

Доказательство от противного

1. (*Московская устная олимпиада, 2019, 6.4*) Антон, Боря и Вова участвовали в велопробеге по шоссе Каргополь — Медвежьегорск. Они стартовали в разное время и каждый ехал с постоянной скоростью: Антон — быстрее Бори, а Боря — быстрее Вовы. В некоторых точках шоссе были установлены видеокамеры. Каждая из них фиксировала порядок прохождения участниками этой точки. Оказалось, что любой порядок, в котором могли проехать Антон, Боря и Вова, был реализован в какой-то из точек. Известно, что кто-то один из троих падал. Кто именно?
2. (*«Курчатов», 2018, 7.4*) Все натуральные числа раскрашены в три цвета. Докажите, что найдутся два числа одного цвета, разность между которыми является квадратом натурального числа.
3. (*Московская устная олимпиада, 2012, 6.8*) Можно ли 100 гирь массами $1, 2, 3, \dots, 99, 100$ разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?
4. (*Московская устная олимпиада, 2005, 6.8*) На Всемирном конгрессе мудрецов звездчёты сидят в ряд напротив алхимиков за большим длинным столом, а во главе стола сидит Самый Почтенный Мудрец. В первый день конгресса оказалось, что напротив каждого алхимика сидит звездчёт с более длинной бородой, чем у него. На второй день алхимики договорились сесть за столом в порядке возрастания длины бороды от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Но и звездчёты договорились между собой сесть в порядке возрастания длиннородости от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Докажите, что и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездчёт с более длинной бородой, чем у него.