# Формулы приведения

Прежде чем обсуждать формулы приведения, давайте договоримся о терминологии. Пусть $f(x)$ есть одна из функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$. Символом $cof(x)$ обозначим кофункцию для функции $f(x)$. Кофункциями друг для друга являются синус и косинус, а также, соответственно, тангенс и котангенс. Более точно:

- если $f(x) = \sin x$, то $cof(x) = \cos x$;
- если $f(x) = \cos x$, то $cof(x) = \sin x$;
- если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то $cof(x) = \operatorname{ctg} x$;
- если $f(x) = \operatorname{ctg} x$, то $cof(x) = \operatorname{tg} x$.

Пусть $n$ — ненулевое целое число. **Формулы приведения** — это тригонометрические тождества следующего вида:

$$f\left(\frac{n\pi}{2} \pm \alpha\right) = \begin{cases} (\pm)f(x), & \text{если } n \text{ чётное;} \\ (\pm)cof(x), & \text{если } n \text{ нечётное;} \end{cases}$$

Символ $(\pm)$ перед функцией или кофункцией означает, что в том или ином случае там может стоять как плюс, так и минус.

Точку тригонометрической окружности, отвечающую углу $n\pi/2$, мы будем называть *опорной точкой*.

Для каждой опорной точки (то есть при каждом $n$) получаются восемь формул приведения (четыре функции и два возможных знака перед $\alpha$). Рассмотрим их в четырёх наиболее важных случаях — при $n = 1, 2, 3, 4$.

1. *Формулы приведения с опорной точкой* $\pi/2$ (случай $n = 1$):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \tag{1}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha; \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha; \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha; \tag{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha; \tag{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha; \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{8}$$

Тождества для синуса и косинуса являются простым следствием формул сложения. Так, формулы дополнительного угла (1) и (2) уже были получены нами в предыдущей статье. Докажем формулу (5):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha = \cos\alpha.$$

Аналогично доказывается и формула (6).

Тождества для тангенса и котангенса являются следствиями соответствующих тождеств для синуса и косинуса. Например, формула (3) получается в результате деления равенства (1) на равенство (2).

2. *Формулы приведения с опорной точкой* $\pi$ (случай $n = 2$):

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \tag{9}$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha; \tag{10}$$
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{11}$$
$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{12}$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha; \tag{13}$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha; \tag{14}$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; \tag{15}$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha. \tag{16}$$

Формулы (15) и (16) показывают, что период тангенса и котангенса равен $\pi$. Этот факт уже известен нам из геометрической интерпретации тангенса и котангенса.

3. *Формулы приведения с опорной точкой* $3\pi/2$ (случай $n = 3$):

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha; \tag{17}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha; \tag{18}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha; \tag{19}$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha; \tag{20}$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha; \tag{21}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha; \tag{22}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{23}$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{24}$$

4. *Формулы приведения с опорной точкой* $2\pi$ (случай $n = 4$):

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha; \tag{25}$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha; \tag{26}$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{27}$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{28}$$
$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha; \tag{29}$$
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha; \tag{30}$$
$$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; \tag{31}$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha. \tag{32}$$

Формулы (29) и (30) отражают тот факт, что период синуса и косинуса равен $2\pi$. Формулы (31) и (32) вытекают также из периодичности тангенса и котангенса с периодом $\pi$.

Любую формулу приведения можно вывести из формул сложения. Однако существует простое правило, позволяющее быстро получить нужную формулу. Оно состоит из двух шагов.

i. Прежде всего задаём себе вопрос: «Меняется ли функция на кофункцию?» и двигаем туда-сюда головой вдоль той оси, на которой расположена опорная точка.

   В случае опорных точек $\pi/2$ и $3\pi/2$ это вертикальная ось ординат, и в результате получается утвердительный кивок: «Да, меняется». Мы видим это на примере формул (1)–(8) и (17)–(24): везде функция меняется на кофункцию.

   В случае опорных точек $\pi$ и $2\pi$ это горизонтальная ось абсцисс, и движение головой даёт отрицательный ответ: «Нет, не меняется». Мы видим это на примере формул (9)–(16) и (25)–(32): функция в правой части равенства везде та же, что и в левой.

ii. Теперь нужно разобраться со знаком правой части. Когда ставится плюс и когда — минус?

   Всё очень просто. Берём левую часть $f\left(\frac{n\pi}{2} \pm \alpha\right)$ формулы приведения и предполагаем, что угол $\alpha$ острый, то есть точка $\alpha$ расположена в первой четверти. Определяем, в какой четверти расположен аргумент функции $f$ и какой знак будет иметь функция $f$ в данной четверти. Это и будет искомый знак правой части!

   Так, точка $\pi/2 - \alpha$ будет также расположена в первой четверти, где все функции положительны. Соответственно, в правых частях формул (1)–(4) стоит знак плюс.

   Точка $\pi/2 + \alpha$ окажется во второй четверти, где синус положителен, а косинус, тангенс и котангенс отрицательны. Соответственно, в правой части формулы (5) стоит знак плюс, а в формулах (6)–(8) — минус.

   Точка $\pi - \alpha$ расположена во второй четверти. Поэтому в формуле (9) мы видим плюс, а в формулах (10)–(12) — минус.

   Точка $\pi + \alpha$ расположена в третьей четверти, где синус и косинус отрицательны, а тангенс и котангенс положительны. Соответственно, в формулах (13), (14) мы видим плюс, а в формулах (15), (16) — минус.

   Продолжая рассуждать так же, вы легко разберётесь со знаками и в оставшихся формулах приведения.

Таким образом, зубрить формулы приведения нет никакой необходимости. Никто их наизусть и не помнит :-) Если вы усвоили несложное правило «мотания головой» и определения знака правой части, то любую формулу приведения восстановите с лёгкостью. Ну а в самом крайнем случае вам на помощь придут формулы сложения — их, конечно, надо знать назубок.

## Задачи

**1.** Упростите выражение:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)$;  б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$;

в) $\sin(\pi - \alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;  г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$.

а) 0; б) $-1$; в) $-\cos\alpha$; г) $\cos\alpha$

**2.** Упростите выражение:

$$\text{а) } \sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha);$$

$$\text{б) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right).$$

а) 0; б) $2\cos\alpha$

**3.** Упростите выражение:

а) $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$; б) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

г) $\cos(\alpha - \pi)$; д) $\sin(\alpha - \pi)$; е) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$;

ж) $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)$; з) $\sin\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)$; и) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

а) $\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $-\operatorname{ctg}\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) $-\sin\alpha$; е) $\operatorname{tg}\alpha$; ж) $-\sin\alpha$; з) $\cos\alpha$; и) $-\operatorname{ctg}\alpha$

**4.** Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — углы треугольника. Докажите, что

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

**5.** Синусы двух острых углов треугольника равны $3/5$ и $5/13$. Найдите косинус третьего угла треугольника.

$-33/65$

**6.** Косинусы двух углов треугольника равны $1/3$ и $2/3$. Найдите синус третьего угла треугольника.

$\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$

**7.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ + \alpha)}$; б) $\dfrac{\sin(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)}$;

в) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\alpha - \pi)}$; г) $\dfrac{\sin(\alpha + \pi)\sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos(1{,}5\pi + \alpha)}$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$; е) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(-\alpha)}$.

а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $-\cos\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) $\operatorname{tg}^2\alpha$; е) $\sin\alpha$

**8.** Упростите выражение:

а) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(270^\circ - \alpha)$; б) $\sin(\pi - x)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos(\pi - x)$;

в) $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; г) $\sin(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(2\pi + \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

а) 1; б) 1; в) 1; г) 1

**9.** Вычислите:

а) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ$;

б) $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos 179^\circ$.

а) 0; б) 0