)$. Обратите внимание: для каждого допустимого значения x мы однозначно получаем значение y, пользуясь правилом f. Иными словами, понятие функции выражает также идею *действия*, совершаемого над одной величиной для получения значения другой величины.

Узнаёте в этом описании свой калькулятор? На одной кнопке написано $\sqrt{\ }$, на другой — log, на третьей — sin... Нажимаете кнопку — и калькулятор совершает предписанное действие с тем числом, которое вы ввели.

В технической литературе часто встречается интерпретация функции как устройства, на вход которого подаётся x, а на выходе возникает y:

$$\xrightarrow{\;x\;} \boxed{\;f\;} \xrightarrow{\;y\;}$$

Даже в повседневной жизни мы иногда используем слово «функция» в смысле «действие» — например, можем говорить о функциях мобильного телефона. Можем даже говорить о функциях депутата или менеджера — то есть о действиях, которые эти люди совершают.

Ну что ж, надеемся, что идея, заложенная в понятии функции, вам теперь ясна. Как же эта идея формализуется в математике? Вот строгое определение.

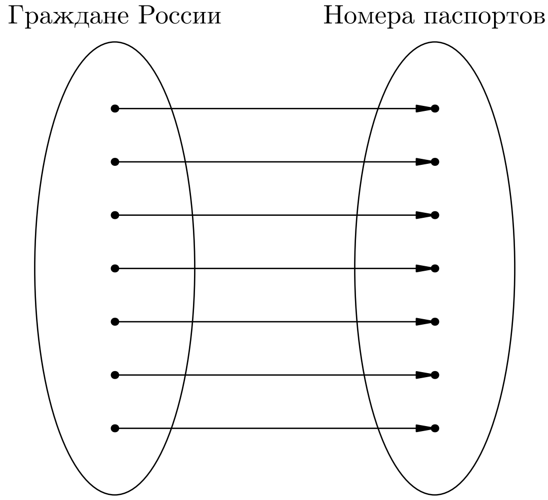
Функция — это соответствие между двумя множествами, такое, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

(В определении, как вы заметили, используются понятия множества и соответствия. В школьной математике они служат неопределяемыми, первичными понятиями. Смысл их интуитивно очевиден. Почитайте на эту тему статью «О первичных понятиях».)

Поясним данное определение на примерах.

Возьмём два множества — множество граждан России и множество номеров их российских паспортов. Ясно, что у каждого гражданина имеется свой номер паспорта.

Получаем соответствие, при котором каждому гражданину России сопоставляется определённый набор цифр — номер его паспорта. Это соответствие проиллюстрировано на рисунке.

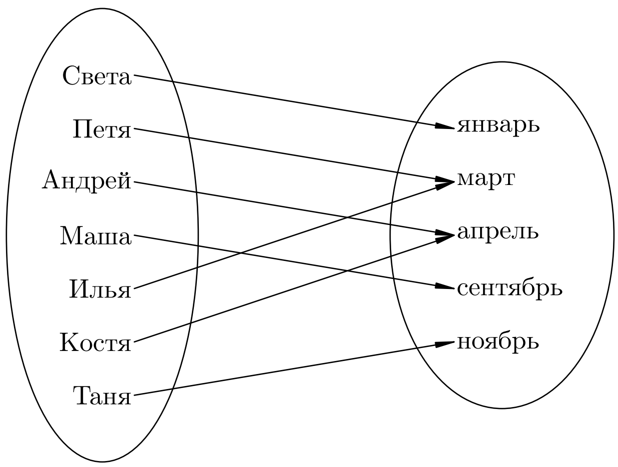


Более того, номер паспорта уникален: по номеру паспорта можно однозначно найти конкретного человека. Такое соответствие в математике называется *взаимно-однозначным.*

Линейная функция $y = kx + b$ при $k \neq 0$ является примером взаимно-однозначного соответствия. Возьмём, к примеру, функцию $y = 3x + 1$. Каждому значению x здесь соответствует своё значение y. И наоборот — каждому y соответствует одно-единственное значение x.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-2	1	4	7	10	13	16

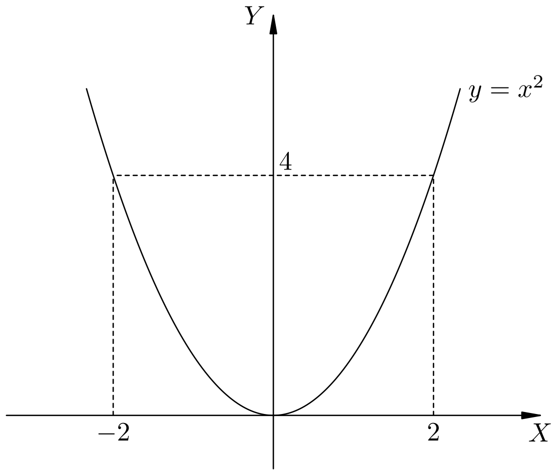
Вот другой вид соответствия между множествами: компания друзей и месяцы, в которые они родились.



Каждый человек родился в какой-то определённый месяц, то есть каждому элементу из первого множества соответствует один и только один элемент из второго множества. Но при этом есть месяцы, соответствующие нескольким людям (например, в марте родились Петя и Илья). Стало быть, данное соответствие не является взаимно-однозначным.

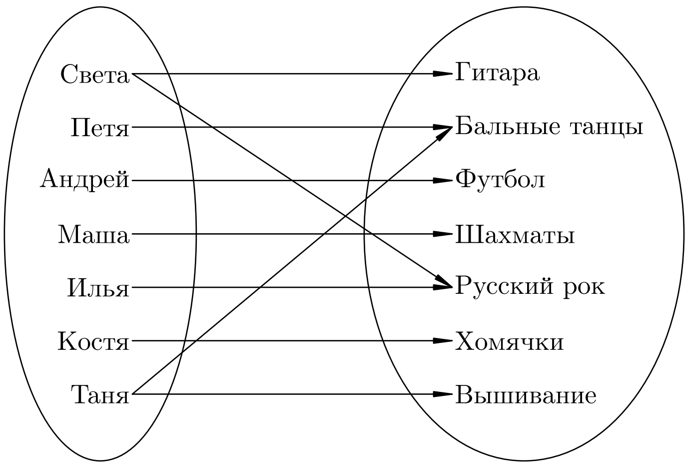
В математике тоже есть функции, которые в нескольких точках принимают одинаковые значения — например, $y = x^2$ или $y = \sin x$.

Следующий рисунок показывает отсутствие взаимной однозначности у квадратичной функции. Мы видим, что элементу 4 множества Y (оси ординат) соответствуют два элемента 2 и -2 множества X (оси абсцисс).



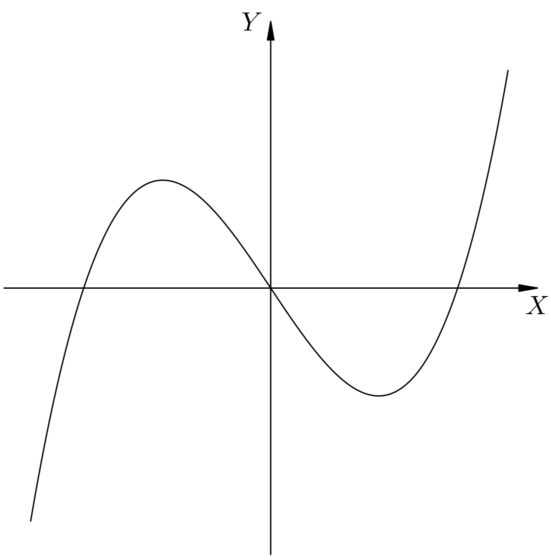
Но, какова бы ни была функция, каждому допустимому значению x всегда должно соответствовать в точности одно значение y.

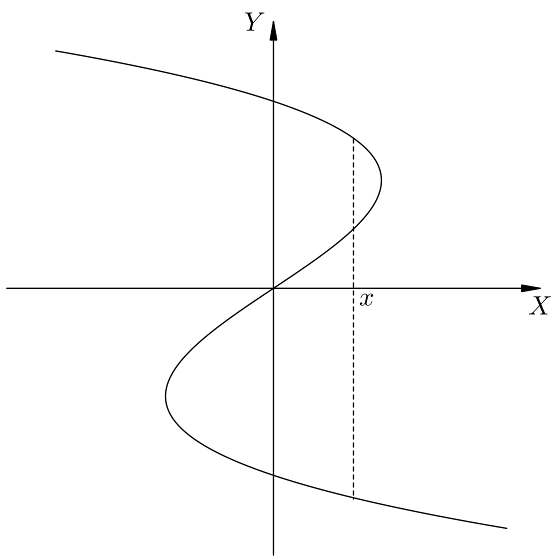
Приведём пример соответствия между множествами, которое *не является функцией*. Пусть это снова будет наша компания друзей, но на сей раз посмотрим их увлечения.



Как видим, в первом множестве есть элементы, которым соответствует более одного элемента второго множества. Например, Света увлекается гитарой и русским роком — вопреки определению функции.

Теперь рассмотрим две кривые:





Первая кривая, несомненно, является графиком функции — каждому значению x отвечает единственное значение y.

А вторая кривая — это график соответствия, которое не является функцией. Мы видим, что найдётся значение x, которому отвечает более одного (в данном случае три) значения y.

В школе мы имеем дело с функциями, которые являются соответствиями между множествами чисел. Такие функции называются *числовыми*. Итак, ещё раз.

Числовая функция $y = f(x)$ — это такое соответствие между двумя числовыми множествами A и B, при котором каждому числу $x \in A$ сопоставляется одно-единственное число $y \in B$. Переменная x называется при этом аргументом функции f.

Множество A называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$ или $D(y)$. Область определения — это множество тех значений аргумента x, при которых функция определена (попросту говоря, это множество тех x, которые можно подставить в формулу и вычислить соответствующее значение y).

Множество B называется *областью значений* (или *множеством значений*) функции f. Оно обозначается $E(f)$ или $E(y)$. Область значений — это множество, которое пробегает переменная y, когда аргумент x пробегает область определения функции.

Например, областью определения функции $y = \sin x$ служит множество всех действительных чисел, а областью значений — отрезок $[-1; 1]$. Областью определения функции $y = \sqrt{x-1}$ является промежуток $[1; +\infty)$, а областью значений — промежуток $[0; +\infty)$.

Есть несколько способов задания числовой функции.

1. С помощью формулы. Это наиболее привычный для нас способ. Примеры: $y = \cos x$, $y = x^2 - 2x$.

2. Наглядный способ — с помощью графика. Например, зависимость курса доллара от времени удобнее всего смотреть на графике. Вряд ли возможно задать эту зависимость какой-либо формулой :-)

3. С помощью таблицы. Этот способ будет единственно возможным, например, в ситуации, когда снимается экспериментальная зависимость, формула ещё не выведена и график ещё не построен.

4. С помощью описания того, как устроено соответствие. Например, функция $y = |x|$ по сути задаётся описанием:
$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$