Доказательство неравенств (new)

Данный листок является продолжением пособия «Доказательство неравенств», которое больше не модифицируется по техническим причинам[1].

1. (*«Бельчонок», 2021, 8.5*) Числа a, b, c удовлетворяют условиям: $a+b+c=0$, $abc<0$. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0.$$

2. (*«Бельчонок», 2021, 8.5*) Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a^2+b^2+c^2+abc=4.$$

Докажите, что $0\leqslant ab+bc+ac-abc\leqslant 2$.

3. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 11.6*) Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{1+bc}{a}+\frac{1+ca}{b}+\frac{1+ab}{c}>\sqrt{a^2+2}+\sqrt{b^2+2}+\sqrt{c^2+2}.$$

4. (*Всеросс., 2019, МЭ, 11.2*) Известно, что $ab<0$. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2>2ab+2bc+2ca.$$

5. (*Всеросс., 2018, РЭ, 9.5*) Числа x, y и z удовлетворяют условию $x^2+y^2+z^2=1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 9.3*) Пусть $a_1,\ldots,a_{25}$ — целые неотрицательные числа, а k — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}\,]+[\sqrt{a_2}\,]+\ldots+[\sqrt{a_{25}}\,]\geqslant\left[\sqrt{a_1+\ldots+a_{25}+200k}\,\right].$$

(Как обычно, через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

7. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10.3*) Положительные числа x, y таковы, что $x^5-y^3\geqslant 2x$. Докажите, что $x^3\geqslant 2y$.

[1]Так уж вышло, что оказался утрачен исходный tex-файл. Набирать всё это заново у меня нет возможности. Если кто желает поучаствовать в восстановлении документа — пишите.

8. (*«Высшая проба», 2017, 10–11*) Числа P_1, ..., P_n являются перестановкой чисел $\{1, \ldots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из 1, ..., n и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}\,.$$

9. (*«Высшая проба», 2020, 9–11.7*) Даны m подмножеств n-элементного множества: A_1, ..., A_m. Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geqslant (|A_1| + \ldots + |A_m|)^3\,,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

а) Докажите это неравенство при $m = 3$.

б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.

10. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 9.8*) Даны числа a, b, c, не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\,.$$

11. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 11.2*) Даны положительные числа x_1, x_2, ..., x_n, где $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \ldots + \frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n} + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n.$$

12. (*ММО, 2019, 11.4*) Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство

$$\left|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}\right| > \frac{1}{mn}\,.$$