Уравнения в целых числах

Обычная постановка задачи такова: дано уравнение с двумя (или более) неизвестными, и требуется найти все его целочисленные решения. Решающую роль тут обычно играют соображения делимости.

1. (*«Шаг в будущее», 2018, 8.3*) Найдите двузначное число $\overline{xy}$, квадрат суммы цифр которого на 8 больше суммы произведения цифр числа и квадрата единиц этого числа, увеличенной в 7 раз.

71

2. (*«Надежда энергетики», 2019, 8.5*) Имеет ли уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2}=1$$

решение в натуральных числах, больших единицы?

решений не имеет

3. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.6*) Решите уравнение $abcdef=a+b+c+d+e+f$ в натуральных числах.

$(1,1,1,1,2,6)$ в любом порядке

4. Решите в целых числах уравнение:

а) $x^2-y^2=31$; б) $xy=x+y+3$.

а) $(16,15)$, $(16,-15)$, $(-16,15)$, $(-16,-15)$; б) $(5,2)$, $(2,5)$, $(0,-3)$, $(-3,0)$, $(-1,-1)$, $(3,3)$

5. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p+n$?

Одно

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9*) Решите в натуральных числах уравнение

$$abc+ab+bc+ac+a+b+c=164.$$

В ответе укажите произведение abc.

80

7. (*ОММО, 2015, 9–10*) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3+y^3+x^2y+xy^2=\sqrt{a}(x^2+y^2)+\sqrt{13-a}(x+y)-\sqrt{13a-a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

12

8. (*«Ломоносов», 2011, 10*) Решите в натуральных числах уравнение

$$a^b + b^a = 2011.$$

$(2010, 1), (1, 2010)$

9. Решите в целых числах уравнение:

а) $2x + 3y = 4$; б) $4x + 5y = 1$;
в) $8x - 3y = -2$; г) $5x - 9y = 24$.

а) $x = 2 - 3k$, $y = 2k$; б) $x = -1 - 5k$, $y = 1 + 2k$; в) $x = 2 + 3k$, $y = 6 + 8k$; г) $x = 12 + 9k$, $y = 4 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9*) В прямоугольном треугольнике длины всех сторон являются натуральными числами, при этом один из катетов равен 2012. Найдите все такие треугольники.

$(2012, 253005, 253013)$; $(2012, 506016, 506020)$; $(2012, 1012035, 1012037)$; $(2012, 1509, 2515)$

11. (*«Ломоносов», 2011, 10*) Дано простое число p. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^2 = y^2 + 2010p.$$

$(1006, 1004)$, $(338, 332)$, $(206, 196)$, $(82, 52)$ при $p = 2$; если $p \neq 2$, то решений нет

12. Докажите, что уравнение не имеет решений в целых числах:

а) $x^2 - 3y = 17$; б) $x^2 + 4x - 8y = 11$;
в) $3x^2 - 4y^2 = 13$; г) $2x^2 - 5y^2 = 7$.

Указание: а) mod 3; б) mod 4

13. (*«Курчатов», 2017, 8*) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$(2x + y)(2y + x) = 2017^{2017}\,?$$

14. (*«Курчатов», 2018, 9–10.1*) Приведите пример натурального числа n, которое представляется в виде разности квадратов натуральных чисел ровно 2018 способами.

15. (*МГУ, химический ф-т, 1993*) Найти все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению

$$6m^2 - 2n^2 + mn = 3.$$

$(1, -1)$, $(-1, 1)$

16. (*МГУ, ВШБ, 2004*) Найти все пары целых неотрицательных чисел (k, m), являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

$(9, 9)$

17. (*«Физтех», 2011, 9, 11*) Целые числа m и n таковы, что

$$4m + 5n = mn - 9.$$

Найдите, какое наибольшее значение может принимать m.

$\boxed{34}$

18. (*«Ломоносов», 2012, 9*) Найдите периметр выпуклого многоугольника, множество вершин которого в координатной записи совпадает с множеством целочисленных пар решений уравнения

$$x^2 + xy = x + 2y + 9.$$

$\boxed{16 + 12\sqrt{5}}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Решить в целых числах уравнение

$$x^6 = y^3 + 217.$$

$\boxed{(-1,-6);\ (1,-6);\ (-3,8);\ (3,8)}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$x^2 + xy = y + 92.$$

$\boxed{(2,88);\ (8,4)}$

21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Найдите все пары целых чисел (x, y) для которых выполнено равенство

$$x^2 + y^2 = x + y + 2.$$

$\boxed{(-1,0);\ (-1,1);\ (0,-1);\ (0,2);\ (1,-1);\ (1,2);\ (2,0);\ (2,1)}$

22. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.3*) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 58 = 0.$$

23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 7–8.4*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + 2y = 100.$$

$\boxed{(4;5)}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Решите в натуральных числах уравнение

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}\,.$$

$\boxed{n = 1}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5xy + y - 5x = 1038.$$

$\boxed{(12, 18)}$

26. (*МФТИ, 2004*) Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

$\boxed{(6, -5),\ (4, 5),\ (-4, -3)}$

27. (*МГУ, ИСАА, 1997*) Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$3xy - 14x - 17y + 71 = 0.$$

$\boxed{(4, 3),\ (6, 13),\ (14, 5)}$

28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11*) Решите уравнение в целых числах

$$x + 3xy + y = 2019 - 3y^2.$$

$\boxed{(-221, 224);\ (2019, 0)}$

29. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2003*) Найдите все целые решения (x, y, z) уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

$\boxed{(7k, 3k, 2k),\ k \in \mathbb{Z}}$

30. (*МГУ, химический ф-т, 1997*) Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

$\boxed{(0, 0),\ (2, 2),\ (0, 3),\ (3, 0)}$

31. (*МФТИ, 1998*) Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0.$$

$\boxed{(4, 27),\ (2, -17),\ (22, 423),\ (-16, 307)}$

32. (*МГУ, ВМК, 1996*) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

$\boxed{(2, 3),\ (2, -3),\ (-2, 3),\ (-2, -3)}$

33. (*«Физтех», 2007*) Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 8xy - y^2 + 16 = 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

$(-5, 1)$; $(-3, 1)$

34. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016.$$

$x = 4$, $y = 20$

35. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Решите уравнение в целых числах:

$$\sqrt{9x^2 + 80x - 40} = 3x - 20y.$$

$(-13, -3)$; $(-59, -17)$

36. (*«Ломоносов», 2013, 9*) Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполняется равенство

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = m(m-1).$$

$(1, 1)$; $(2, 1)$; $(3, 1)$

37. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^3 + 2y^2 = 2016.$$

$(12, 12)$; $(6, 30)$

38. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Какие из значений 8, 43, 2010 может принимать N, если известно, что уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

имеет единственное решение в натуральных числах x и y?

43

39. (*«Ломоносов», 2015, 9*) Найдите все решения системы в натуральных числах:

$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2), \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2). \end{cases}$$

$(1, 1, 1, 1)$

40. (*Моск. матем. регата, 2012, 9*) Найдите все натуральные решения уравнения

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}.$$

1

41. (*Турнир им. Ломоносова, 1990*) Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?

$\boxed{1024}$

42. (*«Ломоносов», 2018, 9*) Найдите все натуральные k, при которых число $k^2 - 101k$ является точным квадратом, т. е. квадратом целого числа.

$\boxed{101 \text{ или } 2601}$

Уравнения с факториалами

43. (*Моск. матем. регата, 2001, 8*) Найдите все натуральные m и n, для которых выполняется равенство

$$m! + 12 = n^2.$$

$\boxed{m = 4,\ n = 6}$

44. (*«Бельчонок», 2020, 8.5*) Выражение $n!$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Решите в натуральных числах уравнение

$$n! - 4n^2 + 18 = m^2 + 4nm - 20m.$$

45. (*ОММО, 2017*) Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что

$$x! + y! = 24z + 2017.$$

Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z).

$\boxed{(1, 4, -83);\ (4, 1, -83);\ (1, 5, -79);\ (5, 1, -79)}$

46. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11*) Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что

$$m^3 + n^3 = k! + 32.$$

$\boxed{(3, 5, 5);\ (5, 3, 5)}$

47. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = z, \\ x! + y! = z!. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 1, 2)}$

Уравнения с показательными функциями

48. Решите в целых числах уравнение:

а) $3^x + 1 = 2^y$; б) $2^x + 1 = y^2$;
в) $2^x + 7 = y^2$; г) $x^2 + x - 2 = 6^y$;
д) $3^x - 1 = 2^y$; е) $3^x = 4y + 5$.

а) $(0,1)$, $(1,2)$; б) $(3,\pm 3)$; в) $(1,3)$, $(1,-3)$; г) $\varnothing$; д) $(1,1)$, $(2,3)$; е) $\left(2k, \frac{9^k-5}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

49. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.2*) Докажите, что уравнение $16^x + 21^y + 26^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

50. (*Открытая олимпиада, 2023, 8.5*) Решите уравнение $2^x - 3^y = 295$ в натуральных числах.

$x = 10$, $y = 6$

51. (*«Высшая проба», 2013, 8*) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$2x^2 - y^2 = 2^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$(1,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-3,4)$

52. (*«Высшая проба», 2013, 10*) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 2^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$(2,0)$, $(2,-1)$, $(4,0)$, $(6,-4)$, $(12,-8)$

53. (*«Высшая проба», 2013, 11*) Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$$

и докажите, что других нет.

$(1,0)$, $(3,0)$, $(-2,3)$, $(-6,9)$

Всероссийская олимпиада школьников по математике

54. (*Всеросс., 2004, финал, 9.5*) Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p и q, что

$$m + n = p + q \quad \text{и} \quad \sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 2004\,?$$

55. (*Всеросс., 2006, финал, 9.2*) Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c и d, по модулю больших 1000000, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{abcd}\,.$$

56. (*Всеросс., 1997, финал, 10.1, 11.1*) Решить в целых числах уравнение

$$\left(x^2-y^2\right)^2=1+16y.$$

57. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 9.5, 10.5*) Докажите, что уравнение

$$x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$$

не имеет решений в целых числах.

58. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11.2*) На доске написано выражение

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\,,$$

где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf?

59. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 11.1*) Найдите все простые p, для каждого из которых существуют такие натуральные x и y, что $p^x=y^3+1$.

60. (*Всеросс., 2016, РЭ, 11.8*) Натуральное число N представляется в виде

$$N=a_1-a_2=b_1-b_2=c_1-c_2=d_1-d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

Московская математическая олимпиада

61. (*ММО, 1948, 7–8*) Сумма обратных величин трёх целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

62. (*ММО, 1955, 7*) Решить в целых числах уравнение

$$x^3-2y^3-4z^3=0.$$

63. (*ММО, 1963, 8*) Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

64. (*ММО, 1983, 7*) Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

65. (*ММО, 1994, 9*) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

имеет бесконечное число решений в целых числах x, y, z.

66. (*ММО, 2002, 9*) Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

67. (*ММО, 2007, 10*) Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x^2 + x + 1$ является натуральной степенью y, а $y^2 + y + 1$ — натуральной степенью x?

68. (*ММО, 1998, 11*) Решите в натуральных числах уравнение

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

69. (*ММО, 1941, 9–10*) Решить в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

70. (*ММО, 1958, 9*) Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y-1} + (x+1)^{2y-1} = (x+2)^{2y-1}.$$

71. (*ММО, 1958, 10*) Решить в натуральных числах уравнение

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

72. (*ММО, 1967, 10*) Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.

73. (*ММО, 1999, 11*) Решите в натуральных числах уравнение

$$\left(1 + n^k\right)^l = 1 + n^m,$$

где $l > 1$.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

74. (*Олимпиада им. Эйлера, 2011*) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что

$$a + b = c + d = ab - cd = 4n.$$

Турнир городов

75. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) Решить в целых числах уравнение

$$2^n + 7 = x^2.$$

$\boxed{n = 1,\ x = 3}$

76. (*Турнир городов, 1998, 8–9*) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

77. (*Турнир городов, 1997, 8–9*) Квадрат разрезали на 25 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1). Найдите площадь исходного квадрата.

$\boxed{49}$

78. (*Турнир городов, 1997, 10–11*) Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1). Найдите объём исходного куба.

$\boxed{125}$

79. (*Турнир городов, 1991, 8–9*) Решить в натуральных числах уравнение

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}\,.$$

$\boxed{(1, 2, 3)}$

80. (*Турнир городов, 1990, 8–9*) В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.

$\boxed{\text{5 тонн}}$

81. (*Турнир городов, 2009, 8–9*) Даны три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других. Может ли произведение этих трёх чисел являться точной 2008-й степенью натурального числа?

$\boxed{\text{Да}}$

82. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) Существует ли арифметическая прогрессия из пяти различных натуральных чисел, произведение которых есть точная 2008-я степень натурального числа?

Да

83. (*Турнир городов, 1994, 10–11*) Конечно или бесконечно множество натуральных решений уравнения

$$x^2 + y^3 = z^2\,?$$

Бесконечно

84. (*Турнир городов, 1998, 10–11*) Докажите, что уравнение

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

85. (*Турнир городов, 1991, 10–11*) Укажите все такие натуральные n и целые неравные друг другу x и y, при которых верно равенство

$$x + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2^n} = y + y^2 + y^4 + \ldots + y^{2^n}.$$

$n = 1$; $x = k$, $y = -k - 1$ для всех целых k

86. (*Турнир городов, 2014, 10–11*) Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.

IMO

87. (*IMO, 2006*) Найдите все пары (x, y) целых чисел, такие, что

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

$(0, \pm 2)$; $(4, \pm 23)$

88. (*IMO, 1997*) Найдите все пары (a, b) целых чисел $a, b \geqslant 1$, удовлетворяющих уравнению

$$a^{b^2} = b^a.$$

$(1, 1)$; $(16, 2)$; $(27, 3)$