Задача C3 на ЕГЭ по математике

В данной статье мы разберём несколько задач C3, которые предлагались на ЕГЭ по математике в 2010–2013 годах. При этом мы активно используем метод рационализации, подробно изложенный в предыдущей статье.

Разумеется, рассмотрены не все задачи, предлагавшиеся на ЕГЭ. Задачи отбирались с целью проиллюстрировать основные идеи, встречавшиеся в заданиях C3. Достаточно полную подборку задач C3 из вариантов ЕГЭ и работ МИОО содержит «Задачник C3».

Задача C3. (ЕГЭ, 2013) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \geqslant -10, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x-7} \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Начнём со второго неравенства (вдруг его решения окажутся, например, $x > 10$, — тогда ясно, что система не имеет решений, и можно не решать первое неравенство). Преобразуем второе неравенство:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} + 1 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^4 + x^3 - 6x^2}{x-7} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7} \leqslant 0.$$

Полученное неравенство легко решается методом интервалов:

$$\boxed{x \leqslant -3, \quad x = 0, \quad 2 \leqslant x < 7.} \qquad (1)$$

Теперь займёмся первым неравенством:

$$\log_{5-x} \frac{x+4}{(x-5)^{10}} + 10 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{5-x} \frac{x+4}{(5-x)^{10}} + \log_{5-x}(5-x)^{10} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{5-x}(x+4) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lg(x+4)}{\lg(5-x)} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lg(x+4) - \lg 1}{\lg(5-x) - \lg 1} \geqslant 0.$$

Функция $y = \lg x$ монотонно возрастает; следовательно, последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+4) - 1}{(5-x) - 1} \geqslant 0, \\ x + 4 > 0, \\ 5 - x > 0. \end{cases}$$

Данная система легко решается с помощью метода интервалов:

$$\boxed{-3 \leqslant x < 4.} \qquad (2)$$

Для получения ответа нужно пересечь множества решений каждого из неравенств — то есть, множества в «рамочках» (1) и (2).

Ответ: $\{-3\} \cup \{0\} \cup [2; 4)$.

Задача C3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{160-4^x}{32-2^x} \geqslant 5, \\ \log_{0{,}25x^2}\left(\dfrac{6-x}{4}\right) \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{4^x-160}{2^x-32}-5 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4^x-5\cdot 2^x}{2^x-32} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^{2x}-2^{x+\log_2 5}}{2^x-2^5} \geqslant 0.$$

Функция $y=2^x$ определена и монотонно возрастает на множестве $\mathbb{R}$. Поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2x-(x+\log_2 5)}{x-5} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-\log_2 5}{x-5} \geqslant 0.$$

Легко решаем его методом интервалов и получаем тем самым решения первого неравенства:

$$\boxed{x \leqslant \log_2 5, \quad x > 5.} \tag{3}$$

(очевидно, что $\log_2 5 < 5$).

Во втором неравенстве перейдём к основанию 10:

$$\frac{\lg\frac{6-x}{4}}{\lg\frac{x^2}{4}} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lg\frac{6-x}{4}-\lg\frac{x^2}{4}}{\lg\frac{x^2}{4}} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lg\frac{6-x}{4}-\lg\frac{x^2}{4}}{\lg\frac{x^2}{4}-\lg 1} \leqslant 0.$$

Функция $y=\lg x$ определена и монотонно возрастает на множестве $(0;+\infty)$, поэтому последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{6-x}{4}-\frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{4}-1} \leqslant 0, \\ \dfrac{6-x}{4} > 0, \\ \dfrac{x^2}{4} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} \geqslant 0, \\ x < 6, \\ x \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Первое неравенство системы (4) записывается в виде:

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0$$

и решается методом интервалов:

$$x \leqslant -3, \quad -2 < x < 2, \quad x > 2.$$

Решения системы (4), то есть решения второго неравенства исходной системы, имеют вид:

$$\boxed{x \leqslant -3, \quad -2 < x < 0, \quad 0 < x < 2, \quad 2 < x < 6.} \tag{5}$$

Для получения ответа нужно пересечь множества решений обоих неравенств исходной системы, то есть множества «в рамочках» (3) и (5), и учесть оценку $2 < \log_2 5$.

Ответ: $(-\infty;-3] \cup (-2;0) \cup (0;2) \cup (2;\log_2 5] \cup (5;6)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \cdot 3^{-x} \leqslant 87, \\ \log_{3x} \dfrac{1}{27} \cdot \log_3(27x) + 9 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. В первом неравенстве делаем замену $t = 3^x$:

$$18t + \frac{27}{t} \leqslant 87.$$

Заметим, что $t > 0$ при всех x. Поэтому, умножая данное неравенство на t (а заодно и деля его на 3), получим равносильное неравенство:

$$6t^2 - 29t + 9 \leqslant 0.$$

Решения данного неравенства: $\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{9}{2}$. Обратная замена: $\frac{1}{3} \leqslant 3^x \leqslant \frac{9}{2}$. Решая это двойное неравенство, получаем решения первого неравенства исходной системы:

$$\boxed{-1 \leqslant x \leqslant \log_3 \frac{9}{2}\,.} \qquad (6)$$

Во втором неравенстве нашей системы переходим к основанию 3:

$$\frac{\log_3 \frac{1}{27}}{\log_3(3x)} \cdot \log_3(27x) + 9 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3}{1 + \log_3 x} \cdot (3 + \log_3 x) + 9 \geqslant 0.$$

Сделав замену $t = \log_3 x$ и выполнив простые преобразования, получим неравенство

$$\frac{6t}{1+t} \geqslant 0.$$

Его решения: $t < -1$ или $t \geqslant 0$. Обратная замена: $\log_3 x < -1$ или $\log_3 x \geqslant 0$. Отсюда получаем решения второго неравенства исходной системы:

$$\boxed{0 < x < \frac{1}{3}, \quad x \geqslant 1.} \qquad (7)$$

Решение нашей системы получается пересечением «рамочек» — множеств (6) и (7) решений первого и второго неравенств (при этом ясно, что $\log_3 \frac{9}{2} > 1$).

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[1; \log_3 \frac{9}{2}\right]$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{4x} - 4^{x+3} \leqslant 65, \\ \log_{x+5} \left(\dfrac{3-x}{x}\right)^4 + \log_{x+5} \dfrac{x}{x-3} \leqslant 3. \end{cases}$$

Решение. В первом неравенстве делаем замену $t = 4^x$ и приходим к квадратному неравенству относительно t:

$$t^2 - 64t - 65 \leqslant 0.$$

Его решения: $-1 \leqslant t \leqslant 65$. Обратная замена: $-1 \leqslant 4^x \leqslant 65$. Отсюда получаем решения первого неравенства системы:

$$\boxed{x \leqslant \log_4 65.} \qquad (8)$$

Решения второго неравенства системы удовлетворяют условию

$$\frac{x}{x-3} > 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{x-3}{x} > 0.$$

Поэтому первое слагаемое левой части преобразуется следующим образом:

$$\log_{x+5}\left(\frac{3-x}{x}\right)^4 = 4\log_{x+5}\left|\frac{3-x}{x}\right| = 4\log_{x+5}\frac{x-3}{x}\,.$$

Таким образом, имеем цепочку равносильных преобразований второго неравенства:

$$4\log_{x+5}\frac{x-3}{x} + \log_{x+5}\frac{x}{x-3} \leqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad 4\log_{x+5}\frac{x-3}{x} + \log_{x+5}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{-1} \leqslant 3 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 4\log_{x+5}\frac{x-3}{x} - \log_{x+5}\frac{x-3}{x} \leqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad \log_{x+5}\frac{x-3}{x} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\lg\frac{x-3}{x}}{\lg(x+5)} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\lg\frac{x-3}{x} - \lg(x+5)}{\lg(x+5) - \lg 1} \leqslant 0.$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y = \lg x$ на множестве $(0; +\infty)$ последнее неравенство цепочки равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{x-3}{x} - (x+5)}{(x+5) - 1} \leqslant 0, \\ \dfrac{x-3}{x} > 0, \\ x + 5 > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Первое неравенство системы (9) записываем в виде

$$\frac{x^2+4x+3}{x(x+4)} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x+1)(x+3)}{x(x+4)} \geqslant 0$$

и решаем методом интервалов:

$$x < -4, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad x > 0. \tag{10}$$

Пересечение множеств решений второго и третьего неравенств системы (9):

$$-5 < x < 0, \quad x > 3. \tag{11}$$

Множество решений системы (9) является пересечением множеств (10) и (11):

$$\boxed{-5 < x < -4, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad x > 3.} \tag{12}$$

Это и есть множество решений второго неравенства исходной системы. Множество решений нашей системы получается пересечением множеств (8) и (12) с учётом оценки $3 < \log_4 65$.

Ответ: $(-5; -4) \cup [-3; -1] \cup (3; \log_4 65]$.

Задача C3. (ЕГЭ, 2012) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{25 \cdot 0{,}5^{x-1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 4^x} \geqslant 0{,}5^{x+2}, \\ \log_{6-x}\dfrac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое неравенство системы:

$$\frac{25\cdot 2^{1-x}-2^{x-2}}{2^{x+2}-4^x}-2^{-x-2}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{25\cdot 2^{1-x}-1}{2^{x+2}-4^x}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2^{\log_2 25+1-x}-2^0}{2^{x+2}-2^{2x}}\geqslant 0.$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y=2^x$ на множестве $\mathbb{R}$ последнее неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\log_2 25+1-x-0}{x+2-2x}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-\log_2 50}{x-2}\geqslant 0.$$

Решения полученного неравенства являются решениями первого неравенства системы:

$$\boxed{x<2,\quad x\geqslant \log_2 50.} \tag{13}$$

Решения второго неравенства системы удовлетворяют условию $6-x>0$; но на множестве $x<6$ мы имеем:

$$\log_{6-x}\frac{x^4}{x^2-12x+36}=\log_{6-x}\frac{x^4}{(x-6)^2}=\log_{6-x}\left(\frac{x^2}{x-6}\right)^2=2\log_{6-x}\left|\frac{x^2}{x-6}\right|=2\log_{6-x}\frac{x^2}{6-x}.$$

Поэтому второе неравенство нашей системы равносильно неравенству:

$$\log_{6-x}\frac{x^2}{6-x}\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \log_{6-x}x^2-1\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\lg x^2}{\lg(6-x)}-1\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\lg x^2-\lg(6-x)}{\lg(6-x)-\lg 1}\leqslant 0.$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y=\lg x$ на своей области определения последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-(6-x)}{(6-x)-1}\leqslant 0,\\ 6-x>0,\\ x^2>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{5-x}\leqslant 0,\\ x<6,\\ x\neq 0.\end{cases} \tag{14}$$

Первое неравенство системы (14) переписываем в виде:

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x-5}\geqslant 0$$

и решаем его методом интервалов: $-3\leqslant x\leqslant 2$, $x>5$. Таким образом, множество решений системы (14):

$$\boxed{-3\leqslant x<0,\quad 0<x\leqslant 2,\quad 5<x<6.} \tag{15}$$

Это — множество решений второго неравенства системы.

Множество решений нашей системы получается пересечением множеств (13) и (15) с учётом оценки $5<\log_2 50<6$.

Ответ: $[-3;0)\cup(0;2)\cup[\log_2 50;6)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2011) Решите неравенство:

$$\frac{2\log_{x+4}(x^2-2x)}{\log_{x+4}x^2}\geqslant 1.$$

Решение. Все решения данного неравенства удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1, \end{cases}$$

множество решений которой:

$$-4 < x < -3, \quad -3 < x < 0, \quad x > 2. \tag{16}$$

На множестве (16) имеем цепочку равносильных преобразований нашего неравенства:

$$\frac{2 \cdot \frac{\lg(x^2-2x)}{\lg(x+4)}}{\frac{\lg x^2}{\lg(x+4)}} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\lg(x^2-2x)}{\lg x^2} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lg\left(x^2-2x\right)^2}{\lg x^2} - 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lg\left(x^2-2x\right)^2 - \lg x^2}{\lg x^2 - \lg 1} \geqslant 0.$$

В силу монотонного возрастания функции $y = \lg x$ эта цепочка продолжается:

$$\frac{\left(x^2-2x\right)^2 - x^2}{x^2-1} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x^2-3x)(x^2-x)}{x^2-1} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \geqslant 0.$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов:

$$x < -1, \quad x = 0, \quad x \geqslant 3. \tag{17}$$

Решением исходного неравенства служит пересечение множеств (16) и (17).

Ответ: $(-4; -3) \cup (-3; -1) \cup [3; +\infty)$.

Задача C3. (ЕГЭ, 2011) Решите неравенство:

$$9\log_7(x^2+x-2) \leqslant 10 + \log_7 \frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$9\log_7(x-1)(x+2) \leqslant 10 + \log_7 \frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

Все решения данного неравенства удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > 0, \\ \dfrac{(x-1)^9}{x+2} > 0, \end{cases}$$

множество решений которой:

$$x < -2, \quad x > 1. \tag{18}$$

На множестве (18) имеем цепочку равносильных преобразований нашего неравенства:

$$9\left(\log_7|x-1| + \log_7|x+2|\right) \leqslant 10 + \log_7|x-1|^9 - \log_7|x+2| \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 9\log_7|x-1| + 9\log_7|x+2| \leqslant 10 + 9\log_7|x-1| - \log_7|x+2| \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 10\log_7|x+2| \leqslant 10 \quad \Leftrightarrow \quad \log_7|x+2| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| \leqslant 7 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -7 \leqslant x+2 \leqslant 7 \quad \Leftrightarrow \quad -9 \leqslant x \leqslant 5.$$

Остаётся лишь взять пересечение полученного множества с множеством (18).

Ответ: $[-9;-2)\cup(1;5]$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2011) Решите неравенство:

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0.$$

Решение. Все решения данного неравенства удовлетворяют системе

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}>0,\\ 2x^2-7x+6>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x>0,\\ 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-2)>0,\end{cases}$$

множество решений которой:

$$0<x<\frac{3}{2},\quad x>2. \tag{19}$$

На множестве (19) имеем цепочку равносильных преобразований нашего неравенства:

$$\frac{\lg\frac{x}{3}}{\lg\sqrt{2x^2-7x+6}}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\lg\frac{x}{3}}{\lg(2x^2-7x+6)}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\lg x-\lg 3}{\lg(2x^2-7x+6)-\lg 1}>0.$$

Вследствие монотонного возрастания функции $y=\lg x$ цепочка продолжается:

$$\frac{x-3}{(2x^2-7x+6)-1}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x-3}{2x^2-7x+5}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x-3}{2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}>0.$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов:

$$1<x<\frac{5}{2},\quad x>3. \tag{20}$$

Решением исходного неравенства служит пересечение множеств (20) и (19).

Ответ: $\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)\cup(3;+\infty)$.

Задача С3. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство:

$$\log_5\left((3^{-x^2}-5)(3^{-x^2+16}-1)\right)+\log_5\frac{3^{-x^2}-5}{3^{-x^2+16}-1}>\log_5\left(3^{7-x^2}-1\right)^2.$$

Решение. Делаем замену $t=3^{-x^2}$:

$$\log_5(t-5)(3^{16}t-1)+\log_5\frac{t-5}{3^{16}t-1}>\log_5\left(3^7t-1\right)^2. \tag{21}$$

Заметим теперь, что $0<t\leqslant 1$ (ведь t есть тройка в неположительной степени). Отсюда $t-5<0$. Поэтому все решения неравенства (21) удовлетворяют условию

$$3^{16}t-1<0\quad\Leftrightarrow\quad t<3^{-16}.$$

Итак, все решения неравенства (21) принадлежат множеству

$$0<t<3^{-16}. \tag{22}$$

На множестве (22) имеем также оценку:

$$3^7t - 1 < 3^7 \cdot 3^{-16} - 1 = 3^{-9} - 1 < 0.$$

С учётом этой оценки имеем на множестве (22) цепочку равносильных преобразований неравенства (21):

$$\begin{aligned}
&\log_5|t-5| + \log_5\left|3^{16}t-1\right| + \log_5|t-5| - \log_5\left|3^{16}t-1\right| > 2\log_5\left|3^7t-1\right| \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2\log_5(5-t) > 2\log_5(1-3^7t) \quad \Leftrightarrow \quad \log_5(5-t) > \log_5(1-3^7t) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 5-t > 1-3^7t \quad \Leftrightarrow \quad (1-3^7)t < 4.
\end{aligned}$$

Поскольку $1 - 3^7 < 0$, полученное неравенство выполнено при всех t из множества (22). Таким образом, множество (22) есть множество решений неравенства (21), и нам остаётся лишь сделать обратную замену:

$$3^{-x^2} < 3^{-16} \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 < -16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 16.$$

Решения последнего неравенства: $x > 4$ или $x < -4$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Задача C3. (ЕГЭ, 2010) Решите неравенство:

$$\frac{\log_4(2-x) - \log_{14}(2-x)}{\log_{14}x - \log_{49}x} \leqslant \log_4 49.$$

Решение. Переходим к основанию 4:

$$\frac{\log_4(2-x) - \frac{\log_4(2-x)}{\log_4 14}}{\frac{\log_4 x}{\log_4 14} - \frac{\log_4 x}{\log_4 49}} \leqslant \log_4 49 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_4(2-x)\cdot\frac{\log_4 14-1}{\log_4 14}}{\log_4 x\cdot\frac{\log_4 49-\log_4 14}{\log_4 49\log_4 14}} \leqslant \log_4 49.$$

Замечаем, что $\log_4 14 - 1 = \log_4\frac{7}{2}$ и $\log_4 49 - \log_4 14 = \log_4\frac{7}{2}$:

$$\frac{\log_4(2-x)\cdot\log_4\frac{7}{2}}{\log_4 x\cdot\log_4\frac{7}{2}}\cdot\log_4 49 \leqslant \log_4 49.$$

Сокращая обе части на положительный множитель $\log_4 49$, приходим к равносильному неравенству

$$\frac{\log_4(2-x)}{\log_4 x} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_4(2-x) - \log_4 x}{\log_4 x - \log_4 1} \leqslant 0.$$

Ввиду монотонного возрастания функции $y = \log_4 x$ полученное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{(2-x)-x}{x-1} \leqslant 0, \\ 2-x > 0, \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2(x-1)}{x-1} \geqslant 0, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 1, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 2)$.