Производная

Содержание

Понятие производной занимает уникальное положение в школьной программе. С одной стороны, производная активно используется: с её помощью исследуются функции и строятся графики, ищутся наибольшие и наименьшие значения функций; школьникам надо уметь решать задачи на геометрический и физический смысл производной. С другой стороны, строгое определение производной вообще не даётся!

В результате получается, что школьники зазубривают таблицу производных и правила дифференцирования, умеют *механически* выполнять некоторые действия и решать типовые задачи, но при этом совершенно не понимают сути того, что они делают. А за отсутствие понимания приходится расплачиваться в вузе: двойки и пересдачи в первую же сессию.

Цель данной статьи — максимально доходчиво рассказать о производной. Доступность изложения будет преобладать над технической строгостью. Хочется надеяться, что идеи, изложенные в этой статье, помогут вам понять происходящее и подготовят к адекватному восприятию вузовских курсов математического анализа и общей физики.

1 Производная в математике

Строгое математическое определение производной опирается на понятие предела, которое в школе не проходят. Но определение предела нам сейчас и незачем. Самое главное — уловить основную идею, которая лежит в основе понятия предела.

1.1 Предел

Рассмотрим последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Изобразим члены данной последовательности на числовой оси (рис. 1).

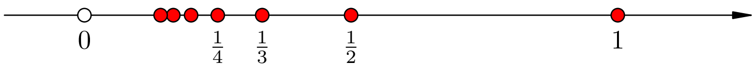

Рис. 1. Последовательность чисел $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Мы видим, что наши числа неограниченно приближаются к нулю (но никогда его не достигают). Начиная с $n = 10$ все члены последовательности окажутся на расстоянии не более $1/10$ от нуля; начиная с $n = 100$ все они будут на расстоянии не более $1/100$ от нуля; начиная с $n = 1000$ все они будут на расстоянии не более $1/1000$ от нуля и т. д.

Говорят, что последовательность $1/n$ *стремится к нулю*, или *сходится к нулю*, или что *предел* этой последовательности равен нулю. Записывают это так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Образно говоря, наша последовательность «втекает» в точку 0. Понятие предела как раз и отражает факт этого «втекания».

Точно так же последовательность

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

будет «втекать» в точку 3. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3.$$

Подчеркнём, что «втекание последовательности в точку a» означает, что вблизи числа a находятся *все* члены данной последовательности, начиная с некоторого номера. Более точно, смысл выражения «предел последовательности a_n равен a» таков: какое бы расстояние ε мы наперёд ни задали, *все* числа a_n, начиная с некоторого номера, будут находиться от числа a на расстоянии меньше ε.

Например, закопеременная последовательность $1, -1, 1, -1, \ldots$ не имеет предела: она не «втекает» ни в какую точку. Почему, например, число 1 не является пределом данной последовательности? Потому что найдётся бесконечно много членов последовательности (а именно, все члены с чётными номерами, равные -1), удалённых от точки 1 на расстояние 2. Иными словами, не найдётся такого номера, начиная с которого все члены данной последовательности окажутся достаточно близко к точке 1.

Можно говорить не только о пределе последовательности, но и о пределе функции. Напомним, что функция $y = f(x)$ — это некоторое правило, которое позволяет для любого допустимого числа x получить единственное соответствующее ему число y. При этом число x называется *аргументом* функции, а число y — *значением* функции.

Нас будет интересовать понятие предела функции в точке. Оно формализует ту же самую идею «втекания». Только на сей раз график функции $y = f(x)$ будет «втекать» в некоторую точку координатной плоскости, когда аргумент x стремится к некоторому значению.

Так, на рис. 2 вы видите хорошо известную параболу — график функции $y = x^2$. Возьмём значение $x = 2$ и отметим на графике соответствующую точку $A(2, 4)$.

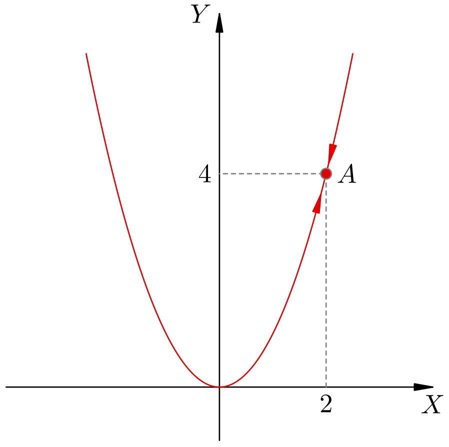

Рис. 2. График функции $y = x^2$

Представим себе, что x приближается к 2 (справа или слева — неважно). При этом график «втекает» в точку A, что и показано на рисунке стрелками. Иными словами, значение функции стремится к 4, и данный факт записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4. \tag{1}$$

«А что тут такого особенного? — скажете вы. — Ясно же, что если x стремится к 2, то x^2 стремится к $2^2 = 4$. Зачем огород городить, говоря о каких-то пределах?»

Здесь не всё так просто. Взгляните на рис. 3.

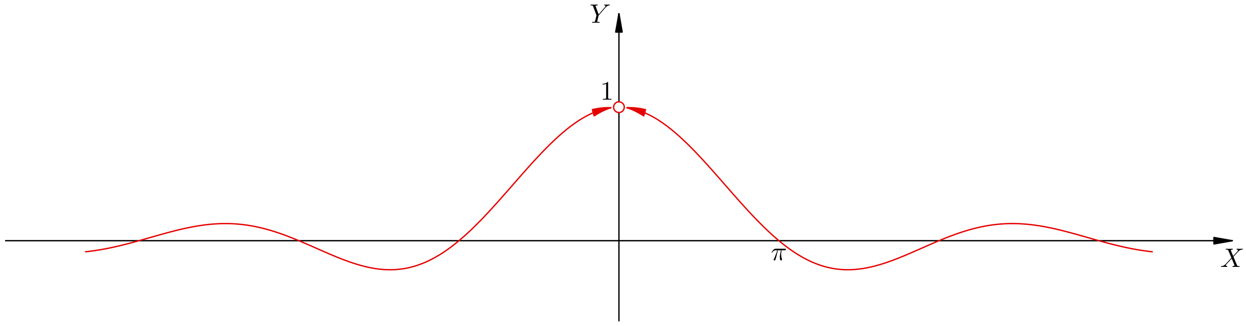

Рис. 3. График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$

Перед вами график функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,.$$

И вот что интересно: значение функции при $x = 0$ не определено (при попытке вычислить $f(0)$ мы получаем нуль в знаменателе), но при этом график «втекает» в точку $(0, 1)$. То есть, хотя $f(0)$ не существует, тем не менее при $x \to 0$ значение функции стремится к числу 1. Иными словами, существует предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2}$$

Он называется *первым замечательным пределом.*

Вы легко можете убедиться в справедливости формулы (2), взяв в руки калькулятор. Переведите его в режим «радианы» и вычислите:

$$\frac{\sin 0{,}1}{0{,}1}, \quad \frac{\sin 0{,}01}{0{,}01}, \quad \frac{\sin 0{,}001}{0{,}001}, \quad \ldots$$

Вы увидите, что значение дроби становится всё ближе и ближе к единице.

1.2 Непрерывность функции

На примере пределов (1) и (2) мы наблюдаем две принципиально разные ситуации. В случае предела (1) можно просто подставить предельное значение «икса», равное 2, в функцию $f(x) = x^2$ и получить: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$. А вот в случае предела (2) такое не проходит — предельное значение 0 нельзя подставить в функцию $f(x) = \sin x/x$ (что, однако, не мешает пределу данной функции существовать).

Если предельное значение a аргумента x можно подставить в функцию $f(x)$ и при этом будет выполнено равенство

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \tag{3}$$

то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a. В противном случае функция *разрывна* в точке a.

Так, функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$ (как и в любой другой точке). График этой функции — непрерывная линия, которая вычерчивается без отрыва ручки от бумаги.

А функция $f(x) = \sin x/x$ разрывна в точке $x = 0$. Это проявляется в том, что точка $(0, 1)$ выколота из графика функции.

Упражнение. Постройте график функции:

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Уяснив, что такое предел, мы теперь обсудим важнейшее физическое понятие *мгновенной скорости.* Оно вплотную подведёт нас к определению производной.

1.3 Мгновенная скорость

Спидометр автомобиля показывает 60 км/ч. Что это значит? Ответ простой: если автомобиль будет ехать так в течение часа, то он проедет 60 км.

Допустим, однако, что автомобиль вовсе не собирается ехать так целый час. Например, водитель разгоняет автомобиль с места, давит на газ, в какой-то момент бросает взгляд на спидометр и видит стрелку на отметке 60 км/ч. В следующий момент стрелка уползёт ещё выше. Как же понимать, что *в данный момент времени* скорость равна 60 км/ч?

Давайте выясним это на примере. Предположим, что путь s, пройденный автомобилем, зависит от времени t следующим образом:

$$s(t) = t^2,$$

где путь измеряется в метрах, а время — в секундах. То есть, при $t = 0$ путь равен нулю, к моменту времени $t = 1$ пройденный путь равен $s(1) = 1$, к моменту времени $t = 2$ путь равен $s(2) = 4$, к моменту времени $t = 3$ путь равен $s(3) = 9$, и так далее.

Видно, что идёт разгон — автомобиль набирает скорость с течением времени. Действительно: за первую секунду пройдено расстояние 1; за вторую секунду пройдено расстояние $s(2) - s(1) = 3$; за третью секунду пройдено расстояние $s(3) - s(2) = 5$, и далее по нарастающей.

А теперь вопрос. Пусть, например, через три секунды после начала движения наш водитель взглянул на спидометр. Что покажет стрелка? Иными словами, какова *мгновенная* скорость автомобиля в момент времени $t = 3$?

Просто поделить путь на время не получится: привычная формула $v = s/t$ работает только для *равномерного* движения (то есть когда стрелка спидометра застыла в некотором фиксированном положении). Но именно эта формула лежит в основе способа, позволяющего найти мгновенную скорость.

Идея способа такова. Отсчитаем от нашего момента $t = 3$ небольшой промежуток времени Δt, найдём путь Δs, пройденный автомобилем за этот промежуток, и поделим Δs на Δt. *Чем меньше будет* Δt*, тем точнее мы приблизимся к искомой величине мгновенной скорости.*

Давайте посмотрим, как эта идея реализуется. Возьмём для начала $\Delta t = 1$. Тогда

$$\Delta s = s(4) - s(3) = 4^2 - 3^2 = 7,$$

и для скорости получаем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7}{1} = 7 \tag{4}$$

(скорость, разумеется, измеряется в м/с).

Будем уменьшать промежуток Δt. Берём $\Delta t = 0{,}1$:

$$\Delta s = s(3{,}1) - s(3) = 3{,}1^2 - 3^2 = 0{,}61,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}61}{0{,}1} = 6{,}1. \tag{5}$$

Теперь берём $\Delta t = 0{,}01$:

$$\Delta s = s(3{,}01) - s(3) = 3{,}01^2 - 3^2 = 0{,}0601,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}0601}{0{,}01} = 6{,}01. \tag{6}$$

Ну и возьмём ещё $\Delta t = 0{,}001$:

$$\Delta s = s(3{,}001) - s(3) = 3{,}001^2 - 3^2 = 0{,}006001,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}006001}{0{,}001} = 6{,}001. \tag{7}$$

Глядя на значения (4)–(7), мы понимаем, что величина $\Delta s/\Delta t$ приближается к числу 6. Это означает, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени $t = 3$ составляет 6 м/с.

Таким образом, при безграничном уменьшении Δt путь Δs также стремится к нулю, но отношение $\Delta s/\Delta t$ стремится к некоторому пределу v, который и называется *мгновенной скоростью* в данный момент времени t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,. \tag{8}$$

Можно написать и так:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}\,. \tag{9}$$

Давайте вернёмся к нашему примеру с $s(t) = t^2$ и проделаем в общем виде те выкладки, которые выше были выполнены с числами. Итак:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = (t + \Delta t)^2 - t^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2 = \Delta t(2t + \Delta t),$$

и для мгновенной скорости имеем:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t. \tag{10}$$

В частности, при $t = 3$ формула (10) даёт: $v(3) = 2 \cdot 3 = 6$, как и было получено выше.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми предварительными сведениями и полностью готовы перейти к обсуждению производной.

1.4 Определение производной

Скорость бывает не только у автомобиля. Мы можем говорить о скорости изменения чего угодно — например, физической величины или экономического показателя. Производная как раз и служит обобщением понятия мгновенной скорости на случай абстрактных математических функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Напомним, что x называется *аргументом* данной функции. Отметим на оси X некоторое значение аргумента x, а на оси Y — соответствующее значение функции $f(x)$ (рис. 4).

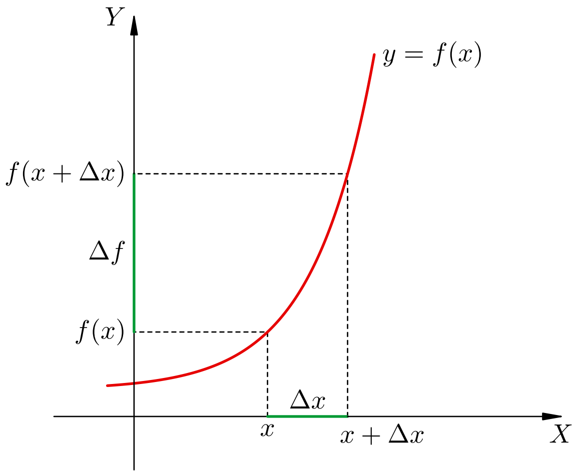

Рис. 4. Приращение аргумента и приращение функции

Дадим аргументу x некоторое *приращение*, обозначаемое Δx. Попадём в точку $x + \Delta x$. Обозначим её на рисунке вместе с соответствующим значением функции $f(x + \Delta x)$.

Величина

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{11}$$

называется *приращением функции*, которое отвечает данному приращению аргумента Δx.

Вы видите сходство с предыдущим пунктом? Приращение аргумента Δx есть абстрактный аналог промежутка времени Δt, а соответствующее приращение функции Δf — это аналог пути Δs, пройденного за время Δt. Но на этом аналогия не заканчивается. Производная — это в точности аналог мгновенной скорости.

Определение. Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,. \tag{12}$$

Сравните с формулами (8) и (9). По сути написано одно и то же, не правда ли? Можно сказать, что производная — это мгновенная скорость изменения функции.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием*. Нам предстоит научиться дифференцировать различные функции. Прежде всего мы возьмём несколько простых функций и найдём их производные непосредственно по определению, то есть с помощью формулы (12).

1.5 Табличные производные

Начнём с функции, которая является константой: $f(x) = c$. Приращение этой функции равно нулю:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Соответственно, обращается в нуль и производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Итак, имеем первый результат — *производная константы равна нулю*:

$$\boxed{c' = 0.}$$

Теперь будем дифференцировать степенную функцию, то есть функцию вида $f(x) = x^a$. Найдём производную самой простой такой функции $f(x) = x$. Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Итак,

$$x' = 1.$$

Перейдём к функции $f(x) = x^2$. Это абстрактный аналог рассмотренной выше физической ситуации с $s(t) = t^2$, в которой мы искали мгновенную скорость. Нам остаётся лишь повторить (в других обозначениях) те вычисления, которые привели нас к формуле (10).

Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом,

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

Проделаем то же самое с функцией $f(x) = x^3$. Приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2). \end{aligned}$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Итак,

$$\left(x^3\right)' = 3x^2.$$

Точно так же можно показать, что:

$$\begin{aligned}\left(x^4\right)' &= 4x^3,\\ \left(x^5\right)' &= 5x^4,\\ &\dots\\ \left(x^n\right)' &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Оказывается, последняя формула справедлива не только для целого n, но и вообще для любого показателя степени a:

$$\boxed{(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}.} \tag{13}$$

Мы докажем эту формулу позже, а сейчас найдём с её помощью производную функции $f(x) = \sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Эта производная встречается очень часто, и её имеет смысл выучить. Запомнить можно так: «производная корня есть один делить на два корня».

Упражнение. Покажите, что:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Сделайте это двумя способами: а) по определению производной (вычислив предел); б) с помощью формулы (13).

Перейдём к тригонометрическим функциям. Вычислим производную функции $f(x) = \sin x$. Приращение функции:

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Вспомним, как разность синусов превращается в произведение:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),\\ f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\,.\end{aligned}$$

Перепишем выражение для производной немного иначе:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \tag{14}$$

Под знаком предела в (14) стоит произведение двух выражений — дроби и косинуса. Оказывается, что каждое из этих выражений стремится к некоторому пределу.

Начнём с дроби. Сделаем замену $t = \Delta x/2$. Ясно, что $t \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

(мы использовали соотношение (2) — первый замечательный предел). Итак, дробь стремится к единице.

Выражение $x + \frac{\Delta x}{2}$, стоящее под знаком косинуса, при $\Delta x \to 0$ стремится к x. Как вы знаете, косинус — непрерывная функция (график косинуса вычерчивается без отрыва ручки от бумаги). Поэтому, согласно определению (3) непрерывной функции, для нахождения предела косинуса можно просто положить в аргументе косинуса $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x. \tag{15}$$

Тогда из (14) получаем[1]

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Итак,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

Упражнение. Покажите, что

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$$

Используйте для этого формулу разности косинусов:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

Четыре производных в рамочке (константа, степенная функция, синус и косинус) называются *табличными*. Теперь вы понимаете, откуда они взялись. Разумеется, табличные производные нужно твёрдо знать.

Вычисления производной по определению (то есть как предела) легко проходят для функций, устроенных наиболее просто. А как быть, если нужно продифференцировать функцию наподобие такой: $f(x) = x^7 \sin\sqrt[3]{4x^2 - 5x}$? Здесь вычислять предел (12) — занятие не из приятных. В подобных случаях на помощь приходят *правила дифференцирования*, которые позволяют сконструировать производную данной функции из производных более простых функций.

Но для обоснования правил дифференцирования нам нужно предварительно разобраться с одним теоретическим вопросом.

1.6 Связь непрерывности и дифференцируемости

Как вы помните, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если предел $f(x)$ в точке a равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Попросту говоря, непрерывная в данной точке функция стремится к своему значению в этой точке.

Можно написать и немного по-другому: функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) = f(a). \tag{16}$$

Это ведь то же самое, не правда ли? Если $\Delta x \to 0$, то аргумент $a + \Delta x$ стремится к a, и значение функции в точке $a + \Delta x$ стремится к значению функции в точке a. Именно этими соображениями мы воспользовались выше при рассмотрении предела косинуса (15).

Выражение (16) позволяет нам дать ещё одно равносильное определение непрерывности. Ведь если $f(a + \Delta x)$ стремится к $f(a)$, то разность $f(a + \Delta x) - f(a)$ стремится к нулю. А что такое $f(a + \Delta x) - f(a)$? Это приращение Δf функции $f(x)$ в точке a. В результате получаем:

[1] Вообще, если одно выражение стремится к числу a, а другое — к числу b, то произведение этих выражений стремится к ab. При всей своей очевидности данное утверждение является теоремой, которую вы будете доказывать на первом курсе.

функция $f(x)$ непрерывна в данной точке, если её приращение в этой точке стремится к нулю при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0. \tag{17}$$

Идём дальше. Функция называется *дифференцируемой* в данной точке, если она имеет производную в этой точке (то есть предел (12) в данной точке x существует).

Может ли непрерывная функция не быть дифференцируемой? Да, такое возможно. Классический пример: функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. График этой функции изображён на рис. 5.

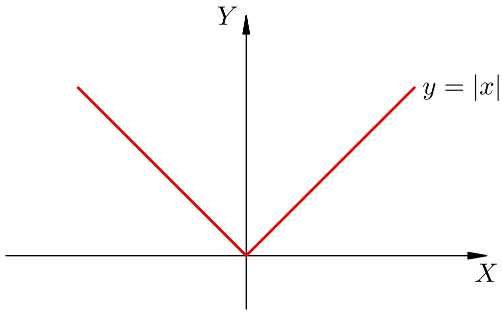

Рис. 5. График функции $y = |x|$

Приращение функции:

$$\Delta f = |x + \Delta x| - |x|.$$

В точке $x = 0$ имеем:

$$\Delta f = |\Delta x|.$$

Почему производная в нуле не существует? Давайте рассмотрим два случая: Δx стремится к нулю сначала со стороны положительных чисел (то есть справа), а затем со стороны отрицательных чисел (то есть слева).

1. $\Delta x \to 0$, $x > 0$. Тогда $\Delta f = \Delta x$, то есть
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.$$
2. $\Delta x \to 0$, $x < 0$. Тогда $\Delta f = -\Delta x$, то есть
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -1.$$

В результате получается, что отношение $\Delta f / \Delta x$ ни к какому пределу не стремится. В самом деле, устремим Δx к нулю так, чтобы знак Δx попеременно менялся (например, Δx пробегает значения $1; -0{,}1; 0{,}01; -0{,}001; \ldots$). Тогда дробь $\Delta f / \Delta x$ будет попеременно принимать значения 1 и -1, а такая знакочередующаяся последовательность, как мы видели выше, предела не имеет. Следовательно, функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Таким образом, *непрерывная функция не обязана быть дифференцируемой*. Точка излома графика функции — типичный пример точки, в которой функция не является дифференцируемой. Именно такой точкой излома служит точка $(0, 0)$ на графике функции $y = |x|$.

А как насчёт обратного утверждения? Оказывается, дифференцируемость — более сильное свойство, чем непрерывность. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x. Тогда отношение $\Delta f / \Delta x$ стремится к некоторому числу при $\Delta x \to 0$. Но Δx стоит в знаменателе этого отношения; поэтому для существования предела *необходимо*, чтобы и числитель стремился к нулю. (А куда деваться числителю? Ведь если при знаменателе, стремящемся к нулю, числитель к нулю не стремится, то дробь уйдёт в бесконечность — вместо того, чтобы приближаться к какому-то фиксированному значению.) Стало быть, $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$; но это и означает согласно (17) непрерывность функции в точке x.

1.7 Правила дифференцирования

Как мы уже сказали, правила дифференцирования позволяют находить производные функций достаточно сложного вида. Идея состоит в «расщеплении» исходной функции на более простые функции, производные которых известны и играют роль «кирпичиков» при конструировании искомой производной. Зная небольшое число табличных производных и располагая правилами дифференцирования, мы можем вычислять производные огромного количества функций, не прибегая к определению производной и не вычисляя соответствующий предел (12).

Везде далее u и v — функции, дифференцируемые в данной точке. Мы будем активно пользоваться соотношениями:

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u, \quad v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v,$$

где Δu и Δv — приращения функций u и v в точке x. Эти соотношения непосредственно следуют из определения (11) приращения функции.

Всего имеется пять правил дифференцирования.

0. Константа выносится за знак производной. Если c — число, то $(cu)' = cu'$.

Данное правило легко получается в качестве следствия правила 2 о дифференцировании произведения. Но применяется оно настолько часто, что мы сделали его «нулевым» правилом, обособленным от остальных.

Согласно этому правилу имеем, например:

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 10x,$$
$$(-3\sin x)' = -3(\sin x)' = -3\cos x.$$

1. Дифференцирование суммы. $(u+v)' = u' + v'$ (*производная суммы равна сумме производных*).

Действительно, пусть $f(x) = u(x) + v(x)$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) = \\ &= u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x) = \\ &= u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v.\end{aligned}$$

Теперь имеем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right).$$

Дроби $\Delta u/\Delta x$ и $\Delta v/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ стремятся соответственно к $u'(x)$ и $v'(x)$. Сумма этих дробей стремится к сумме[2] $u'(x) + v'(x)$:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Это и нужно было показать.

Так, применяя правила 0 и 1, находим:

$$(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x,$$
$$(x^3 + 4\cos x - 10)' = (x^3)' + (4\cos x)' + (-10)' = 3x^2 - 4\sin x$$

[2] Вообще, если одно выражение стремится к числу a, а другое — к числу b, то сумма этих выражений стремится к $a+b$. Это теорема, которую нужно доказывать.

(производная константы -10 равна нулю!).

2. Дифференцирование произведения. $(uv)' = u'v + uv'$.

Давайте разбираться, почему это так. Обозначаем $f(x) = u(x)v(x)$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x) = \\ &= u(x)v(x) + v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v - u(x)v(x) = \\ &= v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Далее имеем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right).$$

Первое слагаемое стремится к $u'(x)v(x)$. Второе слагаемое стремится к $u(x)v'(x)$. К чему стремится третье слагаемое $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$? Дробь $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ в пределе даёт число $u'(x)$, а множитель Δv стремится к нулю, поскольку функция $v(x)$ дифференцируема в точке x и потому непрерывна в этой точке. Так что третье слагаемое стремится к нулю. В результате получаем:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

в чём и хотелось убедиться.

Вот пример дифференцирования произведения:

$$(x^2\sin x)' = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x.$$

А вот как получается правило 0:

$$(cu)' = c'u + cu' = cu',$$

поскольку $c' = 0$.

3. Дифференцирование частного.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Выведем эту формулу. Обозначим

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)(v(x)+\Delta v)}, \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)(v(x)+\Delta v)}, \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)(v(x)+\Delta v)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.\end{aligned}$$

Слагаемое Δv в знаменателе обратилось в нуль при переходе к пределу вследствие непрерывности функции $v(x)$.

Правило дифференцирования частного позволяет найти производные тангенса и котангенса, которые также относятся к табличным.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,,$$

то есть

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.}$$

Проделайте самостоятельно аналогичные вычисления и покажите, что

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.}$$

Нам осталось обсудить последнее правило — дифференцирование сложной функции. Мы сначала объясним, что такое сложная функция, затем продемонстрируем правило дифференцирования на примерах, и только потом — когда станет ясно, как оно работает — сформулируем и докажем это правило.

Пусть, например, $u(x) = \sin x$ и $v(x) = \sqrt{x}$. Давайте сначала извлекать корень из x (то есть применять к x функцию v), а потом брать синус полученного числа (то есть действовать на полученное число $v(x)$ функцией u). Тогда возникает функция:

$$u(v(x)) = \sin\sqrt{x}.$$

Это и есть *сложная* функция, или *композиция* функций u и v. Идея понятна: число x поступает на вход *первой* функции v, а полученное число $v(x)$ поступает на вход *второй* функции u.

Можно, наоборот, сделать u первой функцией, а v — второй. Тогда сначала от x будет вычисляться синус, а потом из синуса извлекаться корень. Получится другая сложная функция:

$$v(u(x)) = \sqrt{\sin x}.$$

Дифференцирование сложной функции — это как снятие листов с кочана капусты. Сначала находим производную второй («внешней») функции и умножаем её на производную первой («внутренней») функции. Применительно к нашим примерам это выглядит так:

$$(\sin\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

$$(\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x.$$

Давайте приведём для наглядности ещё два примера:

$$[(4x^2+3x+2)^5]' = 5(4x^2+3x+2)^4\cdot(4x^2+3x+2)' = 5(4x^2+3x+2)^4\cdot(8x+3),$$

$$[A\sin(\omega x+\alpha)]' = A\cos(\omega x+\alpha)\cdot(\omega x+\alpha)' = A\omega\cos(\omega x+\alpha).$$

Понятно, как работает правило? Тогда — формулировка.

4. Дифференцирование сложной функции. $[u(v(x))]' = u'(v(x))v'(x)$.

Обозначим $f(x) = u(v(x))$. Имеем:

$$\Delta f = u(v(x+\Delta x)) - u(v(x)) = u(v(x)+\Delta v) - u(v(x)),$$

и тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(v(x)+\Delta v) - u(v(x))}{\Delta x} = \frac{u(v(x)+\Delta v) - u(v(x))}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}\,.$$

При $\Delta x \to 0$ имеем также $\Delta v \to 0$, поэтому

$$\frac{u(v(x)+\Delta v)-u(v(x))}{\Delta v} \to u'(v(x)).$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(v(x)+\Delta v)-u(v(x))}{\Delta v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(v(x))v'(x),$$

что и требовалось.

1.8 Геометрический смысл производной

Рассмотрим график возрастающей функции $y = f(x)$ (рис. 6) и возьмём две близкие точки графика: точку A с координатами $(x_0, f(x_0))$ и точку B с координатами $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Полагаем, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке A.

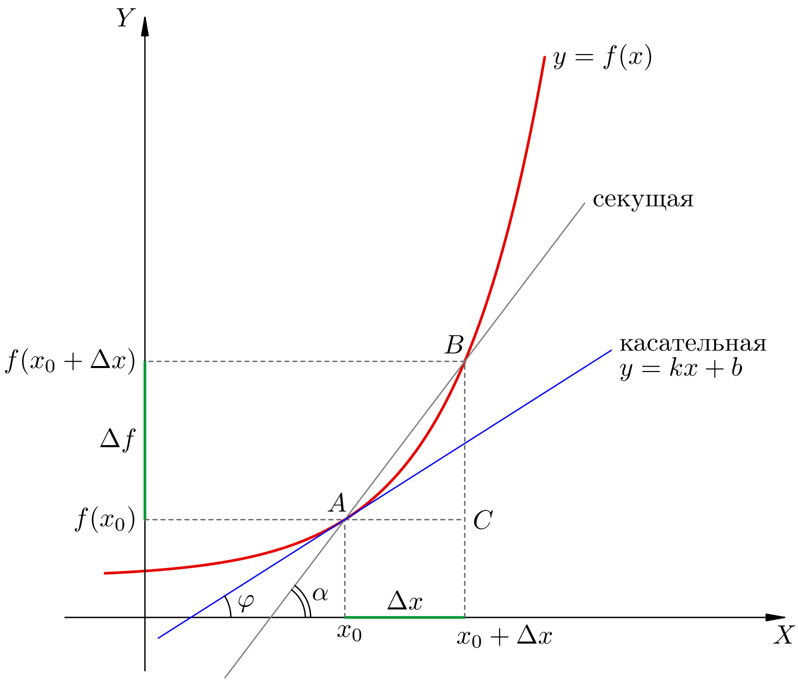

Рис. 6. Геометрический смысл производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k$

Прямая AB называется *секущей*. Угол наклона секущей AB к оси X обозначим α. Напомним, что угол наклона лежит в промежутке $[0, 180^\circ)$; в данном случае α является острым углом.

Прямые AC и BC параллельны осям X и Y соответственно. По рисунку легко видеть, что $\angle BAC = \alpha$, $AC = \Delta x$ и $BC = \Delta f$, так что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{18}$$

Теперь устремляем Δx к нулю. Отношение $\Delta f/\Delta x$ превращается в производную $f'(x_0)$. Что происходит при этом на рисунке? Точка B стремится к точке A, в результате чего секущая занимает предельное положение и становится *касательной* к графику функции в точке A.

Угол α наклона секущей переходит в угол φ наклона касательной, и, соответственно, $\operatorname{tg}\alpha$ переходит в $\operatorname{tg}\varphi$ (поскольку тангенс — непрерывная функция на своей области определения). Итак, имеем:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi. \tag{19}$$

Вспомним ещё, что тангенс угла наклона прямой — это её угловой коэффициент, то есть число k в уравнении прямой $y = kx + b$. Тем самым:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k. \tag{20}$$

Мы пришли к этому выводу, пользуясь графиком возрастающей функции. Что изменится, если функция $f(x)$ будет убывающей? Давайте посмотрим на рис. 7.

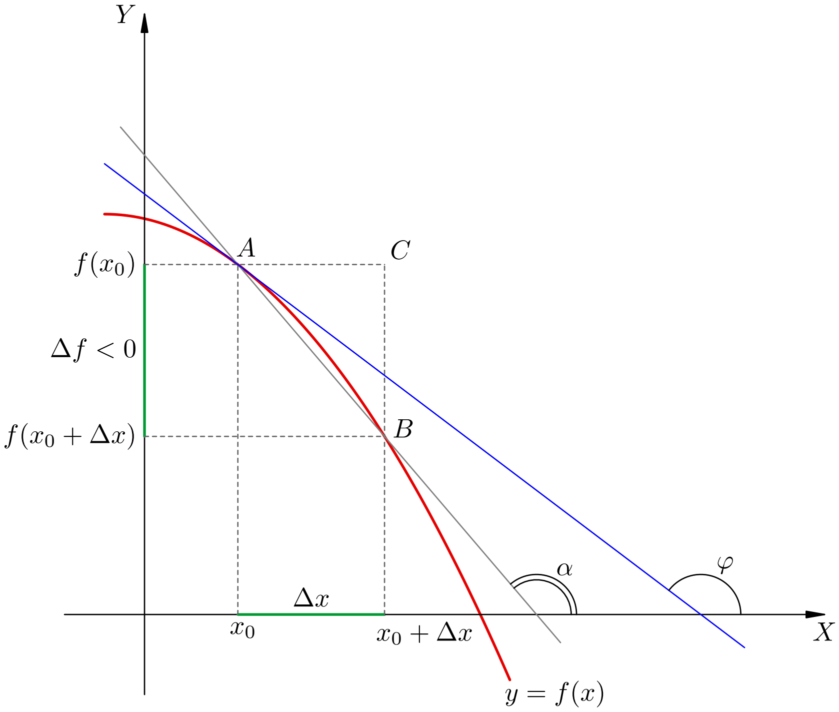

Рис. 7. И снова $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k$

Мы видим, что углы α и φ теперь являются тупыми, а приращение нашей функции отрицательно: $\Delta f = -BC$. Кроме того, $\angle BAC = 180^\circ - \alpha$, так что $\operatorname{tg}\angle BAC = -\operatorname{tg}\alpha$. Тогда:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{BC}{AC} = -\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}\alpha.$$

Получился тот же результат, что и выше в (18). Поэтому остаются в силе предельный переход (19) и вывод (20). Таким образом, имеем следующую геометрическую интерпретацию понятия производной.

Геометрический смысл производной. Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в точке с абсциссой x_0, или, что то же самое, угловому коэффициенту k этой касательной.

1.9 Уравнение касательной

Найдём уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$. По-прежнему считаем, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Уравнение касательной имеет вид $y = kx + b$, поэтому наша задача — найти k и b. Но k мы уже знаем — это производная функции в данной точке: $k = f'(x_0)$. Поэтому уравнение касательной уточняется:

$$y = f'(x_0)x + b, \tag{21}$$

и нам остаётся определить b.

Для этого заметим, что точка $(x_0, f(x_0))$ лежит на касательной, а значит — координаты этой точки удовлетворяют уравнению касательной. Подставляем эти координаты в (21):

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b,$$

откуда

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Остаётся подставить найденное выражение для b в (21):

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

или

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{22}$$

Уравнение (22) и есть искомое уравнение касательной.

В качестве примера найдём уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Имеем: $f(x_0) = 9$, $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 6$. Подставляем всё это в (22):

$$y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9.$$

Упражнение. К графику функции $y = 1/x$ проведена касательная. Покажите, что площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от координатного угла, не зависит от точки касания и равна 2.

1.10 Случаи недифференцируемости

Выше мы показали, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке. Стало быть, если функция разрывна в точке, то она и подавно не дифференцируема в данной точке.

Возможна также ситуация, когда функция непрерывна в точке, но не является дифференцируемой в этой точке. Пример также был приведён выше: функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Вообще, точки излома графика — это точки нарушения дифференцируемости. Например, у функции, график которой представлен на рис. 8, производная не существует в точках x_1 и x_2.

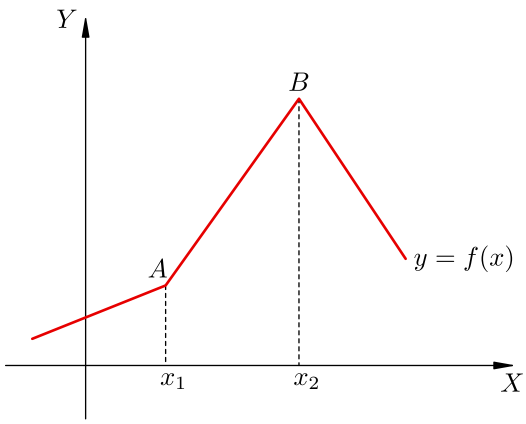

Рис. 8. Точки недифференцируемости

Геометрическая интерпретация производной позволяет нам лучше понять, чем «плохи» точки x_1 и x_2. Дело в том, что в соответствующих точках A и B не существует однозначного положения касательной (как предельного положения секущей). Понятие касательной в точках A и B попросту теряет смысл. Следовательно, мы не можем говорить об угле наклона касательной, о тангенсе этого угла и, соответственно, о производной в данных точках.

Физическая интерпретация производной (как мгновенной скорости изменения функции) также даёт объяснение недифференцируемости в точке излома. В самом деле, при переходе через точку излома скорость изменения функции скачком меняет своё значение. Слева от точки излома скорость одна, справа — совсем другая, так что в самой точке излома скорость изменения функции не имеет определённого значения.

Однако не следует думать, что непрерывная функция не дифференцируема только в точках излома, то есть там, где отсутствует касательная. Может случиться, что касательную к графику функции провести можно, но, тем не менее, производная функции в этой точке не существует. Соответствующий пример показан на рис. 9.

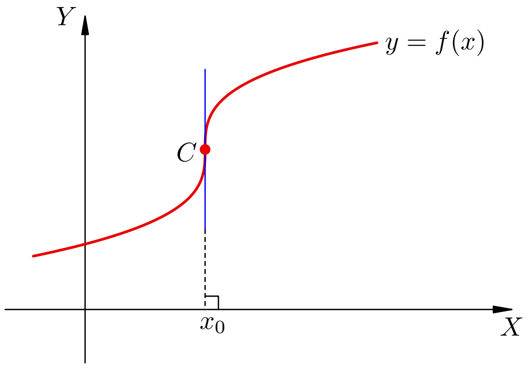

Рис. 9. Касательная есть, а производной нет

В точке C касательная имеется, но она *перпендикулярна* оси X. Угол наклона касательной $\varphi = 90°$, поэтому $\operatorname{tg}\varphi$ не существует. Следовательно, не существует и $f'(x_0)$.

В этом случае перестаёт быть справедливым и уравнение касательной (22), поскольку касательная на рис. 9 не имеет углового коэффициента. Уравнение данной касательной выглядит так: $x = x_0$.

Упражнение. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $(0, 0)$.

1.11 Исследование функций

Все функции, которые рассматриваются нами далее, считаются дифференцируемыми в нужных точках. Поэтому существование касательных подразумевается по умолчанию.

На рис. 10 изображён график функции $y = f(x)$ и проведены касательные в двух точках с абсциссами x_1 и x_2.

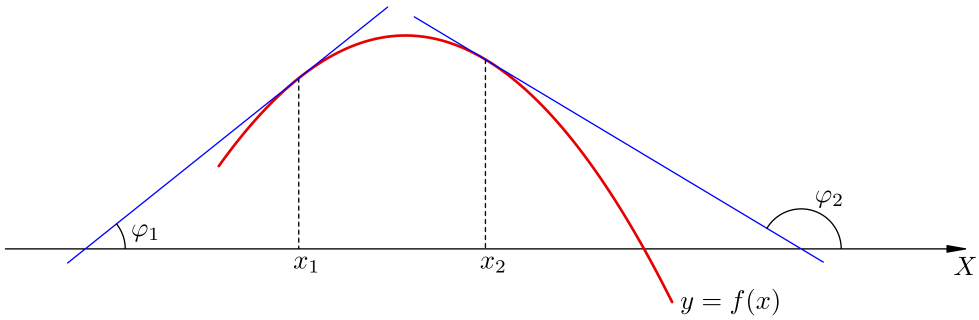

Рис. 10. Возрастание и убывание функции: $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$

Вблизи точки x_1 функция возрастает. Это приводит к тому, что касательная в точке x_1 наклонена под острым углом φ_1 к оси X. Тангенс острого угла положителен; значит, положительна и производная в точке x_1:

$$f'(x_1) = \operatorname{tg}\varphi_1 > 0.$$

Вблизи точки x_2 функция убывает. Вследствие этого касательная в точке x_2 образует тупой угол φ_2 с осью X. Тангенс тупого угла отрицателен, а вместе с ним отрицательна и производная в точке x_2:

$$f'(x_2) = \operatorname{tg}\varphi_2 < 0.$$

Справедливы также и обратные утверждения.

Признак возрастания функции. Если производная положительна на некотором промежутке, то функция возрастает на этом промежутке.

Признак убывания функции. Если производная отрицательна на некотором промежутке, то функция убывает на этом промежутке.

В самом деле, если скорость изменения количества ваших денег положительна, то денег у вас прибавляется. А вот если скорость наполнения кошелька отрицательна, то денег в нём становится меньше :-)

Наблюдение за знаком производной лежит в основе исследования функций. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Выясним, на каких промежутках эта функция возрастает, а на каких — убывает. Для этого находим её производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

Методом интервалов определяем знаки производной и отмечаем стрелками возрастание или убывание функции на каждом промежутке (рис. 11).

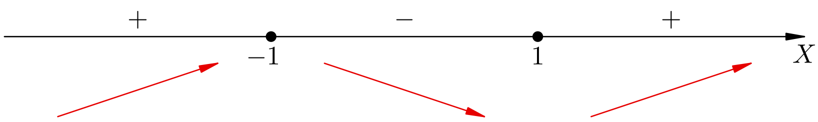

Рис. 11. Поведение функции $f(x) = x^3 - 3x$

Как видим, функция возрастает на промежутках $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ и убывает на промежутке $[-1, 1]$. Теперь поведение функции становится совершенно ясным. Мы можем найти значения функции в граничных точках промежутков возрастания и убывания: $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, и после этого построить график (рис. 12):

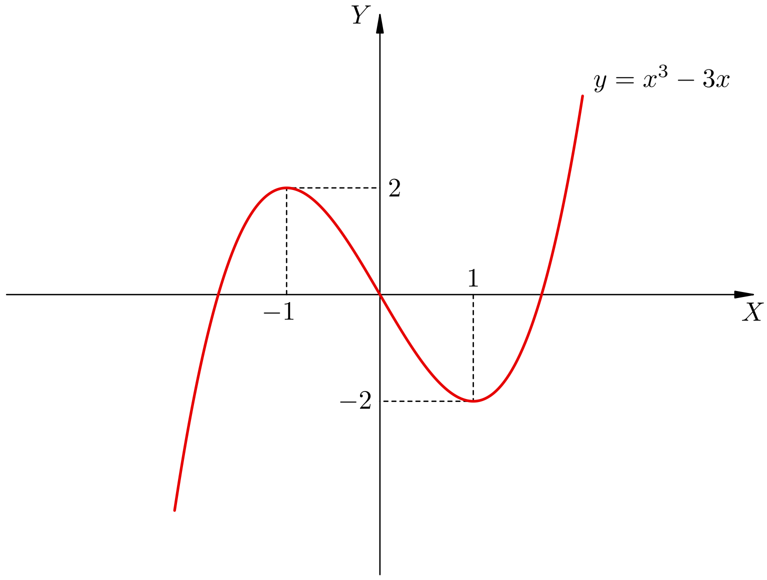

Рис. 12. График функции $f(x) = x^3 - 3x$

Чем интересны граничные точки -1 и 1 промежутков возрастания и убывания нашей функции? В этих точках *производная равна нулю*. Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются *стационарными точками* данной функции. Название понятно — в стационарной точке скорость изменения функции равна нулю, то есть функция «на мгновение» перестаёт меняться.

Стационарные точки могут быть трёх видов.

1. **Точка максимума**.

   На рис. 13 точка $x = a$ является точкой максимума функции $f(x)$: значение функции в точке a больше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

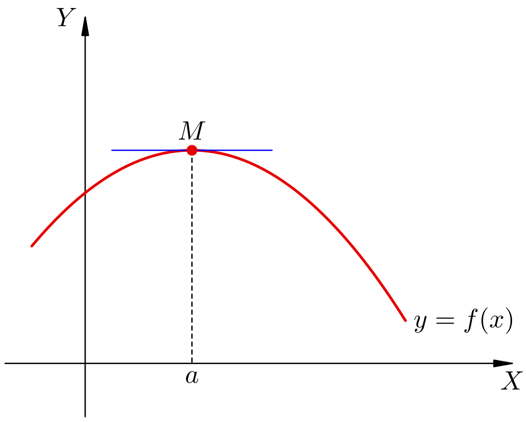

Рис. 13. Точка максимума

   Касательная в точке M горизонтальна, то есть образует нулевой угол с осью X. Поэтому $f'(a) = 0$.

   При переходе через точку a тенденция меняется: возрастание функции сменяется убыванием. Иными словами, *производная меняет знак с* (+) *на* (−) — это признак точки максимума.

2. **Точка минимума**.

   На рис. 14 точка $x = b$ является точкой минимума функции $f(x)$: значение функции в точке b меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

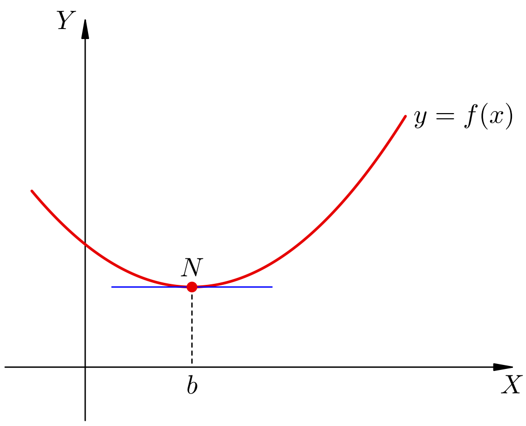

Рис. 14. Точка минимума

   Касательная в точке N также горизонтальна. Поэтому $f'(b) = 0$.

   При переходе через точку b тенденция также меняется: убывание функции сменяется возрастанием. *Производная меняет знак с* (−) *на* (+) — это признак точки минимума.

   Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**. Таким образом, точки экстремума — это точки изменения тенденции поведения функции; в точке экстремума возрастание сменяется убыванием или наоборот.

3. **Седловая точка**.

Третий возможный случай изображён на рис. 15. Касательная в точке S горизонтальна, так что $f'(c) = 0$.

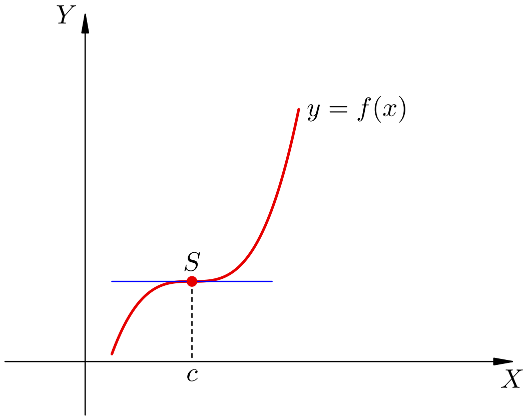

Рис. 15. Седловая точка

При переходе через точку $x = c$ тенденция не меняется: функция как возрастала, так и продолжает возрастать. Знак производной как был (+), так им и останется.

Стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума, называется *седловой точкой*. Так, в данном случае точка $x = c$ — седловая точка.

Стационарные точки и точки нарушения дифференцируемости называются *критическими точками* функции. Сформулируем это определение более точно.

Критическая точка функции — это внутренняя точка области определения, в которой производная обращается в нуль или не существует.

Упражнение. Определите, является ли $x = 0$ критической точкой для следующих функций:

а) $f(x) = 2x$;
б) $f(x) = x^2 + 5$;
в) $f(x) = 1/x$;
г) $f(x) = |x|$;
д) $f(x) = -x^3$;
е) $f(x) = \sqrt{x}$;
ж) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Упражнение. Найдите критические точки функций $\sin x$ и $\cos x$. Покажите, что функция $\operatorname{tg} x$ не имеет критических точек.

Рассмотрим напоследок ещё одни пример: исследуем функцию

$$f(x) = x^4 - 4x^3.$$

А именно, найдём критические точки, промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и построим график.

Областью определения функции служит множество всех действительных чисел: $D(f) = \mathbb{R}$.

Вычисляем производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Производная существует при любых x и обращается в нуль в двух точках: $x = 0$ и $x = 3$. Будучи внутренними точками области определения, они являются критическими точками нашей функции.

Выясним характер критических точек. Для этого с помощью метода интервалов расставляем знаки производной и определяем промежутки возрастания и убывания (рис. 16).

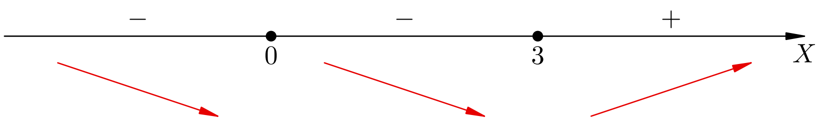

Рис. 16. Поведение функции $f(x) = x^4 - 4x^3$

При переходе через точку $x = 0$ производная не меняет знака: функция убывает как на промежутке $(-\infty, 0]$, так и на промежутке $[0, 3]$. Поэтому точка $x = 0$ является седловой точкой функции.

А вот при переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с $(-)$ на $(+)$. На промежутке $[3, +\infty)$ функция возрастает, а точка $x = 3$ служит точкой минимума. Значение в точке минимума: $f(3) = -27$.

Найдём точки пересечения с осью X:

$$x^4 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x - 4) = 0.$$

Значит, ось X пересекается в точках $x = 0$ (а это седловая точка) и $x = 4$. Остаётся построить график (рис. 17):

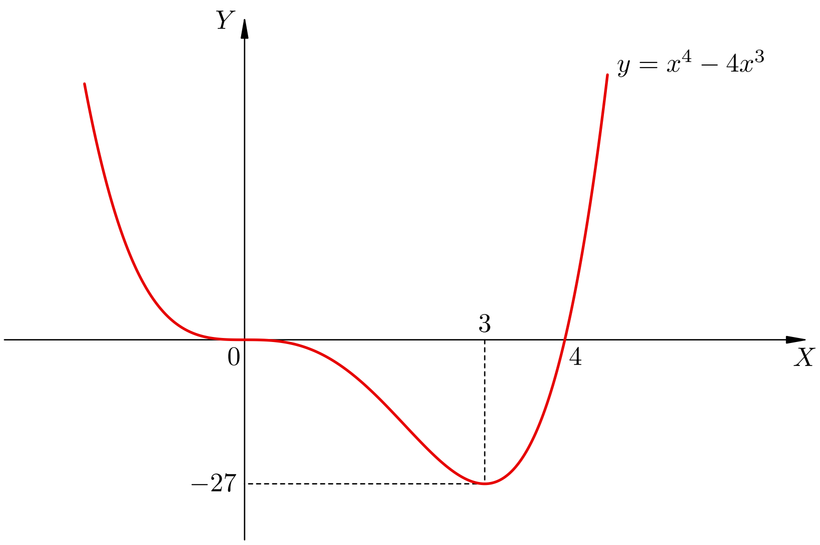

Рис. 17. График функции $f(x) = x^4 - 4x^3$

1.12 Экспонента и натуральный логарифм

Наряду с первым замечательным пределом (2) имеется *второй замечательный предел*:

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t} = e = 2{,}718281828459045\ldots \tag{23}$$

Возьмите калькулятор и убедитесь в этом сами. Вычисляйте последовательно:

$$1{,}1^{10}, \quad 1{,}01^{100}, \quad 1{,}001^{1000}, \quad \ldots$$

Вы увидите, что значения таких выражений постепенно приближаются к числу (23), которое получило обозначение e в честь великого математика Леонарда Эйлера.

Число e иррационально, то есть является бесконечной непериодической десятичной дробью. Первые пятнадцать знаков после запятой запоминаются просто: сначала надо помнить 2,7, потом — два раза год рождения Льва Толстого, потом — углы равнобедренного прямоугольного треугольника :-)

Нам понадобится несколько иной вид второго замечательного предела. Укажем лишь неформальную идею его получения. Из (23) следует, что при малых t выражение $(1+t)^{1/t}$ близко к e; значит, $1+t$ близко к e^t; значит, e^t-1 близко к t; значит, $(e^t-1)/t$ близко к 1. Таким образом,

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1. \tag{24}$$

В школьной программе число e остаётся несколько в стороне, но при изучении высшей математики и физики вы увидите, сколь велика на самом деле его роль. Чем же число e так замечательно? Оказывается, производная функции e^x (которая называется *экспонентой*) равна самой этой функции:

$$\boxed{(e^x)'=e^x.} \tag{25}$$

Данную формулу получить нетрудно. Имеем:

$$(e^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x,$$

поскольку последний предел есть не что иное, как второй замечательный предел (24).

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e. Для него имеется специальное обозначение ln:

$$\ln x=\log_e x.$$

Производная экспоненты и правило дифференцирования сложной функции позволяют получить производную показательной функции a^x. Нужно воспользоваться тем, что $a=e^{\ln a}$:

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}(x\ln a)'=a^x\ln a.$$

Получили ещё одну табличную производную:

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a.}$$

А чему равна производная натурального логарифма? Давайте воспользуемся следующим приёмом. Пусть $y=\ln x$. Выразим отсюда x:

$$x=e^y,$$

и продифференцируем по x обе части полученного равенства:

$$1=e^y y'.$$

Отсюда

$$y'=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}.$$

Итак,

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}\,.}$$

Теперь оказывается возможным доказать давно выписанную формулу (13). Имеем:

$$(x^a)'=(e^{a\ln x})'=e^{a\ln x}(a\ln x)'=x^a\cdot\frac{a}{x}=ax^{a-1}.$$

2 Производная в физике

Переходя к физическим приложениям производной, мы будем использовать несколько иные обозначения — те, которые приняты в физике.

Во-первых, меняется обозначение функций. В самом деле, какие функции мы собираемся дифференцировать? Этими функциями служат физические величины, зависящие от времени. Например, координата тела $x(t)$ и его скорость $v(t)$ могут быть заданы формулами вроде таких:

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2, \tag{26}$$

$$v(t) = 12 - 6t. \tag{27}$$

Таким образом, аргументом функции теперь является время t, а буква x отныне обозначает функцию — координату точки.

Во-вторых, меняется обозначение производной. Штрих в физике зарезервирован для других целей, и вместо него мы используем точку над буквой:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \dot{x}(t). \tag{28}$$

Имеется ещё одно обозначение производной, очень распространённое как в математике, так и в физике:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{dx}{dt} \tag{29}$$

(читается «дэ икс по дэ тэ»).

Остановимся подробнее на смысле обозначения (29). Математик понимает его двояко — либо как предел:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,, \tag{30}$$

либо как дробь, в знаменателе которой стоит приращение времени dt, а в числителе — так называемый *дифференциал* dx функции $x(t)$. Понятие дифференциала не сложно, но мы не будем его сейчас обсуждать; оно ждёт вас на первом курсе.

Физик, не скованный требованиями математической строгости, понимает обозначение (29) более неформально. Пусть dx есть изменение координаты за время dt. Возьмём интервал dt настолько маленьким, что отношение dx/dt близко к своему пределу (30) с устраивающей нас точностью.

И тогда, — скажет физик, — *производная координаты по времени есть попросту дробь, в числителе которой стоит достаточно малое изменение координаты dx, а в знаменателе — достаточно малый промежуток времени dt, в течение которого это изменение координаты произошло.* Такое нестрогое понимание производной характерно для рассуждений в физике. Далее мы будем придерживаться именно этого физического уровня строгости.

Давайте вернёмся к исходному примеру (26) и посчитаем производную координаты, а заодно посмотрим на совместное использование обозначений (28) и (29):

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(1 + 12t - 3t^2) = 12 - 6t.$$

(Символ дифференцирования $\frac{d}{dt}$ перед скобкой — это всё равно что штрих сверху за скобкой в прежних обозначениях.)

Обратите внимание, что вычисленная производная координаты оказалась равна скорости тела (27). Это не случайное совпадение, и нам нужно обсудить его более подробно.

2.1 Производная координаты

Прежде всего заметим, что скорость в (27) может быть как положительной, так и отрицательной. А именно, скорость положительна при $t < 2$, обращается в нуль при $t = 2$ и становится отрицательной при $t > 2$.

Как это понимать? Очень просто: мы имеем дело не с абсолютной величиной скорости, а с *проекцией* v_x вектора скорости на ось X. Поэтому вместо (27) правильнее было бы написать:

$$v_x = 12 - 6t. \tag{31}$$

Если вы забыли, что такое проекция вектора на ось, то прочитайте соответствующий раздел статьи «Векторы в физике». Здесь мы напомним лишь, что знак проекции v_x отражает связь направления скорости и направления оси X:

$$v_x > 0 \Leftrightarrow \text{тело движется в направлении оси } X;$$
$$v_x < 0 \Leftrightarrow \text{тело движется против оси } X.$$

(Например, если $v_x = -3$ м/с, то это означает, что тело движется со скоростью 3 м/с в сторону, противоположную оси X.)

Поэтому в нашем примере (31) мы имеем следующую картину движения: при $t < 2$ тело движется в положительном направлении оси X и постепенно замедляется; при $t = 0$ тело останавливается; при $t > 2$ тело, разгоняясь, движется в отрицательном направлении оси X.

Допустим, что скорость тела по абсолютной величине равна v. Возможны два случая направления движения.

1. Если тело движется в положительном направлении оси X, то малое изменение координаты dx положительно и равно пути, проходимому телом за время dt. Поэтому
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v.$$

2. Если тело движется в отрицательном направлении оси X, то $dx < 0$. Путь за время dt равен $-dx$, поэтому $-dx/dt = v$ или
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -v.$$

Заметим теперь, что в первом случае $v_x = v$, а во втором случае $v_x = -v$. Тем самым оба случая объединяются в одну формулу:

$$\dot{x} = v_x, \tag{32}$$

и мы приходим к важнейшему факту: *производная координаты тела равна проекции скорости тела на данную ось.*

Легко видеть, что работает признак возрастания (убывания) функции. А именно:

$$\dot{x} > 0 \Rightarrow v_x > 0 \Rightarrow \text{тело двигается в направлении оси } X \Rightarrow \text{координата } x \text{ увеличивается;}$$
$$\dot{x} < 0 \Rightarrow v_x < 0 \Rightarrow \text{тело двигается против оси } X \Rightarrow \text{координата } x \text{ уменьшается.}$$

2.2 Ускорение

Скорость тела характеризует быстроту изменения его координаты. Но скорость также может меняться — медленнее или быстрее. Характеристикой быстроты изменения скорости служит физическая величина, называемая *ускорением*.

Пусть, например, скорость автомобиля при равномерном разгоне увеличилась с $v_0 = 2$ м/с до $v = 14$ м/с за время $t = 3$ с. Ускорение автомобиля вычисляется по формуле:

$$a = \frac{v - v_0}{t}\,, \tag{33}$$

и в данном случае оказывается равно:

$$a = \frac{14 - 2}{3} = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,.$$

Таким образом, за одну секунду скорость автомобиля увеличивается на 4 м/с.

А чему равно ускорение, если скорость, наоборот, уменьшилась с $v_0 = 14$ м/с до $v = 2$ м/с за то же время $t = 3$ с? Тогда по формуле (33) получаем:

$$a = \frac{2 - 14}{3} = -4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,.$$

За одну секунду, как видим, скорость уменьшается на 4 м/с.

Можно ли говорить об ускорении, если скорость меняется неравномерно? Конечно, можно, но только это будет *мгновенное* ускорение, которое также зависит от времени. Схема рассуждений вам уже хорошо знакома: в формуле (33) вместо промежутка времени t берём малый промежуток dt, вместо разности $v - v_0$ берём приращение dv скорости за время dt, и в результате получаем:

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}. \tag{34}$$

Таким образом, получается, что ускорение — это производная скорости.

Формула (34), однако, не описывает все ситуации, которые возникают в механике. Например, при равномерном движении по окружности скорость тела не меняется по модулю, и в соответствии с (34) мы должны были бы получить $a = \dot{v} = 0$. Но вы прекрасно знаете, что ускорение у тела имеется, оно направлено к центру окружности и называется центростремительным. Поэтому формула (34) нуждается в некоторой модификации.

Связана эта модификация с тем, что ускорение на самом деле является *вектором.* Оказывается, *вектор ускорения показывает направление изменения скорости тела.* Что это означает, мы сейчас выясним на простых примерах.

Пусть тело движется вдоль оси X. Давайте рассмотрим два случая направления ускорения: по оси X и против оси X соответственно.

1. Вектор ускорения $\vec{a}$ сонаправлен с осью X (рис. 18). Проекция ускорения на ось X положительна: $a_x > 0$.

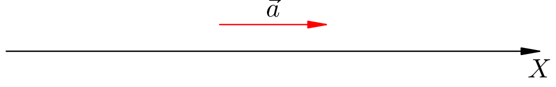

Рис. 18. $a_x > 0$

В данном случае скорость изменяется в положительном направлении оси X. А именно:

- Если тело движется вправо ($v_x > 0$), то оно разгоняется: скорость тела по модулю увеличивается. Проекция скорости v_x при этом также увеличивается.
- Если тело движется влево ($v_x < 0$), то оно тормозит: скорость тела по модулю уменьшается. Но обратите внимание, что проекция скорости v_x, будучи отрицательной, при этом увеличивается.

Таким образом, если $a_x > 0$, то проекция скорости v_x возрастает вне зависимости от того, в каком направлении движется тело.

2. Вектор ускорения $\vec{a}$ направлен противоположно оси X (рис. 19). Проекция ускорения на ось X отрицательна: $a_x < 0$.

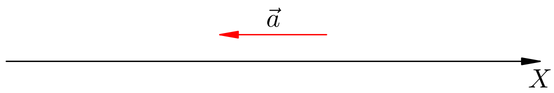

Рис. 19. $a_x < 0$

В данном случае скорость изменяется в отрицательном направлении оси X. А именно:

- Если тело движется вправо ($v_x > 0$), то оно тормозит: скорость тела по модулю уменьшается. Проекция скорости v_x при этом также уменьшается.
- Если тело движется влево ($v_x < 0$), то оно разгоняется: скорость тела по модулю увеличивается. Но проекция скорости v_x, будучи отрицательной, при этом уменьшается.

Таким образом, если $a_x < 0$, то проекция скорости v_x убывает, и опять-таки вне зависимости от того, в каком направлении движется тело.

Обнаруженная в этих примерах связь знака проекции ускорения a_x с возрастанием (убыванием) проекции скорости v_x приводит нас к нужной модификации формулы (34):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x. \tag{35}$$

Проекция ускорения a_x является производной проекции скорости v_x. Вспомним, что v_x в свою очередь является производной координаты x. Поэтому *проекция ускорения a_x — это вторая производная координаты x*:

$$a_x = \ddot{x}. \tag{36}$$

Пример. Ещё раз вернёмся к примеру (26):

$$x = 1 + 12t - 3t^2$$

(координата измеряется в метрах, время — в секундах). Последовательно дифференцируя два раза, получаем:

$$v_x = \dot{x} = 12 - 6t,$$
$$a_x = \dot{v}_x = -6.$$

Как видим, ускорение постоянно по модулю и равно 6 м/с^2. Направлено ускорение в сторону, противоположную оси X.

Приведённый пример есть случай *равноускоренного* движения, при котором модуль и направление ускорения неизменны (или, короче говоря, $\vec{a} = \text{const}$). Равноускоренное движение — один из важнейших и часто встречающихся видов движения в механике.

Из данного примера нетрудно понять, что при равноускоренном движении проекция скорости является линейной функцией времени, а координата — квадратичной функцией.

Пример. Рассмотрим более экзотический случай:

$$x = 2 + 3t - 4t^2 + 5t^3.$$

Дифференцируем:

$$v_x = \dot{x} = 3 - 8t + 15t^2,$$
$$a_x = \dot{v}_x = -8 + 30t.$$

Данное движение не является равноускоренным: ускорение зависит от времени.

Пример. Пусть тело движется вдоль оси X по следующему закону:

$$x = 5\sin 2t.$$

Мы видим, что координата тела периодически изменяется, находясь в пределах от -5 до 5. Данное движение является примером *гармонических колебаний*, когда координата меняется со временем по закону синуса.

Дифференцируем дважды:

$$v_x = \dot{x} = 5\cos 2t \cdot 2 = 10\cos 2t,$$
$$a_x = \dot{v}_x = -20\sin 2t.$$

Проекция скорости меняется по закону косинуса, а проекция ускорения — снова по закону синуса.

2.3 Дифференцирование векторов

Формулы (32) и (35) на самом деле являются частными случаями более общих соотношений, в которых производная берётся от векторов. Мы скоро напишем эти соотношения, но сначала нам нужно понять, что такое производная векторной величины.

Предположим, что имеется некоторый вектор $\vec{u}(t)$, зависящий от времени. Это означает, что длина данного вектора или его направление могут меняться с течением времени.

По аналогии с обычной (скалярной) функцией вводится понятие изменения вектора. *Изменение вектора* $\vec{u}$ за время Δt есть векторная величина:

$$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t).$$

Обратите внимание, что в правой части данного соотношения стоит разность векторов. Изменение вектора $\vec{u}$ показано на рис. 20.

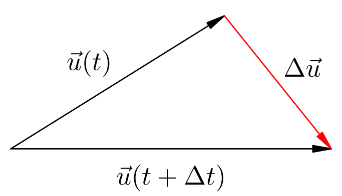

Рис. 20. Изменение вектора

Если промежуток времени Δt достаточно мал, то и вектор $\vec{u}$ за это время меняется мало (в физике, по крайней мере, так считается всегда). Если при $\Delta t \to 0$ отношение $\Delta\vec{u}/\Delta t$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *производной вектора* $\vec{u}$:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}\,. \tag{37}$$

При обозначении производной вектора мы не будем использовать точку сверху, так как символ $\dot{\vec{u}}$ не слишком хорошо смотрится; соответственно, ограничиваемся обозначением (37). Но для производной скаляра мы, разумеется, свободно используем оба обозначения.

Напомним, что $d\vec{u}/dt$ — это *символ* производной. Его можно понимать и как дробь, в числителе которой стоит *дифференциал* вектора $\vec{u}$, соответствующий промежутку времени dt. В общей статье о производной мы не стали обсуждать понятие дифференциала, так как в школе его не проходят; не будем обсуждать дифференциал и здесь.

Однако на физическом уровне строгости производную $d\vec{u}/dt$ можно считать дробью, в знаменателе которой стоит очень малый интервал времени dt, а в числителе — соответствующее малое изменение $d\vec{u}$ вектора $\vec{u}$. При достаточно малом dt величина данной дроби отличается от предела в правой части (37) столь мало, что с учётом имеющейся точности измерений этим отличием можно пренебречь.

Мы будем рассматривать векторы на плоскости, в которой введена система координат OXY. Именно такая ситуация характерна для многих задач школьной механики: выписав второй закон Ньютона в векторной форме, мы выбираем две оси и затем переходим к проекциям векторов на эти оси.

Как вам известно из раздела 6.1 статьи «Векторы в физике», вектор $\vec{u}$ на плоскости единственным образом раскладывается по базису единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ прямоугольной декартовой системы координат OXY:

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}.$$

Здесь u_x и u_y — проекции вектора $\vec{u}$ на координатные оси, они же — координаты вектора $\vec{u}$ в данном базисе (рис. 21).

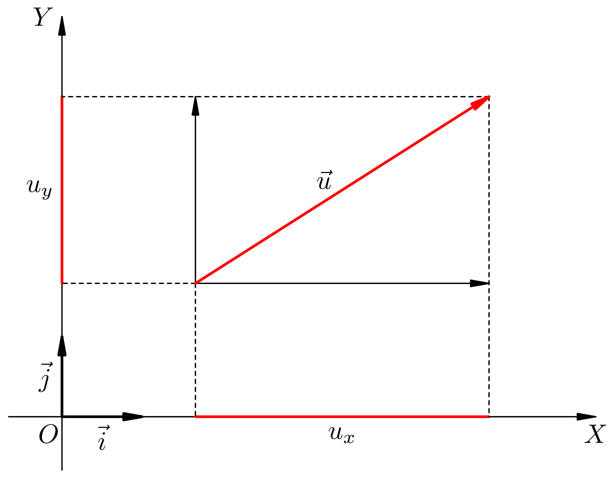

Рис. 21. $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$

Вектор $\vec{u}$ в нашем случае зависит от времени, а это значит, что его координаты u_x и u_y являются функциями времени:

$$\vec{u}(t) = u_x(t)\,\vec{i} + u_y(t)\,\vec{j}.$$

В момент времени $t + \Delta t$ имеем соответственно:

$$\vec{u}(t + \Delta t) = u_x(t + \Delta t)\,\vec{i} + u_y(t + \Delta t)\,\vec{j}.$$

Изменение вектора $\vec{u}$ тогда равно:

$$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t) = (u_x(t + \Delta t) - u_x(t))\,\vec{i} + (u_y(t + \Delta t) - u_y(t))\,\vec{j} = \Delta u_x \cdot \vec{i} + \Delta u_y \cdot \vec{j}.$$

Имеем, соответственно:

$$\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta u_x}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta u_y}{\Delta t}\,\vec{j}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, для производной вектора $\vec{u}$ получаем:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x\vec{i} + \dot{u}_y\vec{j}. \tag{38}$$

Таким образом, если вектор $\vec{u}$ имеет координаты (u_x, u_y), то координаты производной $d\vec{u}/dt$ являются производными координат вектора $\vec{u}$, а именно — $(\dot{u}_x, \dot{u}_y)$.

2.4 Производная радиус-вектора

Предположим, что точка M движется на координатной плоскости OXY (рис. 22). Синяя дуга — это *траектория* точки M, то есть кривая, которую точка описывает в процессе своего движения.

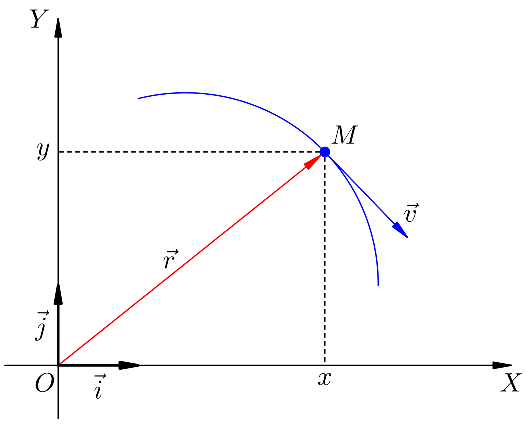

Рис. 22. $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

Радиус-вектор точки M — это вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, началом которого служит начало координат, а концом — точка M. Радиус-вектор постоянно указывает на данную точку и как бы «отслеживает» её движение.

Таким образом, радиус-вектор движущейся точки — это вектор, зависящий от времени. Поэтому резонно спросить, чему равна производная радиус-вектора.

Координаты точки M обозначим через x и y. Соответственно, радиус-вектор $\vec{r}$ также имеет координаты (x, y), и мы можем написать:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Теперь используем формулу (38):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}.$$

Как мы уже знаем, $\dot{x} = v_x$ и аналогично $\dot{y} = v_y$. Следовательно:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}.$$

В правой части полученной формулы стоит вектор $\vec{v}$ скорости точки M. Итак:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \tag{39}$$

Мы получили важный результат: *производная радиус-вектора точки — это вектор её скорости.*

Можно показать, что *скорость движущейся точки всегда направлена по касательной к траектории.* В школьной физике этот факт принимается без доказательства. Мы впоследствии докажем его для одного частного случая — равномерного движения по окружности.

2.5 Производная вектора скорости

Давайте посмотрим теперь, чему равна производная вектора $\vec{v}$. Пишем:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j},$$

и снова используем формулу (38):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j}.$$

Мы знаем, что $\dot{v}_x = a_x$ и аналогично $\dot{v}_y = a_y$. Поэтому имеем:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

В правой части получился вектор $\vec{a}$ ускорения точки M:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \tag{40}$$

Итак, *производная вектора скорости точки — это вектор её ускорения.*

Обратите внимание, что формулы (39) и (40) уже не содержат упоминаний о координатах. Это чисто векторные соотношения; они *инвариантны* в том смысле, что выполняются сами по себе, безотносительно к какой-либо конкретной системе координат.

Более того, эти формулы справедливы не только на плоскости, но и в пространстве. Доказать это можно тем же способом, каким мы действовали на плоскости, а именно — ввести систему координат. Выкладки окажутся полностью аналогичными (добавится лишь третье слагаемое, отвечающее z-координате).