Формулы сложения

Формулы сложения — это формулы преобразования тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \quad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \quad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \quad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}; \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}. \quad (8)$$

Давайте посмотрим, как выводятся формулы сложения. Начинаем с тождества (2) — формулы косинуса разности двух углов.

Расстояние между точками A и B на плоскости будем обозначать $\rho(A,B)$. Если (x_A, y_A) — координаты точки A и (x_B, y_B) — координаты точки B, то, как известно из геометрии,

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}. \quad (9)$$

На рис. 1 изображены точки α и β, расположенные на тригонометрической окружности и соединённые синим отрезком. Показана также точка $\alpha-\beta$, отвечающая разности углов α и β; она соединена с точкой 0 красным отрезком.

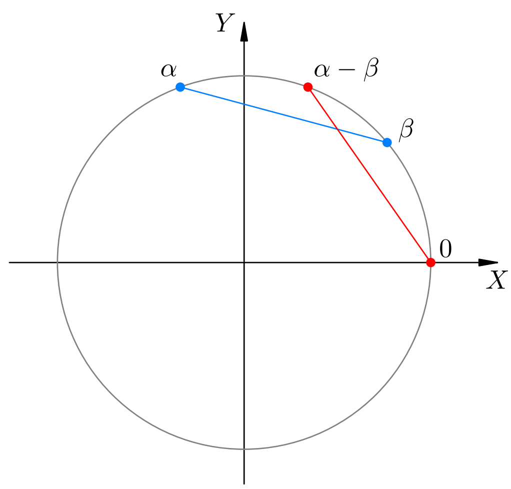

Рис. 1. К выводу формулы для косинуса разности

При повороте на угол $-\beta$ вокруг начала координат синий отрезок совмещается с красным, поэтому длины этих отрезков равны:

$$\rho(\alpha,\beta)=\rho(\alpha-\beta,0). \quad (10)$$

Оба расстояния в этом равенстве мы найдём с помощью формулы (9). Имеем:

$$\begin{aligned}
\rho^2(\alpha,\beta) &= (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \\
&= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta); \\
\rho^2(\alpha-\beta,0) &= (x_{\alpha-\beta} - 1)^2 + (y_{\alpha-\beta} - 0)^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta) = \\
&= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}$$

Сопоставляя полученные результаты, видим, что

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Формула (2) для косинуса разности тем самым доказана. Формула (1) для косинуса суммы получается из неё немедленно:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Мы воспользовались здесь чётностью косинуса и нечётностью синуса:

$$\cos(-\beta) = \cos\beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin\beta.$$

Чтобы получить формулы (3) и (4) синуса суммы и разности, нам понадобится один промежуточный результат. По формуле косинуса разности имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Таким образом, мы получили полезную формулу косинуса дополнительного угла[1]:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha. \tag{11}$$

Заменим в формуле (11) угол α на $\pi/2 - \alpha$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

то есть

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \tag{12}$$

Это формула синуса дополнительного угла.

Теперь, располагая формулами косинуса и синуса дополнительного угла, имеем:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Формула синуса суммы тем самым доказана. Формула синуса разности получается из неё легко:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

(здесь мы снова воспользовались чётностью косинуса и нечётностью синуса).

[1] Углы α и $\pi/2 - \alpha$ называются *дополнительными* по аналогии с прямоугольным треугольником: два таких острых угла являются углами в прямоугольном треугольнике и дополняют друг друга до $90°$.

Итак, мы выяснили, откуда берутся первые четыре формулы сложения (1)–(4). Из них, в свою очередь, вытекают формулы (5)–(8).

Докажем, например, тождество (5). Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Делим числитель и знаменатель полученного равенства на $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,,$$

что и требовалось. Формула (6) получается отсюда заменой β на $-\beta$ с последующим учётом нечётности тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Формулы (7) и (8) выводятся аналогично. Сделайте это самостоятельно, чтобы лишний раз поупражняться в тригонометрических преобразованиях.

Формулы сложения позволяют получать значения тригонометрических функций новых углов исходя из уже известных значений.

Вычислим, например, $\sin 15^\circ$. Имеем:

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,.$$

Формулы сложения составляют фундамент тригонометрии. Из них выводится масса нужных формул. Наиболее важным тригонометрическим формулам будут посвящены также следующие три статьи.

Задачи

1. Вычислите:

а) $\sin 12^\circ\cos 78^\circ+\cos 12^\circ\sin 78^\circ$;

б) $\sin 56^\circ\cos 26^\circ-\cos 56^\circ\sin 26^\circ$;

в) $\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$;

г) $\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$;

д) $\sin 21^\circ\sin 24^\circ-\cos 21^\circ\cos 24^\circ$;

е) $\sin 34^\circ\sin 124^\circ+\cos 34^\circ\cos 124^\circ$;

ж) $\sin\frac{9\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{9\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$;

з) $\sin\frac{11\pi}{36}\cos\frac{7\pi}{36}+\cos\frac{11\pi}{36}\sin\frac{7\pi}{36}$.

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) -1 д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) 0; ж) 0; з) 1

2. Упростите выражение:

а) $\cos 3x\cos 5x-\sin 3x\sin 5x$;

б) $\sin y\cos 2y+\cos y\sin 2y$;

в) $\sin 5\alpha\cos 3\alpha-\sin 3\alpha\cos 5\alpha$;

г) $\cos\beta\cos 6\beta+\sin\beta\sin 6\beta$.

а) $\cos 8x$; б) $\sin 3y$; в) $\sin 2\alpha$; г) $\cos 5\beta$

3. Докажите тождества:

а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

д) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

4. Докажите тождества:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$;

в) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; г) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$.

5. Докажите тождества:

а) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right) = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$; б) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right) = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\alpha + \sin\alpha$; г) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\alpha - \sin\alpha$;

д) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$; е) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$.

6. Используя равенство $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, вычислите: а) $\sin 75^\circ$; б) $\cos 75^\circ$.

а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

7. Используя равенство $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, вычислите: а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 15^\circ$.

а) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

8. Используя равенство $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$, вычислите: а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 105^\circ$.

а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

9. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$; б) $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

в) $\dfrac{2\cos\alpha\sin\beta + \sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta)}$; г) $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta - \cos(\alpha-\beta)}$.

а) 0; б) 0; в) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; г) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$

10. Докажите тождества:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; б) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}$;

в) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta$; г) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

11. Вычислите $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

$\boxed{-\frac{1+2\sqrt{6}}{6}}$

12. Вычислите $\cos(x+y)$, если $\sin x = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ и $\cos y = \dfrac{5}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.

$\boxed{16/65}$

13. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}22^\circ+\operatorname{tg}8^\circ}{1-\operatorname{tg}22^\circ\operatorname{tg}8^\circ}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{18}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}}{1+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{18}\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}}$.

$\boxed{\text{а) } \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{б) } \sqrt{3}}$

14. Докажите тождества:

а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$; б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

15. Найдите область значений функции $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

$\boxed{[-2;2]}$