Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина общего перпендикуляра, проведённого к этим прямым.

На рис. 1 мы видим скрещивающиеся прямые a и b. Для наглядности проведены параллельные плоскости π и σ, в которых лежат эти прямые. Расстояние d между прямыми a и b есть длина их общего перпендикуляра MN.

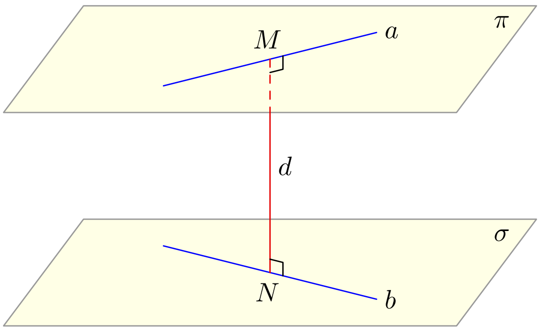

Рис. 1. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Заметим, что величина d есть также расстояние от *любой* точки прямой a до плоскости σ (и вообще от любой точки плоскости π до плоскости σ). Поэтому если в конкретной задаче общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым не просматривается, то можно искать расстояние от какой-либо удобной точки первой прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой — это и будет расстояние между двумя данными прямыми.

Примеры решения задач

Рассмотрим три задачи. Первые две сравнительно простые, а третья соответствует уровню задачи C2 на ЕГЭ по математике.

Задача 1. Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна 1.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Найдём расстояние между прямыми AD и BC. Пусть M — середина AD, N — середина BC (рис. 2).

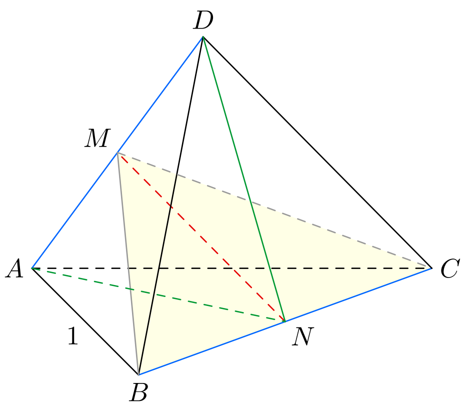

Рис. 2. К задаче 1

Покажем, что MN является общим перпендикуляром к прямым AD и BC. В самом деле, $BM = MC$; медиана MN равнобедренного треугольника BMC будет также его высотой, так что $MN \perp BC$. Точно так же медиана NM равнобедренного треугольника AND будет его высотой, поэтому $MN \perp AD$.

Итак, требуется найти MN. Имеем: $BM = \sqrt{3}/2$, $BN = 1/2$, и тогда по теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{BM^2 - BN^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1. Длина ребра куба равна 3.

Решение. Строить общий перпендикуляр к этим двум прямым — не самая лучшая идея. Мы будем действовать иначе. Проведём AD_1 и заметим, что $BC_1 \parallel AD_1$, и потому прямая BC_1 параллельна плоскости AB_1D_1 (рис. 3).

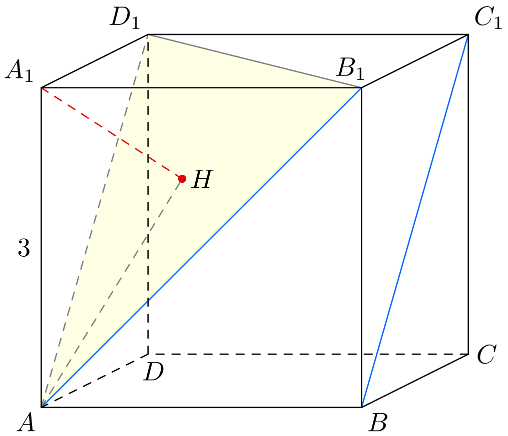

Рис. 3. К задаче 2

Следовательно, расстояние между прямыми BC_1 и AB_1 равно расстоянию от любой точки прямой BC_1 до плоскости AB_1D_1. Удобно взять, например, точку B.

Расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1 равно расстоянию от точки A_1 до данной плоскости (поскольку отрезок A_1B делится этой плоскостью пополам). А расстояние от A_1 до плоскости AB_1D_1 есть высота A_1H треугольной пирамиды $AB_1D_1A_1$.

Основанием данной пирамиды служит равносторонний треугольник AB_1D_1 со стороной $3\sqrt{2}$. Боковые рёбра пирамиды равны 3. Стало быть, пирамида является правильной, и точка H — центр треугольника AB_1D_1.

Длина отрезка AH равна радиусу окружности, описанной вокруг треугольника AB_1D_1:

$$AH = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{3}.$$

Это и есть искомое расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) длина каждого ребра равна 4. Точка K — середина ребра SA. Найдите расстояние между прямыми AD и BK.

Решение. На рис. 4 изображено сечение пирамиды плоскостью KBC; это сечение является равнобедренной трапецией $BKLC$.

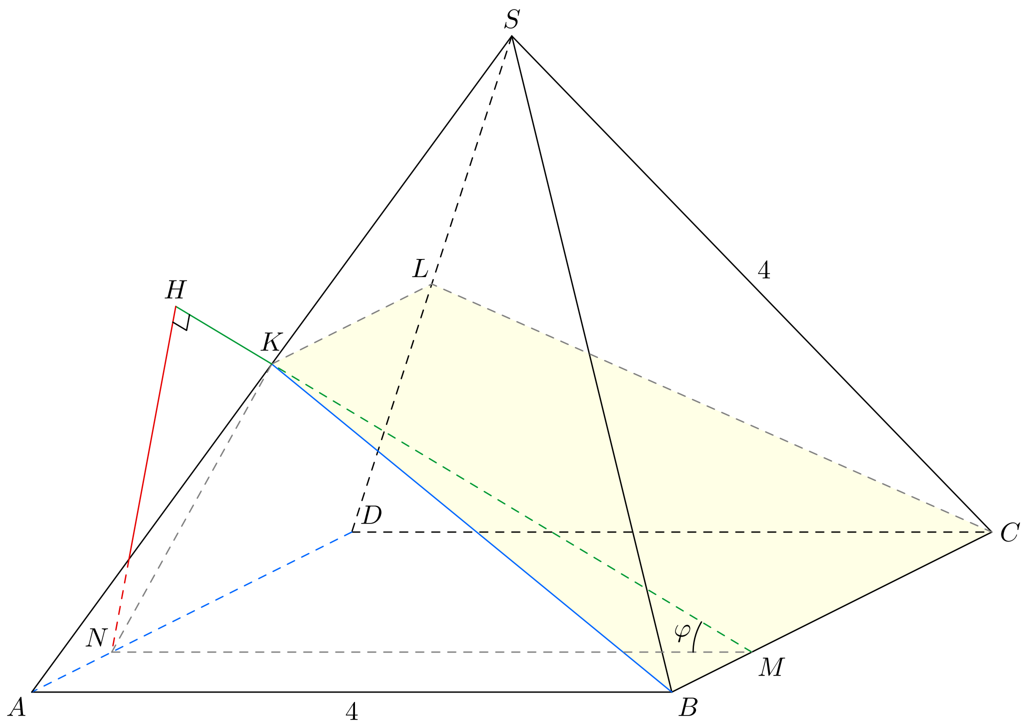

Рис. 4. К задаче 3

Поскольку $AD \parallel BC$, прямая AD параллельна плоскости KBC. Следовательно, искомое расстояние d между прямыми AD и BK равно расстоянию от любой точки прямой AD до плоскости KBC.

Через точку K проведём плоскость KNM, перпендикулярную прямой AD (и, стало быть, прямой BC). Эта плоскость пересекает прямые AD и BC в точках N и M соответственно. Ищем величину d как расстояние от точки N до плоскости KBC.

Отрезок KM является высотой трапеции $BKLC$. Проведём перпендикуляр NH на прямую KM. Вдобавок имеем $NH \perp BC$, поэтому NH — перпендикуляр к плоскости KBC.

Найдём длины сторон треугольника KNM. Очевидно, $NM = 4$. Далее, из треугольника AKN получаем:

$$KN = AK \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Из того же треугольника AKN находим: $AN = BM = 1$. С учётом того, что $BK = 2\sqrt{3}$, находим:

$$KM = \sqrt{BK^2 - BM^2} = \sqrt{11}.$$

(Заметим, что $KM^2 + KN^2 < NM^2$, поэтому угол NKM тупой. Вот почему высота NH оказывается вне треугольника KNM.)

Запишем теорему косинусов для стороны KN треугольника KNM:

$$3 = 16 + 11 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{11} \cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Остаётся вычислить

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\,,$$

и найти искомое расстояние:

$$NH = NM\cdot\sin\varphi = \frac{4\sqrt{22}}{11}\,.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{22}}{11}$.