Принцип Дирихле

1. (*«Надежда энергетики», 2022, 8.3*) Верно ли, что среди любых 2022 целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна 2021?

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.5, 9.4*) В правильном 2017-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

3. (*«Ломоносов», 2017, 7–8.4*) На окружности отмечено 100 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

4. (*«Ломоносов», 2015, 10–11.1*) В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

5. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 11.6*) Внутри шляпы волшебника живут 100 кроликов: белые, синие и зелёные. Известно, что если произвольным образом вытащить из шляпы 81 кролика, то среди них обязательно найдутся три разноцветных. Какое наименьшее количество кроликов нужно достать из шляпы, чтобы среди них точно было два разноцветных?

6. (*ММО, 2008, 8.2*) В кинотеатре семь рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

7. (*ММО, 1960, 7.3*) В составлении 40 задач приняло участие 30 студентов со всех пяти курсов. Каждые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Каждые два студента с разных курсов придумали разное число задач. Сколько человек придумало ровно по одной задаче?

8. (*Моск. матем. регата, 2001, 9*) Докажите, что среди чисел вида $19991999\ldots19990\ldots0$ найдётся хотя бы одно, которое делится на 2001.

9. (*ММО, 1996, 9.1*) Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике имеется не более 35 углов, меньших 170°.

10. (*Турнир городов, 2005, 8–9.2*) В ящике лежат 111 шариков: красные, синие, зелёные и белые. Известно, что если, не заглядывая в ящик, вытащить 100 шариков, то среди них обязательно найдутся четыре шарика различных цветов. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись три шарика различных цветов?

11. (*Турнир городов, 2005, 10–11.2*) В ящике лежат 100 шариков: белые, синие и красные. Известно, что если, не заглядывая в ящик, вытащить 26 шариков, то среди них обязательно найдутся 10 шариков одного цвета. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 30 шариков одного цвета?

12. (*Турнир городов, 2016, 8–9.1*) По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке — ребёнок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки — ребёнок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков?

13. (*Турнир городов, 2015, 8–9.4, 10–11.2*) На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, …, за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

14. (*Турнир городов, 2015, 10–11.2*) Ковёр имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными.

15. (*Турнир Ломоносова, 2017.6*) В классе 28 учеников. На уроке программирования они делятся на три группы. На уроке английского языка они тоже делятся на три группы, но по-другому. И на уроке физкультуры они делятся на три группы каким-то третьим способом. Докажите, что найдутся хотя бы два ученика, которые на всех трёх занятиях находятся друг с другом в одной группе.

16. (*«Курчатов», 2016, 9.5*) Есть 64 шашки трёх цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двуклеточном прямоугольнике были разных цветов.

17. (*«Курчатов», 2016, 10.5*) Есть 64 шашки нескольких цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двуклеточном прямоугольнике были разных цветов.

18. (*ММО, 2015, 9.3*) Каждый день Фрёкен Бок испекает квадратный торт размером 3×3. Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

$\boxed{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}$

19. (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 9.4, 11.3*) В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

20. (*ММО, 2015, 11.4*) Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$.

21. (*ММО, 2015, 11.5*) На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделённые друг от друга океаном. Назовем точку океана *особой*, если для нее найдутся не менее трёх ближайших (находящихся от нее на равных расстояниях) точек суши, причём все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?

22. (*«Высшая проба», 2018, 11.6*) В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно в одной из этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка лежит внутри выпуклой оболочки других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трёх из этих точек.)

Принцип Дирихле и усреднение

23. В пяти пакетах лежали яблоки. Все яблоки из пакетов выложили в кучу, и там оказалось в сумме 73 яблока.

1. Докажите, что в одном из пакетов было не менее 15 яблок.
2. Верно ли, что в одном из пакетов было не более 14 яблок?

24. (*Математический праздник, 1996, 7.1*) По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

25. У восьмерых друзей в сумме 713 рублей (у каждого — целое число рублей).

1. Докажите, что кто-то из них может купить пакет сока за 90 рублей.
2. Докажите, что какие-то двое из них, скинувшись, могут купить шоколадку за 179 рублей.
3. Докажите, что какие-то трое из них, скинувшись, могут купить торт за 268 рублей.