Делимость. Общие свойства

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 8.4*) Володя расставил несколько (возможно 0) шахматных фигур на доску 8×8. Лёня заметил, что в каждом квадрате 2×2 стоит одинаковое количество фигур. А Влад заметил, что в каждом прямоугольнике 3×1 (или 1×3) стоит одинаковое количество фигур. Сколько фигур было выставлено на доску? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

1.2. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 9.1*) Четырёхзначное число называется *восхитительным*, если оно само делится на 25, его сумма цифр делится на 25 и его произведение цифр делится на 25. Найдите все восхитительные числа.

1.3. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 10.2*) Делится ли $13^{2013} + 13^{2014} + 13^{2015}$ на 61?

1.4. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 11.3*) Может ли сумма 2015 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 2019 чисел?

1.5. (*Всеросс., 2019, МЭ, 8.5*) У натурального числа N выписали все его делители, затем у каждого из этих делителей подсчитали сумму цифр. Оказалось, что среди этих сумм нашлись все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее значение N.

1.6. (*Всеросс., 2017, МЭ, 10.2*) Сумма двух целых чисел равна S. Маша умножила левое число на целое число a, правое — на целое число b, сложила эти произведения и обнаружила, что полученная сумма делится на S. Алёша, наоборот, левое число умножил на b, а правое — на a. Докажите, что и у него аналогичная сумма разделится на S.

1.7. (*Всеросс., 2018, МЭ, 10.4*) Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. А во сколько раз отличаются два самых больших числа из этого списка?

В полтора раза

1.8. (*Всеросс., 2016, МЭ, 11.2*) Существуют ли такие целые числа p и q, что при любых целых значениях x выражение $x^2 + px + q$ кратно 3?

1.9. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10.6, 11.6*) Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

1.10. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 8.1, 9.1*) Найдите какое-нибудь такое девятизначное число N, состоящее из различных цифр, что среди всех чисел, получающихся из N вычёркиванием семи цифр, было бы не более одного простого.

1.11. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 8.1*) Существуют ли такие n-значные числа M и N, что все цифры M — чётные, все цифры N — нечётные, каждая цифра от 0 до 9 встречается в десятичной записи M или N хотя бы один раз, и M делится на N?

1.12. (*Всеросс., 2019, РЭ, 9.6, 10.6, 11.6*) Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1.

1.13. (*Всеросс., 2018, РЭ, 9.2*) На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

1.14. (*Всеросс., 2011, РЭ, 9.5*) Найдите все такие числа a, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

1.15. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 8.6, 9.6*) Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

1.16. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10.5*) Дано нечётное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.)

1.17. (*Всеросс., 2019, РЭ, 10.2*) Дан выпуклый четырёхугольник периметра 10^{100}, у которого длины всех сторон — натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвёртой стороны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

1.18. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 11.3*) Обозначим через $S(m)$ сумму цифр натурального числа m. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $S(3^n) \geqslant S(3^{n+1})$.

1.19. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 10.1*) Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?

1.20. (*Всеросс., 2017, ЗЭ, 10.5*) На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n, увеличенные на 1. Найдите все такие числа n, для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m. (*Собственными делителями* натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.)

1.21. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 11.5*) Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа.

1.22. (*Всеросс., 2017, ЗЭ, 11.7*) Изначально на доске написано натуральное число N. В любой момент Миша может выбрать число $a > 1$ на доске, стереть его и дописать все натуральные делители a, кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано N^2 чисел. При каких N это могло случиться?

2 Московская математическая олимпиада

2.1. (*ММО, 2011, 8.2*) Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

2.2. (*ММО, 1998, 8.2*) Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

2.3. (*ММО, 1995, 8.2*) Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, $\ldots$ делятся на 53.

2.4. (*ММО, 1995, 9.1*) Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

2.5. (*ММО, 2019, 8.2, 9.2*) Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2+20n+19$ делится на 2019.

2.6. (*ММО, 2020, 9.1, 11.1*) Существует ли натуральное число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, $\ldots$, 9 поровну?

2.7. (*ММО, 1976, 8.2*) Квадратная комната разгорожена перегородками на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.

2.8. (*ММО, 2013, 8.3*) На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

2.9. (*ММО, 2016, 8.4*) Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только чётные цифры.

2.10. (*ММО, 1997, 8.4*) а) Докажите, что существует натуральное число, которое при замене любой тройки соседних цифр на произвольную тройку остаётся составным.

б) Существует ли такое 1997-значное число?

2.11. (*ММО, 2012, 8.5*) Рациональные числа x, y и z таковы, что все числа $x+y^2+z^2$, x^2+y+z^2 и x^2+y^2+z целые. Докажите, что число $2x$ целое.

2.12. (*ММО, 2015, 9.2*) По кругу в некотором порядке расставлены все натуральные числа от 1 до 1000 таким образом, что каждое из чисел является делителем суммы двух своих соседей. Известно, что рядом с числом k стоят два нечётных числа. Какой чётности может быть число k?

2.13. (*ММО, 2014, 9.5*) *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\operatorname{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например,

$$\operatorname{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C, что

$$A + B = C \quad \text{и} \quad C > 1000 \cdot \operatorname{rad}(ABC)\,?$$

2.14. (*ММО, 2015, 11.2*) Какое наибольшее количество множителей вида $\sin \dfrac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2015\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2012.1*) Назовем четырёхзначное число x *забавным*, если каждую его цифру можно увеличить или уменьшить на 1 (при этом цифру 9 можно только уменьшать, а 0 — только увеличивать) так, чтобы в результате получилось число, делящееся на x.

а) Найдите два забавных числа.

б) Найдите три забавных числа.

в) Существуют ли четыре забавных числа?

3.2. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2015.3*) Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.

3.3. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2015.6*) Натуральное число называется *совершенным*, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2?

3.4. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2019.3*) Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500.

3.5. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2014.3*) На сотом году правления Казначей Бессмертный решил начать выпускать новые монеты. В этом году он выпустил в обращение неограниченный запас монет достоинством $2^{100}-1$, на следующий год — достоинством $2^{101}-1$, и т. д. Как только достоинство очередной новой монеты можно будет без сдачи набрать выпущенными ранее новыми монетами, Казначея сместят. На каком году его правления это случится?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2017, 8–9.1*) Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается (в десятичной записи) на 2016 и делится на 2017.

4.2. (*Турнир городов, 2012, 8–9.1*) Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011?

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7.6, 8.6, 9.4*) Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

5.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8.7, 9.5*) Известно, что при некоторых натуральных a, b число $N = \frac{a^2+b^2}{ab-1}$ — тоже натуральное. Найдите все возможные значения N.

5.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.1*) Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть квадрат некоторого целого числа.

5.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.5*) Прямоугольный треугольник называется пифагоровым, если длины всех его сторон — натуральные числа. Найдите наибольшее целое число, на которое делится произведение длин сторон любого пифагорова треугольника.

5.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.5*) Квадрат со стороной 12 требуется разрезать (полностью) на четыре квадрата с целочисленной стороной a, три квадрата с целочисленной стороной b и десять прямоугольников со сторонами a и b. Найдите все значения a и b, при которых это возможно.

6 «Высшая проба»

6.1. (*«Высшая проба», 2020, 7.3, 8.2*) Имеется дробь $\frac{1}{n}$. Семиклассник Семёнов каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Семёнов утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

6.2. (*«Высшая проба», 2018, 7.6, 8.6*) Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

15620

6.3. (*«Высшая проба», 2020, 9.3, 10.3*) В последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Докажите, что среди чисел Фибоначчи нет ни одной натуральной степени числа 7.

6.4. (*«Высшая проба», 2012, 9.1*) Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b такие, что $a^2 + 3b^2$ делится на $a + 3b$.

(1, 1), (3, 1), (9, 1)

6.5. (*«Высшая проба», 2012, 11.1*) Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b такие, что $2a^2 + 3b^2$ делится на $2a + 3b$.

(1, 1), (6, 1), (3, 8), (9, 4)

7 «Курчатов»

7.1. (*«Курчатов», 2015, 8.2*) Делитель натурального числа называется *собственным*, если он не равен самому числу и 1. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель на 5 больше куба самого маленького собственного натурального делителя.

7.2. (*«Курчатов», 2015, 9.1*) Делитель натурального числа называется *собственным*, если он не равен самому числу и 1. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель отличается на 3 (в ту или другую сторону) от куба самого маленького собственного делителя.

7.3. (*«Курчатов», 2014, 8.2*) На экране компьютера записано натуральное число. Если стереть любую цифру, то оставшееся число разделится на 7. Докажите, что либо в записи числа нет троек, либо все его цифры — тройки.

7.4. (*«Курчатов», 2014, 7.5, 8.4, 9.3*) По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (то есть между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два числа, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.