Задача C1 на ЕГЭ по математике

В этой статье мы подробно разберём три задачи C1, предлагавшиеся на ЕГЭ по математике соответственно в 2012, 2011 и 2010 годах[1].

Тригонометрические уравнения в задачах C1 весьма просты. Для решения таких уравнений достаточно владеть теми стандартными методами, о которых было рассказано в предыдущей статье «Тригонометрические уравнения. 1».

Особенность задач C1 последних двух ЕГЭ — наличие ограничений, в соответствии с которыми нужно произвести отбор решений уравнения. Эти ограничения либо служат дополнительным пунктом условия задачи (как на ЕГЭ-2012), либо логически вытекают из структуры самого уравнения (как на ЕГЭ-2011). И опыт показывает, что данные ограничения как раз и представляют собой главную трудность для школьников.

Задача C1. (ЕГЭ, 2012)

а) Решите уравнение:

$$4\sin^3 x = \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. Прежде всего упростим правую часть. Можно воспользоваться формулой косинуса разности:

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{5\pi}{2} + \sin x \sin\frac{5\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x.$$

Если вы забыли формулы синуса/косинуса суммы/разности — обязательно перечитайте ещё раз статью «Формулы сложения».

Другой вариант — использовать формулу приведения. То есть, на экзамене можно просто написать:

«согласно формуле приведения имеем $\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin x$».

Единственное, что тут от вас требуется — чётко уметь пользоваться формулами приведения и не ошибаться. Если вы забыли, как пользоваться формулами приведения, то не пожалейте времени и повторите соответствующую статью «Формулы приведения».

Итак, получаем уравнение:

$$4\sin^3 x = \sin x.$$

Переносим $\sin x$ в левую часть и выносим за скобки:

$$4\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(4\sin^2 x - 1) = 0.$$

Первый случай:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Второй случай:

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}.$$

[1] До 2010 года ЕГЭ по математике имел другой формат.

Изобразим на тригонометрической окружности четыре точки, отвечающие углам, синус которых равен $\pm 1/2$ (рис. 1).

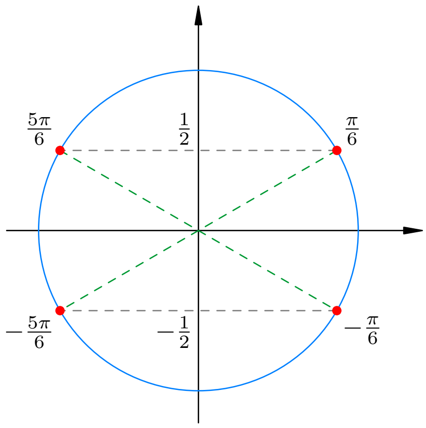

Рис. 1. Решения уравнения $4\sin^2 x - 1 = 0$

Эти четыре точки можно описать одной формулой (как две диаметральные пары, отмеченные зелёным пунктиром):

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Мы выполнили пункт а) задачи. Решения данного уравнения:

$$x = \pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Теперь нам нужно выбрать решения, которые находятся на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$. Мы опишем три способа отбора корней: с помощью тригонометрической окружности, с помощью графика и с помощью двойных неравенств.

Первый способ. Отбор корней с помощью тригонометрической окружности.

Данный способ — простой, наглядный и универсальный. Давайте посмотрим на рис. 2. Что мы видим на этом рисунке?

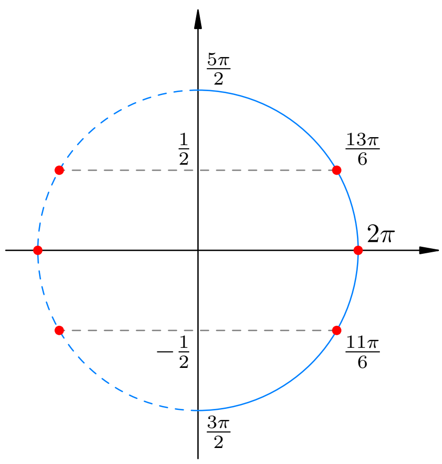

Рис. 2. Корни на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Во-первых, мы поставили граничные точки нашего отрезка: $3\pi/2$ и $5\pi/2$. Нужную дугу тригонометрической окружности (лежащую между граничными точками) мы изобразили сплошной линией, ненужную часть — пунктиром.

Во-вторых, мы поставили все шесть точек, изображающих решения нашего уравнения. Это горизонтальная пара $x = \pi n$, расположенная на оси абсцисс, и четвёрка $x = \pm\pi/6 + \pi n$.

Из шести точек только три лежат на нужной дуге окружности. Рядом с этими тремя точками мы поставили соответствующие значения x, принадлежащие промежутку $[3\pi/2; 5\pi/2]$.

Эти значения и есть ответ на пункт б) задачи: 2π, $\dfrac{11\pi}{6}$, $\dfrac{13\pi}{6}$.

Второй способ. Отбор корней с помощью графика.

Как мы уже видели, решениями нашего уравнения служат те значения x, для которых синус принимает значения 0 или $\pm 1/2$. Чтобы выбрать корни, расположенные на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$, можно использовать график функции $y = \sin x$ (рис. 3).

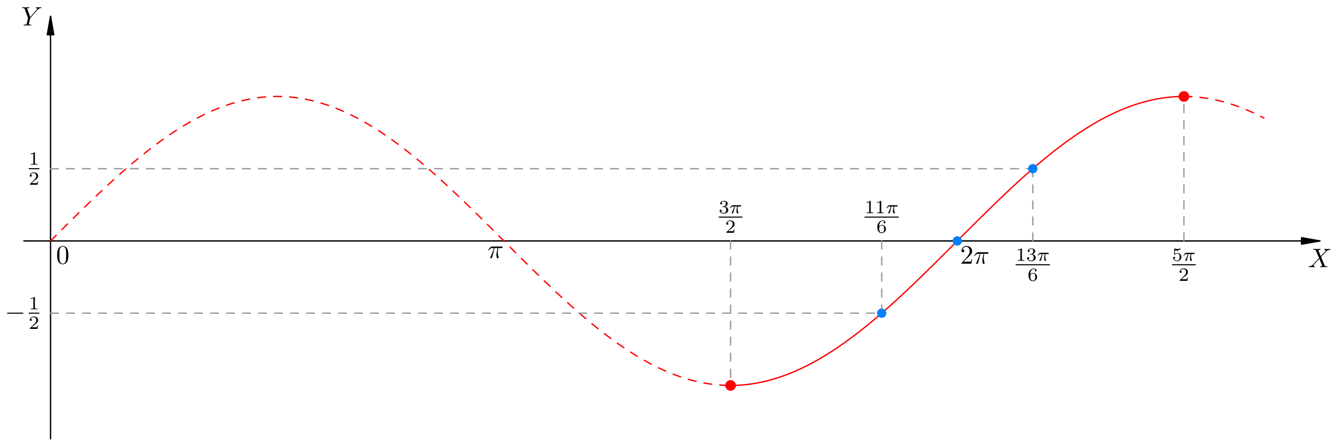

Рис. 3. Корни на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$

Нужная часть графика (на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$) изображена сплошной линией, остальная часть — пунктиром. Нас интересуют точки на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$, ордината которых равна 0 или $\pm 1/2$. Нетрудно видеть, что этими точками являются 2π, $11\pi/6$ и $13\pi/6$.

Третий способ. Отбор корней с помощью двойных неравенств.

Берём первую серию решений ($x = \pi n$) и заключаем её в двойное неравенство:

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant \pi n \leqslant \frac{5\pi}{2}.$$

Сокращаем на π:

$$\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant \frac{5}{2}.$$

С учётом того, что n — целое, получаем единственную возможность $n = 2$. Стало быть, данная серия даёт нам решение 2π на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$.

Вторую серию решений ($x = \pm\pi/6 + \pi n$) мы для удобства разобьём на две:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Сначала имеем:

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant \frac{5\pi}{2}.$$

Снова сокращаем на π:

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{6} + n \leqslant \frac{5}{2},$$

и вычитаем 1/6 из всех частей неравенства:

$$\frac{4}{3} \leqslant n \leqslant \frac{7}{3}\,.$$

Для n получается единственное значение: $n = 2$. Соответственно, серия x_1 даёт на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$ следующее решение:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}\,.$$

Остаётся разобраться с серией x_2. Имеем:

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant \frac{5\pi}{2}\,.$$

После сокращения на π и прибавления 1/6 получим:

$$\frac{5}{3} \leqslant n \leqslant \frac{8}{3}\,.$$

И снова единственный случай: $n = 2$. Тогда серия x_2 даёт:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}\,.$$

Ответ: а) πn, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 2π, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$.

Задача C1. (ЕГЭ, 2011) Решите уравнение: $(4\cos^2 x - 4\cos x - 3) \cdot \sqrt{-6\sin x} = 0$.

Решение. В левой части уравнения стоит произведение двух множителей, которое равно нулю. Имеются, соответственно, две возможности.

1. Первый множитель равен нулю, и при этом второй множитель определён (то есть выполнено неравенство $-6\sin x \geqslant 0$).

2. Второй множитель равен нулю.

Следовательно, исходное уравнение равносильно следующей совокупности, состоящей из системы и уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0, \\ \sin x \leqslant 0, \end{cases} \\ \sin x = 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Решаем вначале уравнение системы:

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0.$$

Делая замену $t = \cos x$, приходим к квадратному уравнению относительно t:

$$4t^2 - 4t - 3 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3}{2}\,.$$

Обратная замена:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$
$$\cos x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{решений нет, так как } \frac{3}{2} > 1.$$

Из этих решений нам нужно выбрать те, для которых выполнено неравенство $\sin x \leqslant 0$. Для этого изобразим полученные решения на тригонометрической окружности (рис. 4).

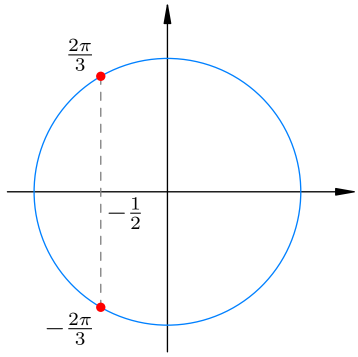

Рис. 4. Решения уравнения $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$

Нас устраивают лишь те значения x, которые отвечают точке с отрицательной ординатой, то есть

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Это — решение системы, входящей в совокупность (1).

Нам остаётся присоединить сюда решения уравнения совокупности (1):

$$\sin x = 0,$$

то есть

$$x = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\pi n,\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача C1. (ЕГЭ, 2010) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ \left(2\sqrt{\sin x} - 1\right)(2y + 5) = 0. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы даёт нам две возможности.

1. $2\sqrt{\sin x} - 1 = 0$, откуда $\sin x = \dfrac{1}{4}$ и

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Из первого уравнения получаем тогда:

$$y = -\sin x = -\frac{1}{4}\,.$$

2. $2y + 5 = 0$ и при этом $\sin x \geqslant 0$. Отсюда $y = -\dfrac{5}{2}$, и тогда из первого уравнения:

$$\sin x = -y = \frac{5}{2} \ \Rightarrow \ \text{решений нет, так как } \frac{5}{2} > 1.$$

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin\dfrac{1}{4} + \pi n; -\dfrac{1}{4}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.