Целая и дробная части

Целая часть числа a обозначается $[a]$. Это наибольшее целое число, не превосходящее числа a. Например, $[3] = 3$, $[\sqrt{3}] = 1$, $[-\pi] = -4$. *Дробная часть* числа a обозначается $\{a\}$. Это разность между a и его целой частью: $\{a\} = a - [a]$.

1. Вычислите: а) $[7\pi]$; б) $\left[\sqrt{7} + \sqrt{2}\right]$.

2. Постройте графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$.

3. (*МЦНМО, 7*) Решите уравнение

$$[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1.$$

$\boxed{-1}$

4. (*«Надежда энергетики», 2020, 8.3*) На координатной плоскости выделен квадрат K с вершинами в точках $(0, 0)$ и $(10, 10)$. Изобразите внутри этого квадрата множество M точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] < [y],$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a (то есть наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[10] = 10$, $[9{,}93] = 9$, $[1/9] = 0$, $[-1{,}7] = -2$). Какую часть площади квадрата K составляет площадь множества M?

Площадь множества M составляет 45% площади квадрата K

5. (*«Надежда энергетики», 2022, 8.4*) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = x^{2022} + x - 1.$$

$\boxed{x = \pm 1}$

6. (*«Надежда энергетики», 2022, 9.2*) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = x^{2023}.$$

$\boxed{x = 0, \pm 1}$

7. (*«Надежда энергетики», 2022, 10.3*) Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = x^{2022} - x^{2021}.$$

Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a.

$\boxed{x = 0}$

8. (*«Надежда энергетики», 2022, 11.2*) Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = \frac{\lg(2^x+1) - \lg 6}{\lg 5 - \lg 10}.$$

Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a.

$\boxed{x = 1}$

9. (*«Ломоносов», 2023, 10.1*) Вычислите

$$\left[\sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}\right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

$\boxed{-10}$

10. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.2*) Найдите целую часть числа $a + \frac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}}$.

$\boxed{12}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.4*) Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11\log_2([\log_3 x]) + 18\log_2(\log_3[x]) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

$\boxed{[3; 4)}$

В задачах с целой и дробной частями иногда помогает замена $x = n + \alpha$, где $n = [x]$ и $\alpha = \{x\}$. Казалось бы, вместо одной переменной возникают две, однако имеются ограничения, которые можно использовать: n — целое и $0 \leqslant \alpha < 1$.

12. (*«Курчатов», 2014, 11.1*) Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x^2$.

$\boxed{0}$

13. (*Моск. матем. регата, 2012, 10*) Решите неравенство: $[x] \cdot \{x\} < x - 1$.

$\boxed{x \geqslant 2}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.5*) Решите уравнение

$$x^2 + 8\{x+4\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ — дробная часть числа a.

$\boxed{-3;\ +3;\ \sqrt{33}-4;\ \sqrt{41}-4}$

15. (*«Курчатов», 2018, 11.1*) Найдите все вещественные числа x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5},$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x), а $\{x\} = x - [x]$.

$\boxed{2\tfrac{7}{20};\ 3\tfrac{1}{10};\ 1\tfrac{14}{15}}$

16. (*«Физтех», 2023, 9*) Найдите сумму всех решений уравнения

$$[x]^2 + 40x + 336 = 0.$$

$\boxed{-155{,}9}$

17. (*«Физтех», 2023, 10*) Найдите сумму квадратов всех решений уравнения

$$x^2 - 24[x] + 23 = 0.$$

$\boxed{1516}$

18. (*«Физтех», 2023, 11*) Найдите сумму квадратов всех решений уравнения

$$x^2 - 14[3x] + 152 = 0.$$

$\boxed{4306}$

19. (*Турнир городов, 2018, 10–11*) Существуют ли нецелые числа x и y, для которых выполнено равенство $\{x\}\{y\} = \{x+y\}$?

20. (*Турнир городов, 2021, 10–11*) Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $[x^2] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней?

21. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) а) Привести пример такого положительного a, что

$$\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1.$$

б) Может ли такое a быть рациональным числом?

22. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Существуют ли такие целые числа a и b, что
а) уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет;
б) уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет?

23. (*ММО, 1981, 7.4, 8.4*) Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]\,?$$

24. (*Турнир городов, 1990, 8–9*) Найти число решений в натуральных числах уравнения

$$\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{11}\right] + 1.$$

$\boxed{110}$

25. (*«Ломоносов», 2008.9*) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2004\left[n\sqrt{1002^2+1}\right] = n\left[2004\sqrt{1002^2+1}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

$\boxed{1, 2, \ldots, 2004}$

26. (*ММО, 1957, 9.2*) Решите уравнение: $x^3 - [x] = 3$.

$\boxed{\sqrt[3]{4}}$

27. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 10.5*) Решите уравнение: $\{(x+1)^3\} = x^3$.

$\boxed{0,\ \frac{\sqrt{21}-3}{6},\ \frac{\sqrt{33}-3}{6},\ \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\sqrt{57}-3}{6},\ \frac{\sqrt{69}-3}{6}}$

28. (*ММО, 2020, 11.2*) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\pi x = [\lg \pi^x] - [\lg [\pi^x]],$$

где $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a.

29. (*Всеросс., 2000, ЗЭ, 10.1*) Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

$\boxed{\frac{2^{1001}-2}{3} - 500}$

30. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) В ряд выписаны действительные числа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{1996}. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

31. (*ММО, 2018, 9.3*) Докажите, что для любых натуральных a_1, a_2, $\ldots$, a_k таких, что

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}>1,$$

у уравнения

$$\left[\frac{n}{a_1}\right]+\left[\frac{n}{a_2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{a_k}\right]=n$$

не больше чем $a_1a_2\ldots a_k$ решений в натуральных числах. ($[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

32. (*ММО, 1955, 8.5*) Числа $[a]$, $[2a]$, $\ldots$, $[Na]$ различны между собой, и числа $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, $\ldots$, $\left[\frac{M}{a}\right]$ тоже различны между собой. Найти все такие a.

33. (*ММО, 1969, 10.4*) Существует ли такое число x, что ни для какого натурального числа n число $[x\cdot 1969^n]$ не делится на $[x\cdot 1969^{n-1}]$?

34. (*Турнир городов, 2002, 10–11*) Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что $a>1$, $b>1$ и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных числах m и n?

35. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и нашёл приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он произвольно выбрал из списка два числа, сложил их, отбросил у суммы знаки после запятой (если они были) и записал результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он проделал то же самое, и так далее, пока в списке не осталось одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

36. (*Турнир городов, 1983, 9–10*) Докажите для каждого натурального числа $n>1$ равенство:

$$\left[n^{\frac{1}{2}}\right]+\left[n^{\frac{1}{3}}\right]+\ldots+\left[n^{\frac{1}{n}}\right]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\ldots+[\log_n n]\,.$$

37. (*Всеросс., 1999, ЗЭ, 9.6*) Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\}\leqslant\frac{n^2-1}{2}\,.$$

38. (*Всеросс., 2019, РЭ, 10.10*) Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$ задана условиями $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n\geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)