Десятичная запись

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 8.1*) Вася загадал двузначное число, а затем приписал к нему слева цифру 1, а справа — цифру 8, отчего число увеличилось в 28 раз. Какое число мог загадать Вася? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

1.2. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 8.2*) Аня перемножила 20 двоек, а Ваня перемножил 17 пятёрок. Теперь они собираются перемножить свои огромные числа. Какова будет сумма цифр произведения?

1.3. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 11.1*) В трёхзначном числе первую цифру (разряд сотен) увеличили на 3, вторую — на 2, третью — на 1. В итоге число увеличилось в 4 раза. Приведите пример такого исходного числа.

1.4. (*Всеросс., 2017, МЭ, 8.1*) Последняя цифра в записи натурального числа в 2016 раз меньше самого числа. Найдите все такие числа.

1.5. (*Всеросс., 2016, МЭ, 9.2*) Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?

1.6. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 8.2, 10.1*) К натуральному числу A приписали справа три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до A. Найдите A.

1.7. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 8.2*) Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стёр некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

1.8. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 8.6*) Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ делится на сумму своих цифр. (Например, $n = 60398$ — хорошее.) Обязательно ли предпоследней цифрой хорошего числа, оканчивающегося восьмёркой, будет девятка?

1.9. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 8.7*) Набор пятизначных чисел $\{N_1, \ldots, N_k\}$ таков, что любое пятизначное число, все цифры которого идут в возрастающем порядке, совпадает хотя бы в одном разряде хотя бы с одним из чисел $N_1, \ldots, N_k$. Найдите наименьшее возможное значение k.

1.10. (*Всеросс., 2018, РЭ, 9.6*) На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте?

$39\ldots998$ (223 девятки)

1.11. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 9.1*) По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N, $N \geqslant 2$. При этом для любой пары соседних чисел имеется хотя бы одна цифра, встречающаяся в десятичной записи каждого из них. Найдите наименьшее возможное значение N.

1.12. (*Всеросс., 2010, РЭ, 9.3, 10.2*) Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

1.13. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.2*) Стозначное число n назовём *необычным*, если десятичная запись числа n^3 заканчивается на n, а десятичная запись числа n^2 не заканчивается на n. Докажите, что существует не менее двух стозначных необычных чисел.

1.14. (*Всеросс., 2013, ЗЭ, 10.5*) Существует ли такое натуральное n, что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$? (Здесь через $\overline{x \ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, …, y.)

1.15. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 11.1*) Найдите все натуральные числа n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n.

1.16. (*Всеросс., 2013, РЭ, 11.1*) Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске?

1.17. (*Всеросс., 1996, ЗЭ, 11.1*) Может ли число, получаемое выписыванием в строку друг за другом целых чисел от 1 до n ($n > 1$), одинаково читаться слева направо и справа налево?

1.18. (*Всеросс., 2004, ЗЭ, 10.8*) Существует ли такое натуральное число $n > 10^{1000}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставить две различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось?

1.19. (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 10.4*) Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k. Натуральное число a назовём *n-хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел a_0, a_1, …, a_n, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального n существует натуральное число, являющееся n-хорошим, но не являющееся $(n+1)$-хорошим?

2 Московская математическая олимпиада

2.1. (*ММО, 2012, 8.1*) На доске написаны четыре трёхзначных числа, в сумме дающие 2012. Для записи их всех были использованы только две различные цифры. Приведите пример таких чисел.

2.2. (*ММО, 2008, 8.1*) Верно ли, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа?

2.3. (*ММО, 1994, 8.2*) Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

2.4. (*ММО, 2003, 8.2*) Придумайте десятизначное число, в записи которого нет нулей, такое, что при прибавлении к нему произведения его цифр получается число с таким же произведением цифр.

2.5. (*ММО, 2015, 9.1*) Существует ли такое натуральное число n, что числа n, n^2, n^3 начинаются на одну и ту же цифру, отличную от единицы?

2.6. (*ММО, 2017, 9.1*) Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру.

2.7. (*ММО, 2016, 9.5*) Существует ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

2.8. (*ММО, 2018, 10.1*) Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2018»?

2.9. (*ММО, 1994, 10.1*) Ученик не заметил знака умножения между двумя семизначными числами и написал одно четырнадцатизначное число, которое оказалось в три раза больше их произведения. Найдите эти числа.

2.10. (*ММО, 2012, 11.1*) К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

2.11. (*ММО, 2016, 11.1*) Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

2.12. (*ММО, 2017, 11.1*) Найдите наименьшее натуральное число, кратное 80, в котором можно так переставить две его различные цифры, что получившееся число также будет кратно 80.

2.13. (*ММО, 2004, 11.2*) Докажите, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d.

2.14. (*ММО, 2014, 11.3*) Докажите, что для любого натурального n найдется натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается n единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из n единиц и двоек.

2.15. (*ММО, 2014, 11.4*) Саша обнаружил, что на калькуляторе осталось ровно n исправных кнопок с цифрами. Оказалось, что любое натуральное число от 1 до 99999999 можно либо набрать, используя лишь исправные кнопки, либо получить как сумму двух натуральных чисел, каждое из которых можно набрать, используя лишь исправные кнопки. Каково наименьшее n, при котором это возможно?

2.16. (*ММО, 2005, 11.5*) К некоторому натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трех исходных чисел. Найдите все возможные тройки исходных чисел.

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2019.1*) Операция *удвоения цифры* натурального числа состоит в умножении этой цифры на 2 (если это произведение оказывается двузначным, то цифра в следующем разряде числа увеличивается на 1, как при сложении «в столбик»). Например из числа 9817 удвоениями цифр 7, 1, 8 и 9 можно получить числа 9824, 9827, 10617 и 18817 соответственно. Можно ли из числа $22\ldots22$ (20 двоек) несколькими такими операциями получить число $22\ldots22$ (21 двойка)?

3.2. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2018.6*) На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте?

$\boxed{39\ldots998 \text{ (223 девятки)}}$

3.3. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2011.5*) 100 идущих подряд натуральных чисел отсортировали по возрастанию суммы цифр, а числа с одинаковой суммой цифр — просто по возрастанию. Могли ли числа 2010 и 2011 оказаться рядом?

3.4. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2016.4*) Даны $2n$-значное натуральное число a и натуральное число k. Числа a и ka записали на ленте и каждую из двух записей разрезали на двузначные числа, начиная с последних цифр (при этом числа 00, 01, …, 09 здесь тоже считаются двузначными; если в числе ka оказалось нечётное количество цифр, к нему спереди приписали 0). Оказалось, что у числа a полученные двузначные числа строго убывают справа налево (от младших разрядов числа a к старшим), а у числа ka — строго возрастают. Докажите, что $k \geqslant n$.

3.5. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2009.8*) На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$-ом месте?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2016, 8–9.1*) Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

4.2. (*Турнир городов, 2017, 8–9.1*) Взяли пять натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?

4.3. (*Турнир городов, 2016, 8–11.1*) На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до 1000000 включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.

4.4. (*Турнир городов, 2015, 8–9.3, 10–11.1*) а) Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?

б) Тот же вопрос для натуральных чисел x, x^2, x^3, $\ldots$, x^{2015}.

а) Нет; б) нет

4.5. (*Турнир городов, 1981, 9–10.2*) Доказать, что любое действительное положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичная запись (каждого из) которых состоит из цифр 0 и 7.

4.6. (*Турнир городов, 2016, 8–9.5*) Пусть p — простое число, большее 10^k. Взяли число, кратное p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, кратное p. В него вставили k-значное число B — между двумя соседними цифрами числа A, — и результат снова оказался кратным p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр.

4.7. (*Турнир городов, 2015, 8–9.6*) Назовем натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

4.8. (*Турнир городов, 2012, 10–11.4*) Натуральные числа $a < b < c$ таковы, что $b + a$ делится на $b - a$, а $c + b$ делится на $c - b$. Число a записывается 2011 цифрами, а число b — 2012 цифрами. Сколько цифр в числе c?

2012

5 «Ломоносов»

5.1. (*«Ломоносов», 2017, 5–6.4, 7–8.3*) Найдите двузначное число, цифры которого различны и квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

5.2. (*«Ломоносов», 2018, 5–6.4; 7–8.3; 9.1*) Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3+1 = 2+2 = 1+3 = 4$ и $5+4 = 4+5 = 9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

5.3. (*«Ломоносов», 2011, 7–8.3*) Вычислите:

$$(4 \cdot 10^{2011} - 1) : \left(4 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{2011} + 1\right).$$

3

5.4. (*«Ломоносов», 2013, 7–9.6*) Найдите сумму цифр числа $\underbrace{4\ldots4}_{2012}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2012}$.

18108

5.5. (*«Ломоносов», 2016, 9.3*) Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{LOM}$, состоящие из различных цифр L, O и M, для которых выполняется равенство:

$$\overline{LOM} = (L+O+M)^2 + L + O + M.$$

156

5.6. (*«Ломоносов», 2012, 8.6*) Два различных двузначных числа таковы, что одно получается из другого перестановкой цифр. Если между цифрами каждого из них вписать по 2012 троек, то от этого их отношение не изменится. Найдите все возможные пары таких чисел.

12 и 21

5.7. (*«Ломоносов», 2012, 8–9.4*) На доске написано трёхзначное число, все цифры которого отличны от нуля. Учитель стёр его левую цифру и приписал её к оставшемуся двузначному числу справа. Ученик заметил, что новое трёхзначное число оказалось на 18 меньше, чем исходное. На какую величину может измениться новое число, если учитель проделает с ним те же действия? Найдите все возможные значения этой величины.

180

5.8. (*«Ломоносов», 2011, 9.6*) Найдите все трёхзначные числа, которые в пять раз больше произведения своих цифр.

175

6 «Покори Воробьёвы горы!»

6.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.5, 7–8.4, 9.3*) Подряд выписали квадраты чисел от 1 до некоторого натурального числа N: $1491625\ldots N^2$, так, что получилось 1428-значное число. Найдите N.

314

6.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.6, 7–8.7, 9.6*) Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{\text{ПВГ}}$, состоящие из различных цифр П, В и Г, для которых выполняется равенство

$$\overline{\text{ПВГ}} = (\text{П}+\text{В}+\text{Г})(\text{П}+\text{В}+\text{Г}+1).$$

6.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.4, 9.5*) Найдите все четырёхзначные числа, которые на 7182 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

6.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8.1*) Некоторое четырёхзначное число сложили с числом, записываемым теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили 4983. Какие числа складывали?

6.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.7; 9.6*) Найдите наименьшее натуральное N такое, что десятичная запись числа $999N$ состоит из одних семёрок.

6.6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.7; 9.6*) Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся на цифру 2, которое удваивается, если переставить эту цифру в начало.

6.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.3*) Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее 2015, такое, что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.

6.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.7*) Найдите сумму цифр числа $\left(\underbrace{4\ldots4}_{2014}-\underbrace{8\ldots8}_{1007}\right)^{\frac{1}{2}}$ (если оно не целое, то в ответ впишите 0).

$\boxed{6042}$

6.9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3*) Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 57 больше произведения тех же цифр.

$\boxed{264}$

6.10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.1*) Для некоторого натурального k десятичная запись числа $k^2 + 2k - 8$ заканчивается цифрой 6. Найдите все значения, которые может принимать предпоследняя цифра этой записи.

$\boxed{1}$

7 «Физтех»

7.1. (*«Физтех», 2012, 9–10.2, 11.1*) Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 540.

$\boxed{2569}$

7.2. (*«Физтех», 2012, 11*) Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, $123456 \to 612345$), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[618222; 618252]$ могли получиться в результате вычитания?

$\boxed{618228,\ 618237,\ 618246}$

7.3. (*«Физтех», 2012, 11*) Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, $456789 \to 945678$), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[375355; 375380]$ могли получиться в результате сложения?

$\boxed{375364,\ 375375}$

8 «Курчатов»

8.1. (*«Курчатов», 2016, 8.3, 9.2*) Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016…2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух палиндромов.

8.2. (*«Курчатов», 2016, 11.4*) Назовем натуральное число *модным*, если в его записи встречается группа цифр 2016 (например, числа 32016, 1120165 модны, а 3, 216, 20516 — нет). Докажите, что всякое натуральное число можно получить как частное от деления модного числа на модное.

9 ОММО

9.1. (*ОММО, 2015.3*) Четырёхзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна N. Оказалось, что число N делится на 100. Найдите N.

$\boxed{11000}$