Чётность

1. Конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

2. Петя умножил сумму двух чисел на их произведение и получил 2013. Докажите, что Петя ошибся.

3. На 99 карточках пишут числа 1, 2, ..., 99. После этого их переворачивают, перемешивают и на чистых сторонах снова пишут числа 1, 2, ..., 99. Затем для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат окажется чётным.

4. На чудо-дереве растут 28 апельсинов и 19 бананов. Каждый день садовник снимает с дерева ровно два фрукта. Если снятые фрукты одинаковы, то на дереве появляется новый банан, а если разные — новый апельсин. В конце концов на дереве оказался только один фрукт. Какой именно?

5. Маша написала на доске 10 чисел. Паша заметил, что сумма любых девяти чисел нечётна. Чётна или нечётна сумма всех написанных чисел?

6. На доске написано в строку 2017 целых чисел.

а) Докажите, что всегда можно стереть одно из них так, что сумма оставшихся чисел будет чётной.

б) Верно ли это для 2018 чисел?

7. (*Математический праздник, 1990, 5.1*) В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

8. (*Турнир Архимеда, 2013, 5.5*) Как-то раз Дядя Фёдор, Матроскин и Шарик отправились с почты домой. Дядя Фёдор вышел первым, а Матроскин последним. По дороге домой Дядя Фёдор обгонял других, либо его обгоняли ровно 8 раз. Матроскин обгонял других, либо его обгоняли ровно 6 раз. Известно, что Дядя Фёдор пришел домой позже, чем Шарик. В каком порядке друзья пришли домой?

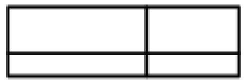
9. (*Математический праздник, 2005, 6.3*) Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

а) 10, 10 и 80; б) нет

10. (*Московская устная олимпиада, 2010, 6.3*) На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?

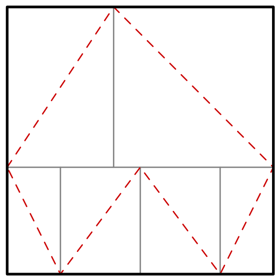


11. (*Математический праздник, 2013, 6.4*) 13 детей сели за круглый стол и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребёнок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом?

7

12. (*Математический праздник, 1991, 6.4, 7.2*) Подпольный миллионер Тарас Артёмов пришёл в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100-рублёвых купюр старого образца. Ему была выдана 1991 купюра более мелкого достоинства[1], причём среди них не было 10-рублёвых. Докажите, что его обсчитали.

13. (*Математический праздник, 2013, 6.5*) Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (см. рисунок). Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если на нём нечётное число графств. Сколько графств у вас получилось?



Можно привести пример для 9 графств

14. (*Математический праздник, 2010, 6.6*) На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т. е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).

15. (*Математический праздник, 2002, 7.3*) В написанном на доске примере на умножение хулиган Петя исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример и объясните, как Вы это сделали.

[1] В то время имели хождение купюры по 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей (нового образца).

16. (*Всеросс., 2019, МЭ, 7.4*) Четыре седьмых класса поехали на экскурсию. Когда 7А и 7Б пошли в музей, а 7В и 7Г — обедать в кафе, Марья Ивановна подсчитала, что в музее на 15 семиклассников больше, чем в кафе. А когда вечером 7А и 7В пошли в парк, а 7Б и 7Г — в театр, Марья Ивановна насчитала в парке на 8 семиклассников меньше, чем в театре. Умеет ли Марья Ивановна считать?

17. (*Математический праздник, 2000, 7.4*) Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

18. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.4*) В школе 450 учеников и 225 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

19. (*Всеросс., 2016, МЭ, 7.5*) На доске записаны 7 различных нечётных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число 3/7. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Кто-то ошибся

20. (*Московская устная олимпиада, 2006, 7.7*) Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рисунок). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, …, на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

5