Делимость. Разное

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7.5, 8.4*) Найдите наибольшее трёхзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

$\boxed{828}$

2. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 9.4*) Сколько существует трёхзначных чисел, которые в 5 раз больше произведения своих цифр?

3. (*«Курчатов», 2017, 8.4*) Учительница дала Васе и Пете два одинаковых картонных n-угольника. Вася разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 33-угольники, а Петя разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 67-угольники. Найдите наименьшее возможное значение n.

$\boxed{2017}$

4. (*«Ломоносов», 2012, 9*) Найдите все такие значения n, что среди любого набора из n натуральных чисел, являющихся точными квадратами, всегда найдутся два числа, разность которых делится на 2011.

$\boxed{n \geqslant 1007}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9*) Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 1, а длины всех трёх высот выражаются целыми числами.

$\boxed{3\sqrt{3}}$

6. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

$\boxed{2800}$

7. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

$\boxed{4000}$

8. (*«Физтех», 2013, 10*) При каком наибольшем натуральном значении n число $n! + 5n + 52$ является точным квадратом?

$\boxed{2}$

9. (*«Физтех», 2011, 10*) Найдите натуральное число, которое ровно в 25 раз меньше, чем сумма всех натуральных чисел, меньших его и делящихся на 31.

$\boxed{1581}$

10. (*«Физтех», 2011, 11*) Два трёхзначных числа таковы, что сумма остальных трёхзначных чисел ровно в 770 раз больше одного из них. Найдите наибольшее из этих чисел.

$\boxed{641}$

11. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 11.6*) Сколько существует натуральных чисел n, для которых $4^n - 15$ является квадратом целого числа?

12. (*«Курчатов», 2019, 10.3*) Определите все натуральные числа n, имеющие ровно $\sqrt{n}$ натуральных делителей (включая 1 и само число n).

13. (*«Курчатов», 2019, 11.2*) Найдите все такие пары натуральных чисел m и n, что $m^{2019} + n$ делится на mn.

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9.6*) Даны n различных составных натуральных чисел a_1, $\ldots$, a_n, принадлежащих интервалу $(1; 2013)$. Известно, что для любых двух различных чисел a_i, a_j из этого набора выполнено условие $\text{НОД}(a_i, a_j) = 1$.

а) Приведите пример такого набора для $n = 14$.

б) Докажите, что не существует такого набора, содержащего 15 чисел.

15. (*«Ломоносов», 2006.9*) На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

$\boxed{(1, 117) \text{ или } (3, 59)}$

16. (*«Высшая проба», 2019, 8.5, 9.5*) Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

17. (*«Высшая проба», 2015, 9.6*) Найти все натуральные числа n, такие, что число $n^2 + 77n$ является точным квадратом натурального числа.

$\boxed{4,\ 99,\ 175,\ 1444}$

18. (*«Высшая проба», 2015, 10.6*) а) Найти хотя бы два различных натуральных числа n, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

б) Найти *количество всех* натуральных чисел n, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

$\boxed{\text{а) } 496 \text{ и } 1007^2\text{; б) } 13}$

19. (*«Высшая проба», 2015, 11.5*) Обозначим через T_k произведение первых k нечётных простых чисел: $T_1 = 3$, $T_2 = 3 \cdot 5$, $T_6 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ и т. д. Для каждого натурального k найти количество натуральных чисел n таких, что число $n^2 + T_k n$ является точным квадратом натурального числа. Решить задачу: а) для $k = 1$; б) для $k = 2$; в) для произвольного заданного натурального k.

$\boxed{\text{в) } \frac{3^k - 1}{2}}$