Формула Эйлера и плоские графы

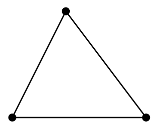
Напомним, что фигура называется *выпуклой*, если вместе с любой парой своих точек она целиком содержит отрезок, их соединяющий. Например, квадрат — выпуклая фигура, а пятиконечная звезда — нет.

Теорема 1. (*Леонард Эйлер, 1752*) Пусть v — число вершин выпуклого многогранника, e — число его рёбер, f — число его граней. Тогда справедлива формула

$$v - e + f = 2.$$

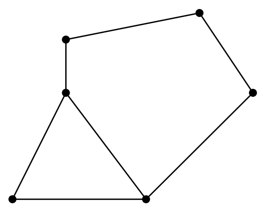
Данное соотношение называется *формулой Эйлера*.

Доказательство. Будем склеивать наш многогранник из отдельных граней, на каждом шаге приклеивая (по смежным рёбрам) очередную грань к уже склеенным. Сначала берем одну из граней в качестве первой:



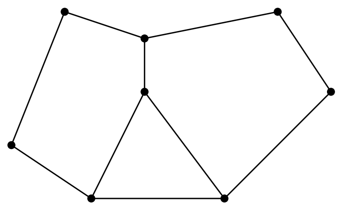
У неё число вершин равно числу рёбер ($v - e = 0$), число граней сейчас равно единице, так что на первом шаге имеем $v - e + f = 1$.

Теперь приклеим вторую грань по смежному ребру:



Заметим, что число добавленных вершин на единицу меньше числа добавленных рёбер, поэтому разность $v - e$ уменьшилась на 1; однако число граней увеличилось на 1, так что после второго шага величина $v - e + f$ снова равна 1.

На третьем шаге приклеиваем третью грань по смежным рёбрам:



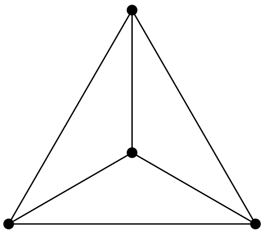
Ситуация повторяется: число добавленных вершин на единицу меньше числа добавленных рёбер (разность $v - e$ уменьшилась на 1), число f увеличилось на 1, и потому $v - e + f$ опять равно 1.

Так будет продолжаться вплоть до последнего шага — приклеивания последней грани многогранника. Последняя грань не добавит ни новых вершин, ни новых рёбер, но увеличит число f на единицу. В итоге получим $v - e + f = 2$, что и требовалось.

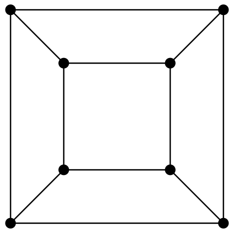
Изображая многогранники на чертежах, мы рисуем *графы*. Граф состоит из точек (*вершин*) и линий (*рёбер*); рёбра соединяют некоторые пары вершин. Три рисунка, приведённые выше, дают примеры графов.

Граф называется *плоским*, если его рёбра не пересекаются (в точках, отличных от вершин). На трёх рисунках выше изображены плоские графы.

Оказывается, что любой выпуклый многогранник можно изобразить в виде плоского графа. Мы не будем гнаться за строгостью формулировок, а просто приведём примеры, из которых станет ясно, что имеется в виду:



Тетраэдр



Куб

(Идея такова: надули многогранник в шарик, вырезали одну грань и раскатали получившийся шарик с дыркой по плоскости.)

Плоский граф разбивает плоскость на части, которые называются *гранями*. При этом гранью является и неограниченная часть плоскости (или, что то же самое, «внешний контур» плоского графа, который служит изображением многогранника). Как видим, для плоских графов применяется та же терминология, что и для многогранников (вершины, рёбра, грани), и точно так же справедлива формула Эйлера.

Теорема 2. Если связный плоский граф с v вершинами и e рёбрами разбивает плоскость на f граней, то $v - e + f = 2$.

Задачи

1. Нарисуйте плоский граф для: а) четырёхугольной пирамиды; б) октаэдра.

2. В стране 30 озёр, соединённых между собой 40 каналами так, что от каждого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

11

3. Внутри квадрата отметили n точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько провели отрезков и сколько получилось треугольников?

$3n + 1$ отрезков, $2n + 2$ треугольников

4. В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей; никакие три из них не пересекаются в одной точке. Получился граф, вершинами которого служат вершины данного многоугольника и внутренние точки пересечения диагоналей, а рёбрами — стороны многоугольника и соответствующие отрезки диагоналей.

а) Назовём вершины полученного графа внутренними, если они отличны от вершин многоугольника; аналогично, назовём рёбра внутренними, если они отличны от сторон многоугольника. Докажите, что число внутренних рёбер равно сумме числа проведённых диагоналей и удвоенного числа внутренних вершин.

б) Найдите число рёбер этого графа, если n-угольник оказался разбит на a треугольников и b четырёхугольников.

б) $\frac{1}{2}(3a + 4b + n)$

5. Семиугольник разбит на выпуклые пятиугольники и шестиугольники, причём так, что каждая его вершина служит вершиной не менее чем двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников не меньше 13.

6. (*«Курчатов», 2015, 8–11*) Во вписанном 100-угольнике провели несколько диагоналей. Они разбили многоугольник на 200 частей: 30 пятиугольников, 70 четырёхугольников и 100 треугольников. Найдите число точек пересечения проведенных диагоналей внутри 100-угольника.

$\boxed{116}$

7. (*«Физтех», 2014, 11*) В выпуклом 17-угольнике проводят все его диагонали. На какое наибольшее число частей они могут его разбить?

$\boxed{C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2} + 1 = 2500\ (n = 17)}$

8. (*«Физтех», 2014, 9–10*) На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — 19 параллельных между собой прямых, в другом — 23 параллельных между собой прямых, в третьем — 36 параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг?

$\boxed{2028}$

9. (*Турнир городов, 2003, 8–9*) Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

10. (*Футбольный мяч*) В многограннике чёрные грани — правильные пятиугольники, а белые — правильные шестиугольники. В каждой вершине сходится по три грани. Сколько в этом многограннике чёрных граней?

$\boxed{12}$

11. (*«Высшая проба», 2019, 9, 11*) Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

$\boxed{2n+6 \text{ при } n \geqslant 2,\ 6 \text{ при } n = 1}$