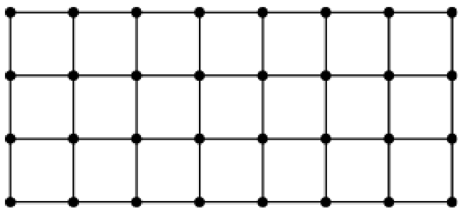
Оценка плюс пример

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

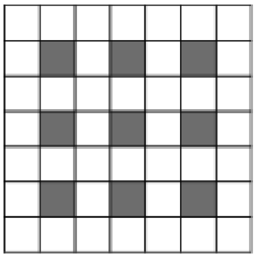
1.1. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 8.3*) Карина достала из коробка несколько спичек и собрала из них сетку 3×7 из квадратиков со стороной в одну спичку, как на рисунке ниже.



Какое минимальное количество спичек ей нужно ещё достать из коробка, чтобы из всех спичек она смогла собрать сетку в форме квадрата? (Квадратики сетки опять должны иметь сторону в одну спичку. Лишних спичек остаться не должно.)

1.2. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 8.4*) Все натуральные числа, сумма цифр в записи которых делится на 5, выписывают в порядке возрастания: 5, 14, 19, 23, 28, 32, … Чему равна самая маленькая положительная разность между соседними числами в этом ряду? Приведите пример и объясните, почему меньше быть не может.

1.3. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 8.6*) Найдите наибольшее количество белых доминошек, которое можно вырезать из доски, изображённой слева. Доминошка — это прямоугольник 1×2.



1.4. (*Всеросс., 2016, МЭ, 8.4*) Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

1.5. (*Всеросс., 2017, МЭ, 8.6*) Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 2016, можно отметить так, чтобы произведение любых двух отмеченных чисел было бы точным квадратом?

1.6. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 9.3*) Назовём трёхзначное число *интересным*, если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажите, что больше чисел получить нельзя.)

1.7. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9.6*) На шахматной доске стоял 21 король. Каждый из королей находился под боем хотя бы одного из остальных. После того как несколько королей убрали, никакие два из оставшихся королей друг друга не бьют. Какое наибольшее число королей могло остаться?

а) Приведите пример исходной расстановки и отметьте убранных королей.

б) Докажите, что большее число королей остаться не могло.

1.8. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 9.6*) Экскурсионная группа из 6 туристов осматривает достопримечательности. Около каждой достопримечательности три человека фотографируются, а остальные их фотографируют. После какого минимального числа достопримечательностей каждый турист будет иметь фотографии всех остальных участников экскурсии?

1.9. (*Всеросс., 2017, МЭ, 9.2*) На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

1.10. (*Всеросс., 2014, МЭ, 9.4*) В квадратной таблице размером 100×100 некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своём столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

1.11. (*Всеросс., 2015, МЭ, 9.4*) Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

1.12. (*Всеросс., 2016, МЭ, 9.6*) В ожидании покупателей продавец арбузов поочерёдно взвесил 20 арбузов (массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 20 кг), уравновешивая арбуз на одной чашке весов одной или двумя гирями на другой чашке (возможно, одинаковыми). При этом продавец записывал на бумажке, гири какой массы он использовал. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в его записях, если масса каждой гири — целое число килограммов?

1.13. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 10.6*) Несколько мудрецов построилось в колонну. На всех были либо чёрные, либо белые колпаки. Оказалось, что среди любых 10 подряд идущих мудрецов поровну мудрецов с белыми и с чёрными колпаками, а среди любых 12 подряд идущих — не поровну. Какое наибольшее количество мудрецов могло быть?

1.14. (*Всеросс., 2015, РЭ, 9.1*) За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Моё число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Моё число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться?

1.15. (*Всеросс., 2019, РЭ, 9.5*) Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?

1.16. (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 9.5*) По кругу записаны 100 целых чисел. Каждое из чисел больше суммы двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди записанных?

1.17. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 9.2*) Серёжа выбрал два различных натуральных числа a и b. Он записал в тетрадь четыре числа: a, $a+2$, b и $b+2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске?

1.18. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 9.3*) В выпуклом n-угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей.

1.19. (*Всеросс., 2016, МЭ, 10.2*) Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая 1 и само число)?

1.20. (*Всеросс., 2015, МЭ, 10.4*) Каждый день, с понедельника по пятницу, ходил старик к синему морю и закидывал в море невод. При этом каждый день в невод попадалось не больше рыбы, чем в предыдущий. Всего за пять дней старик поймал ровно 100 рыбок. Какое наименьшее суммарное количество рыбок он мог поймать за три дня — понедельник, среду и пятницу?

1.21. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.3*) В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

1.22. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10.8*) Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

1.23. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 10.3*) В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью 101, 102, …, 200 человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

1.24. (*Всеросс., 2015, МЭ, 11.2*) Какое наименьшее количество множителей требуется вычеркнуть из числа 99! так, чтобы произведение оставшихся множителей оканчивалось на 2?

1.25. (*Всеросс., 2018, МЭ, 11.6*) В стопку сложены 300 карточек: 100 белых, 100 чёрных и 100 красных. Для каждой белой карточки подсчитано количество чёрных, лежащих ниже её, для каждой чёрной — количество красных, лежащих ниже её, а для каждой красной — количество белых, лежащих ниже её. Найдите наибольшее возможное значение суммы трёхсот получившихся чисел.

1.26. (*Всеросс., 2018, РЭ, 11.5*) Назовём *лодочкой* трапецию  с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадратика двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку?

1.27. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11.2*) На доске написано выражение $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$, где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf?

1.28. (*Всеросс., 2019, РЭ, 11.3*) Назовём *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.

1.29. (*Всеросс., 2016, ЗЭ, 11.3*) На клетчатый лист бумаги размера 100×100 положили несколько попарно неперекрывающихся картонных равнобедренных прямоугольных треугольничков с катетом 1; каждый треугольничек занимает ровно половину одной из клеток. Оказалось, что каждый единичный отрезок сетки (включая граничные) накрыт ровно одним катетом треугольничка. Найдите наибольшее возможное число клеток, не содержащих ни одного треугольничка.

1.30. (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 11.8*) Даны натуральные числа a и b, причём $a < b < 2a$. На клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в каждом клетчатом прямоугольнике $a \times b$ или $b \times a$ есть хотя бы одна отмеченная клетка. При каком наибольшем α можно утверждать, что для любого натурального N найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, в котором отмечено хотя бы αN^2 клеток?

1.31. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 11.8*) Дано натуральное n. Из 26 единичных белых кубиков и одного чёрного кубика собирается куб $3 \times 3 \times 3$ так, что чёрный кубик находится в его центре. Из n^3 таких кубов с ребром 3 составили куб с ребром $3n$. Какое наименьшее количество белых кубиков можно перекрасить в красный цвет так, чтобы каждый белый кубик имел хотя бы одну общую вершину с каким-нибудь красным?

2 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2.1. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.1*) Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число *хорошим*, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных?

2.2. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2015.2*) Разрешается вырезать из шахматной доски размером 20×20 любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.

2.3. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2015.6*) После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?

2.4. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2012.6*) По кругу выложены чёрные и белые шары, причем чёрных в два раза больше, чем белых. Известно, что среди пар соседних шаров одноцветных пар втрое больше, чем разноцветных. Какое наименьшее число шаров могло быть выложено?

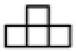
2.5. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2009.3*) По кругу выписаны числа 1, 2, 3, ..., 10 в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

2.6. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2014.7*) На клетчатой доске размером 2014×2014 закрашено несколько (не меньше одной) клеток так, что в каждом квадратике размером 3×3 клетки закрашено чётное число клеток. Каково наименьшее возможное число закрашенных клеток?

2.7. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2011.7*) Для четырёх различных целых чисел подсчитали все их попарные суммы и попарные произведения. Полученные суммы и произведения выписали на доску. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться на доске?

2.8. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.4*) При каком наибольшем n можно раскрасить числа 1, 2, …, 14 в красный и синий цвета так, чтобы для любого числа $k = 1, 2, \ldots, n$ нашлись пара синих чисел, разность между которыми равна k, и пара красных чисел, разность между которыми тоже равна k?

2.9. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2019.4*) Имеется кубик, каждая грань которого разбита на 4 одинаковые квадратные клетки. Олег хочет отметить невидимыми чернилами 8 клеток так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей стороны. У Рустема есть детекторы. Если детектор помещен в клетку, чернила на ней делаются видимыми. Какое наименьшее число детекторов Рустем может поместить в клетки так, чтобы, какие бы клетки после этого Олег ни отметил, можно было определить все отмеченные клетки?

2.10. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2013.8*) В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения четырёхклеточной фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

2.11. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2018.9*) На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2?

2.12. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2009.1*) У реки живёт племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч пошёл к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо. Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение?

2.13. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2018.2*) Найдите наименьшее натуральное k такое, что для некоторого натурального числа a, большего 500 000, и некоторого натурального числа b выполнено равенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+k} = \frac{1}{b}\,.$$

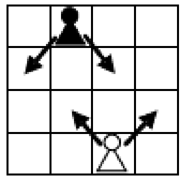
2.14. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2014.7*) Десятичная запись натурального числа N составлена только из единиц и двоек. Известно, что вычёркиванием цифр из этого числа можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее возможное количество цифр в записи числа N.

2.15. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2018.4*) В вершинах правильного 300-угольника расставлены числа от 1 до 300 по одному разу в некотором порядке. Оказалось, что для каждого числа a среди ближайших к нему 15 чисел по часовой стрелке столько же меньших a, сколько и среди 15 ближайших к нему чисел против часовой стрелки. Число, которое больше всех 30 ближайших к нему чисел, назовём *огромным*. Каково наименьшее возможное количество огромных чисел?

2.16. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2015.4*) На каждой стороне квадрата выбрано по 100 точек, из каждой выбранной точки внутрь квадрата проведён отрезок, перпендикулярный соответствующей стороне квадрата. Оказалось, что никакие два из проведённых отрезков не лежат на одной прямой. Отметим все точки пересечения этих отрезков. При каком наибольшем $k < 200$ может случиться так, что на каждом проведённом отрезке лежит ровно k отмеченных точек?

2.17. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2010.4*) В вершинах куба расставили числа 1^2, 2^2, $\ldots$, 8^2 (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

2.18. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2011.8*) Какое наибольшее количество белых и чёрных пешек можно расставить на клетчатой доске 9×9 (пешку, независимо от её цвета, можно ставить на любую клетку доски) так, чтобы никакая не била никакую (в том числе и своего цвета)? Белая пешка бьёт две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с бóльшим номером, а чёрная — две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с меньшим номером (см. рисунок).



3 Московская математическая олимпиада

3.1. (*ММО, 2014, 9.3*) Дано n палочек. Из любых трёх можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение n?

3.2. (*ММО, 2019, 9.6*) Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

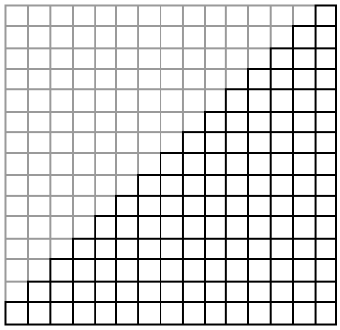
3.3. (*ММО, 2020, 11.3*) За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)?

3.4. (*ММО, 2017, 11.4*) Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

3.5. (*ММО, 2020, 11.4*) Из шахматной доски 8×8 вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2015, 8–9.4*) На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней (см. рисунок)? Резать можно только по границам клеток.



4.2. (*Турнир городов, 2016, 8–9.4, 10–11.3*) В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены чёрным цветом, а остальные клетки — белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике чёрных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.)

4.3. (*Турнир городов, 2016, 8–9.4*) Художник-абстракционист взял деревянный куб $5 \times 5 \times 5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов — чёрный, белый или красный — так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.)

4.4. (*Турнир городов, 2016, 8–9.7*) а) Есть $2n + 1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

б) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну.

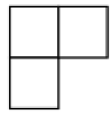
4.5. (*Турнир городов, 2016, 10–11.4*) Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и нашёл приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он произвольно выбрал из списка два числа, сложил их, отбросил у суммы знаки после запятой (если они были) и записал результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он проделал то же самое, и так далее, пока в списке не осталось одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

5 «Покори Воробьёвы горы!»

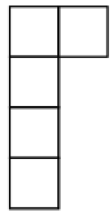
5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Вовочка подошел к игровому автомату, на экране которого горело число 0. В правилах игры было написано: «На экране показано число очков. Если кинуть монетку в 1 руб., то число очков увеличится на 1. Если кинуть монетку 2 руб., то число очков удвоится. Если набрать 50 очков, то автомат выдаёт приз. А если получилось число, большее 50, то все набранные очки сгорают.»

За какое минимальное количество рублей Вовочка сможет получить приз?

5.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.4, 7–8.3*) Сложите квадрат из наименьшего возможного количества «уголков», имеющих вид, изображенный на рисунке. В ответе укажите количество использованных «уголков».

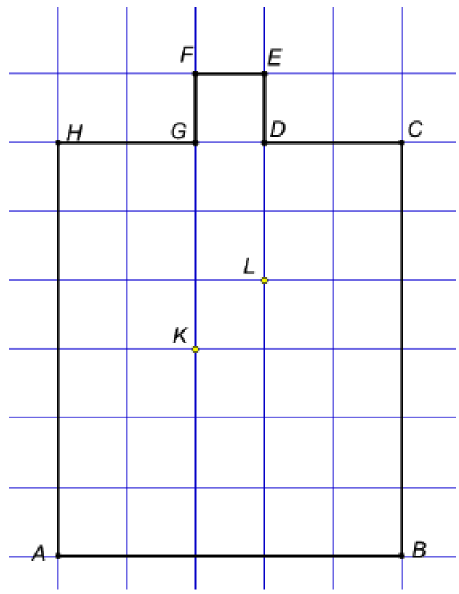


5.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.4, 7–8.3*) Сложите квадрат из наименьшего возможного количества фигур в форме буквы Г, имеющих вид, изображенный на рисунке. В ответе укажите количество использованных фигур.



5.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.5, 7–8.4, 9.2*) Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.

5.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 5–6.5; 7–8.4; 9.3*) На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см построен многоугольник $ABCDEFGH$ (см. рис.). Назовём *прямоугольной* ломаную, проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L, не выходящую за границу $ABCDEFGH$ (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в сантиметрах.



5.6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 5–6.5; 7–8.4; 9.3*) На прямой расположены 15 точек A_1, …, A_{15}, идущие с промежутками 1 см. Петя строит окружности по следующим правилам.

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, …, A_{15}.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности.

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т. е., например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри, построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Петя сможет построить по этим правилам?

5.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8.5*) Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например $2015 = 1007 + 1008$ или $2015 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405$. Какое наибольшее количество слагаемых может быть в таком представлении? Замечание: целые числа могут быть отрицательными.

5.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7.9, 8.9*) Числа $1, 2, \ldots, 2016$ разбили на пары, при этом оказалось, что произведение чисел в каждой паре не превосходит некоторого натурального N. При каком наименьшем N это возможно?

5.9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.1*) После вырубки нескольких деревьев в парке оказалось, что число оставшихся деревьев равно числу процентов, на которое число деревьев в парке уменьшилось за время вырубки. Какое наименьшее число деревьев могло остаться в парке?

6 «Ломоносов»

6.1. (*«Ломоносов», 2012, 7.1, 8.1*) Электронные часы показывают время в стандартном формате (например, 20:27). Найдите наибольшее возможное значение произведения цифр на таких часах.

6.2. (*«Ломоносов», 2013, 7.4, 8.3*) Блоха прыгает по числовой прямой, причём длина каждого прыжка не может быть меньше n. Она начинает своё движение из начала координат и хочет побывать во всех целых точках, принадлежащих отрезку $[0; 2013]$ (и только в них!) ровно по одному разу. При каком наибольшем значении n это у неё получится?

6.3. (*«Ломоносов», 2018, 5–6.5; 7–9.4*) Числа от 1 до 8 расставлены в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в любых трёх вершинах, находящихся на одной грани, была не менее 10. Какова наименьшая возможная сумма чисел, стоящих в вершинах одной грани?

6.4. (*«Ломоносов», 2012, 8.7*) Для какого наименьшего числа n можно отметить на плоскости n точек так, что найдутся четыре квадрата, все вершины которых — отмеченные точки?

6.5. (*«Ломоносов», 2014, 9.6*) Множество X состоит из пяти различных чисел $x_1, \ldots, x_5$, а множество Y — из семи различных чисел $y_1, \ldots, y_7$. Какое наибольшее количество различных чисел заведомо содержит множество, состоящее из сумм вида $x_i + y_j$, где $i \in \{1, \ldots, 5\}$, $j \in \{1, \ldots, 7\}$?

6.6. (*«Ломоносов», 2014, 10–11.6*) Для охраны объекта в течение 5 суток заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заданные 5 суток, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчёта 500 руб. в час каждому дежурному. Какая наименьшая сумма денег, заранее подготовленная заказчиком, позволит ему наверняка расплатиться с охранниками?

6.7. (*«Ломоносов», 2013, 10–11.6*) В коробке у Маши лежат 25 новогодних шаров, которыми Маша начинает украшать ёлку. Каждый шар он сначала в течение 10 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 15 секунд вешает на ёлку. Два её младших брата Саша и Паша незаметно снимают шары с ёлки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Маша начинает искать в коробке очередной шар, один из братьев (но не оба) может снять с ёлки один шар (на это ему требуется ровно 10 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Саши уходит 50 секунд, после чего он готов украсть с ёлки следующий шар, а Паша прячет шар за одну минуту и 50 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на ёлке в тот момент, когда Маша повесит свой последний шар?

6.8. (*«Ломоносов», 2011, 10–11.7*) Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 6 коробок так, чтобы в любых 4 коробках нашлись карандаши любого из 26 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?

6.9. (*«Ломоносов», 2017, 10–11.8*) Рассматриваются всевозможные наборы, которые состоят из 2017 различных натуральных чисел и в каждом из которых ни одно из чисел нельзя представить в виде суммы двух других чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в таком наборе?

6.10. (*«Ломоносов», 2016, 10–11.8*) Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

6.11. (*«Ломоносов», 2012, 10–11.8*) В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 1000 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 38 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

6.12. (*«Ломоносов», 2008.10*) На числовой прямой отмечены четыре красные точки, соответствующие первым членам геометрической прогрессии с первым членом 3 и знаменателем -2, а также четыре зелёные точки, соответствующие первым членам некоторой арифметической прогрессии с первым членом -12. Какова при этом наименьшая возможная сумма длин четырёх отрезков с разноцветными концами, включающими все восемь отмеченных точек? (Каждая из восьми точек является концом одного из отрезков.)

7 «Высшая проба»

7.1. (*«Высшая проба», 2018, 7.3, 8.3*) Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

7.2. (*«Высшая проба», 2019, 7.5, 8.4*) У оракула в саду живут четыре черепашки. Посетитель может за ход выбирать любое подмножество черепашек и спрашивать оракула, сколько среди этих черепашек самцов (ответы оракула всегда правдивы). За какое наименьшее количество ходов можно узнать про всех черепах, какого они пола?

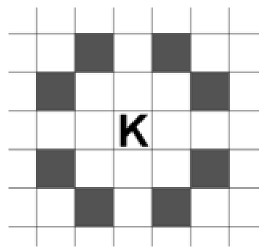
7.3. (*«Высшая проба», 2018, 7.5, 8.5*) В стране из 2018 городов каждая пара городов соединена одной дорогой. Власти решили присвоить каждой трассе статус «федеральной» или «социальной», и для этой цели выпустили метки «Ф» и «С» суммарным числом, равным числу дорог. Однако рабочие расставили метки неправильно: на некоторых трассах могло оказаться по одной метке обоих видов, а на некоторых могло не оказаться ни одной. (Случай, когда на каждой дороге — ровно по одной метке, также считается возможным.) Каково максимально возможное число дорог с меткой «федеральная», если для любой такой дороги на каждой, не имеющей с ней общих концов, есть метка «социальная»?

7.4. (*«Высшая проба», 2012, 9.2*) Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость 10 острых углов.

7.5. (*«Высшая проба», 2012, 10.2*) На плоскости отметили девять точек. Из каждой из них выпустили три луча, образующие друг с другом тупые углы и не проходящие через другие точки. На какое минимальное число частей получившиеся 27 лучей могут разбить плоскость?

7.6. (*«Высшая проба», 2014, 9.6, 11.3*) Последовательность a_n строится следующим образом: a_1, a_2 — произвольные действительные числа, при $n \geqslant 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$. Например, если $a_1 = 6$, $a_2 = \frac{19}{2}$, то получаем последовательность 6, $\frac{19}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{2}$, 1, 1, 0, 0, 0, ... При некотором выборе a_1, a_2 получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.

7.7. (*«Высшая проба», 2016, 10.3*) Каждый ход шахматного коня — перемещение на одну клетку по горизонтали и две по вертикали, либо наоборот — одну по вертикали и две по горизонтали. (На рисунке конь, отмеченный буквой К, может за один ход переместиться в любую из затемнённых клеток.)



В произвольной клетке прямоугольной доски размером 2×2016 клеток стоит шахматный конь. Перемещаясь по описанному правилу (и не выходя при этом за края доски), он может из этой клетки попасть в некоторые другие клетки доски, но не во все. Какое наименьшее количество клеток нужно добавить к доске, чтобы конь мог из любой клетки доски попасть во все остальные? (Добавление клетки происходит так, чтобы она имела общую сторону с одной из уже имеющихся. Добавлять можно любое количество клеток, получившаяся при этом доска не обязательно должна иметь прямоугольную форму.)

7.8. (*«Высшая проба», 2019, 9.6, 10.4*) В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

7.9. (*«Высшая проба», 2020, 8–10.6*) Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор *большим*, если сумма весов гирь поднабора больше или равна $\frac{2}{3}$. Для каждого поднабора найдём число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.

7.10. (*«Высшая проба», 2014, 10.5*) На плоскости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовём *хорошей*, если выполнено следующее условие:

существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от неё, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера. Т. е. ближайшая точка — номер 1, следующая по удалённости — номер 2, и т. д.

Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмёрки точек?

7.11. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 10.6*) Две армии А и Б, состоящие соответственно из 800 и 1000 воинов, встретились на поле битвы и договорились воевать «по-рыцарски». Каждому воину даётся одна смертельно ядовитая стрела (задетый стрелой мгновенно умирает), и они выстреливают по договору: сначала некоторая часть армии А, потом некоторая часть армии Б, потом ещё раз часть армии А, потом ещё раз часть Б, и всё. Какое минимальное число воинов может остаться в живых?

7.12. (*«Высшая проба», 2012, 11.2*) Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость графики десяти квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

7.13. (*«Высшая проба», 2015, 10.4, 11.3*) Даны три точки A, B, C, образующие треугольник с углами 30°, 45°, 105°. Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвёртую точку D. С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура — выбираются две точки, проводится серединный перпендикуляр и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество *различных* точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

7.14. (*«Высшая проба», 2013, 11.4*) Вместо крестиков в выражении $\times \cdot \times + \times \cdot \times + \ldots + \times \cdot \times$ (50 слагаемых) расставили числа 1, …, 100, каждое по одному разу. Какое максимальное и минимальное значение может иметь полученное выражение?

7.15. (*«Высшая проба», 2012, 11.4*) В пространстве выбраны четыре точки, все координаты каждой из которых делятся на 3, причём эти точки не лежат в одной плоскости. Какое минимальное число точек, все координаты которых чётны, может содержаться в тетраэдре, вершинами которого являются выбранные четыре точки? (Содержаться — значит лежать внутри, на грани, на ребре или в вершине.)

7.16. (*«Высшая проба», 2018, 11.4*) В таинственном лесу два мудреца в чёрном и белом колпаках раздают гномикам грибочки. К ним в две очереди выстроились $2n$ гномиков, n в чёрных и n в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномикам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдёт следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)

8 ОММО

8.1. (*ОММО, 2018.2*) n грибников ходили в лес и принесли суммарно 200 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

8.2. (*ОММО, 2020.2*) При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1; 1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 30?

8.3. (*ОММО, 2016.9*) Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 256 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

8.4. (*ОММО, 2015, 9–10.10*) Прямоугольник П разбит прямыми, параллельными его сторонам, на девять маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника П?

9 «Курчатов»

9.1. (*«Курчатов», 2014, 8.5*) На свободные поля шахматной доски 8×8 по одному выставляли чёрных и белых слонов. Чёрный слон при выставлении бил чётное число ранее выставленных слонов любых цветов (в частности, мог не бить никого), а белый — нечётное. Так заполнили всю доску. Какое наименьшее число чёрных слонов могло быть выставлено? (Слоны бьют друг друга если стоят на одной диагонали и между ними нет других слонов.)

9.2. (*«Курчатов», 2014, 9.2*) Фома и Ерёма делят палку колбасы по такому правилу. Сначала Фома режет палку на две части разного веса. Затем Ерёма режет одну из частей на две так, чтобы веса всех трёх кусков были различны. Из трёх полученных кусков Ерёма берёт средний по весу, а остальные два куска достаются Фоме. Какую наибольшую долю колбасы может себе гарантировать Фома при любых действиях Ерёмы?

9.3. (*«Курчатов», 2014, 10.2*) На клетчатой доске $2k \times 2k$ расставили n белых и n черных ладей так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. При каком наибольшем n такое возможно?

9.4. (*«Курчатов», 2017, 10.3*) Найдите наименьшее возможное число k такое, что при выборе любых k различных чисел от 1 до 20 среди выбранных чисел гарантированно можно выделить пару различных с простой суммой.

9.5. (*«Курчатов», 2014, 11.3*) На клетчатой доске $(2k + 1) \times (2k + 1)$ расставили n белых и n черных ладей так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. При каком наибольшем n такое возможно?

10 «Физтех»

10.1. (*Олимпиада Физтех-лицея, 2015, 5–8*) В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 учеников, во вторник — 4, в среду — 6, в четверг — 2, в пятницу — 5. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?