Достраивание тетраэдра

В задачах данного листка используется приём достраивания тетраэдра до параллелепипеда, содержащего исходный тетраэдр. Порой оказывается, что с точки зрения этого *сопровождающего* параллелепипеда ситуация выглядит проще!

«Рёберное» достраивание

Нарисуйте тетраэдр $ABCD$ и параллелепипед с рёбрами DA, DB, DC. Такой параллелепипед может оказаться полезен, если мы что-то знаем о плоских углах при вершине D.

Задача 1. Какую часть объёма сопровождающего параллелепипеда составляет объём тетраэдра?

$1/6$

Задача 2. В тетраэдре $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а их длины равны соответственно a, b и c.

1) Найдите радиус сферы, описанной около этого тетраэдра.

2) Докажите, что центр описанной сферы, вершина D и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой.

$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

«Диагональное» достраивание

Нарисуйте произвольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (не обязательно прямоугольный!) и выделите в нём тетраэдр $ACB'D'$.

Конструкция ясна: через каждое ребро тетраэдра проводим плоскость, параллельную противоположному ребру; полученные три пары параллельных плоскостей высекают в пространстве сопровождающий параллелепипед. При этом рёбра тетраэдра окажутся диагоналями граней параллелепипеда.

Данная конструкция может оказаться полезной, если мы что-то знаем про скрещивающиеся рёбра тетраэдра — ведь в сопровождающем параллелепипеде они оказываются двумя диагоналями одного параллелограмма (грани параллелепипеда).

Задача 3. Какую часть объёма сопровождающего параллелепипеда составляет объём тетраэдра?

$1/3$

Задача 4. Докажите, что объём тетраэдра может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi,$$

где a и b — длины двух скрещивающихся рёбер тетраэдра, d и φ — расстояние и угол между ними.

Задача 5. Ребро правильного тетраэдра равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся всех его рёбер.

$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$

Задача 6. Докажите, что сумма квадратов всех рёбер тетраэдра равна учетверённой сумме квадратов расстояний между серединами его противоположных рёбер.

Задача 7. Обозначим пары скрещивающихся рёбер тетраэдра так: a и b, c и d, e и f.

1) Докажите, что если $a \perp b$ и $c \perp d$, то $e \perp f$.

2) Докажите, что эти рёбра попарно перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2.$$

Задача 8. Противоположные рёбра тетраэдра равны a и a, b и b, c и c. Найдите объём тетраэдра и радиус описанной сферы.

$\boxed{V = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)};\ R = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Задача 9. Косинус угла между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найдите угол ACB, если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, $EF = \sqrt{13}$.

$\boxed{\arccos \frac{5}{8}}$

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = 8$, $CD = 12$, расстояние между прямыми AB и CD равно 6, а объем пирамиды равен 48. Найдите угол между прямыми AB и CD.

$\boxed{30^\circ}$

Задача 11. Отрезок $AB = 1$, являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом 60° к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Найдите BD.

$\boxed{1}$

Задача 12. (*«Ломоносов», 2016, 10–11.7*) Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.

$\boxed{72}$

Задача 13. (*МГУ, мехмат, 2005.6*) Найти объем тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB = 3$, $AC = 5$ и $BD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AB и CD равно 2, а прямая AB образует равные углы с прямыми AC, BD и MN.

$\boxed{4\sqrt{6}}$