Делимость

Говоря о делимости, мы имеем в виду целые числа.

Определение. Число a *делится* на число b, если существует такое число c, что $a = bc$. При этом числа b и c называются *делителями* числа a.

Так, 42 делится на 6, поскольку $42 = 6 \cdot 7$. По той же причине 42 делится на 7. Числа 6 и 7 являются делителями числа 42. У числа 42 есть и другие делители — например, 2, 3, 14.

Любое число делится на 1 и на само себя. Может оказаться, что других делителей у данного числа нет — таково, например, число 7.

Определение. Число называется *простым*, если оно имеет ровно два делителя — единицу и само себя. Число называется *составным*, если оно имеет более двух делителей.

Единица не считается ни простым, ни составным числом. Вот несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... Простых чисел бесконечно много. Составных чисел тоже бесконечно много.

Как вы уже знаете, чётные числа — это числа, которые делятся на 2. Число 2 является единственным простым чётным числом.

Задачи

1. Найдите все делители числа: а) 108; б) 1001.

2. Незнайка заявил, что:

1) если ни один из множителей не делится на некоторое число, то и произведение не делится на это число;

2) если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число;

3) если сумма нескольких слагаемых делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число.

Так ли это? Приведите опровергающие примеры.

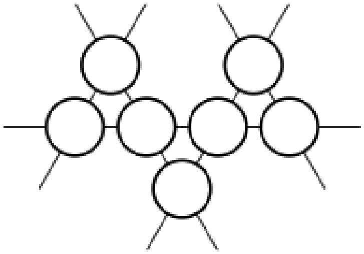
3. Найдите два таких числа, чтобы при умножении одного из них на 12, а другого на 16 получились равные произведения.

4. Известен такой фокус. Возьмём любое трёхзначное число, запишем его дважды, полученное шестизначное число разделим на 7, частное разделим на 11, новое частное разделим на 13 — в результате получается исходное число. В чём секрет этого фокуса?

5. Придумайте пять чисел, каждое из которых имеет ровно три делителя. Какую вы видите закономерность? Попробуйте написать общую формулу для таких чисел.

6. Придумайте пять чисел, каждое из которых имеет ровно четыре делителя.

7. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 5.8*) Серёжа расставил в кружочках числа от 1 до 8 так, что каждое из чисел, кроме одного, использовано ровно по одному разу. Оказалось, что суммы чисел на каждой из пяти линий равны. Какое число Серёжа не использовал?



$\boxed{9}$

8. (*Математический праздник, 2016, 6.1*) У Незнайки есть пять карточек с цифрами: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$. Помогите ему составить из этих карточек два числа — трёхзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе.

9. (*Московская устная олимпиада, 2014, 6.1*) Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A?

10. (*Московская устная олимпиада, 2018, 6.1*) Каждый день баран учит одинаковое количество языков. К вечеру своего дня рождения он знал 1000 языков. В первый день того же месяца он знал к вечеру 820 языков, а в последний день этого месяца — 1100 языков. Когда у барана день рождения?

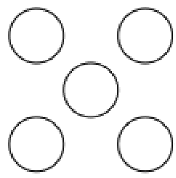
$\boxed{\text{19 февраля}}$

11. (*Всеросс., 2014, МЭ, 6.2*) Второклассники Коля, Вася, Миша, Стёпа и Гриша по очереди верно решили пять примеров из таблицы умножения. Каждый следующий мальчик получил ответ в полтора раза больше предыдущего. Какие числа умножал Стёпа?

$\boxed{\text{6 и 9}}$

12. (*Всеросс., 2017, МЭ, 7.2*) Вчера Никита купил несколько ручек: чёрные — по 9 рублей за штуку и синие — по 4 рубля за штуку. Зайдя сегодня в тот же магазин, он обнаружил, что цены на ручки изменились: чёрные стали стоить 4 рубля за штуку, а синие — 9 рублей. Увидев такое, Никита сказал с досадой: «Покупай я те же ручки сегодня, сэкономил бы 49 рублей». Не ошибается ли он?

13. (*Математический праздник, 2015, 6.2*) а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.



б) Докажите, что задача имеет единственное решение.

14. (*Математический праздник, 2005, 6.2*)

На автобусе ездил Андрей
На кружок и обратно домой,
Заплатив 115 рублей,
Покупал он себе проездной.
В январе он его не достал,
И поэтому несколько дней
У шофёра билет покупал
Он себе за 15 рублей.
А в иной день кондуктор с него
Брал 11 только рублей.
Возвращаясь с кружка своего
Всякий раз шёл пешком наш Андрей.
За январь сколько денег ушло,
Посчитал бережливый Андрей:
С удивлением он получил
Аккурат 115 рублей!
Сосчитайте теперь поскорей,
Сколько раз был кружок в январе?

9 раз

15. (*Математический праздник, 2012, 6.3*) Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

1001

16. (*Математический праздник, 2008, 6.3*) На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причём все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

11 головок

17. (*«Курчатов», 2016, 6.4*) Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Представьте число 2016 в виде произведения двух палиндромов (найдите все варианты и объясните, почему других нет).

$8 \cdot 252$

18. (*Московская устная олимпиада, 2013, 7.1*) Астролог считает, что 2013 год *счастливый*, потому что 2013 нацело делится на сумму $20 + 13$. Будет ли когда-нибудь два счастливых года подряд?

19. (*Математический праздник, 2018, 7.2*) Использовав каждую из цифр от 0 до 9 ровно по разу, запишите 5 ненулевых чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее.

20. (*Московская устная олимпиада, 2002, 7.2*) Существуют ли такие цифры Г и У, что число УГУ делится на 13, а число ГУГ — не делится?

21. (*Математический праздник, 2010, 7.3*) Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но всё же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

$\boxed{21}$

22. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 7.3*) На уроке физкультуры весь класс выстроился по росту (у всех детей разный рост). Дима заметил, что людей, которые выше него, в четыре раза больше, чем людей, которые ниже него. А Лёня заметил, что людей, которые выше него, в три раза меньше, чем людей, которые ниже него. Сколько всего человек в классе, если известно, что их не больше 30?

$\boxed{21}$

23. (*«Курчатов», 2016, 7.3*) Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Представьте число 2016 в виде произведения трёх палиндромов, больших 1 (найдите все варианты и объясните, почему других нет).

$\boxed{2 \cdot 4 \cdot 252}$

24. (*«Высшая проба», 2020, 7.3, 8.2*) Имеется дробь $\frac{1}{n}$. Семиклассник Семёнов каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Семёнов утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

25. (*Московская устная олимпиада, 2018, 7.4*) Дан прямоугольный параллелепипед, у которого все измерения (длина, ширина и высота) — целые числа. Известно, что если длину и ширину увеличить на 1, а высоту уменьшить на 2, то объём параллелепипеда не изменится. Докажите, что какое-то из измерений данного параллелепипеда кратно трём.

26. (*«Ломоносов», 2014, 7.4*) 2014-значное число $\underbrace{357\ldots}_{2014}$ обладает следующим свойством: если взять любые шесть цифр, идущих подряд (в том порядке, в каком они идут), то образованное ими шестизначное число будет делиться на 7, на 11 и на 13. Первые три цифры этого числа — 3, 5 и 7. Найдите три последние цифры. В ответе укажите трёхзначное число, которое они образуют.

$\boxed{573}$

27. (*«Ломоносов», 2015, 7.4*) На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые были у него до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество подарков, которые были у него до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

$\boxed{18}$

28. (*Математический праздник, 2006, 7.4*) Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер: $2006 : 17 = 118$.

а) Назовите первый номер матпраздника, для которого это тоже было выполнено.

б) Назовите последний номер матпраздника, для которого это тоже будет выполнено.

а) 1; б) 1989

29. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7.5*) Найдите наибольшее трёхзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

828

30. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7.5*) Сколько натуральных чисел от 1 до 2015 включительно имеют сумму цифр, кратную 5?

402

31. (*«Курчатов», 2014, 7.5*) По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (то есть между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два числа, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.

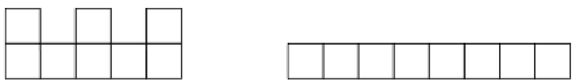
32. (*Московская устная олимпиада, 2004, 7.5*) Среди некоторых 13 последовательных натуральных чисел 7 чётных и 5 кратных трём. Сколько среди них чисел, кратных 6?

33. (*Математический праздник, 2017, 7.5*) Можно ли так расставить цифры $1, 2, \ldots, 8$ в клетках

а) [*3 балла*] буквы Ш;

б) [*5 баллов*] полоски (см. рисунок),

чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? (Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.)



а) б)

34. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.6; 9.4*) Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

12

35. (*Московская устная олимпиада, 2005, 7.7*) Докажите, что сумма цифр числа, делящегося на 7, может быть равна любому натуральному числу, кроме единицы.

36. (*Московская устная олимпиада, 2011, 7.8*) Последовательные натуральные числа 2 и 3 делятся на последовательные нечётные числа 1 и 3 соответственно; числа 8, 9 и 10 — делятся на 1, 3 и 5 соответственно. Найдутся ли 11 последовательных натуральных чисел, которые делятся на 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21 соответственно?

37. (*«Высшая проба», 2018, 7–8.6*) Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

$\boxed{15620}$