# Да или нет?

## Содержание



## 1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

**1.1.** (*Всеросс., 2019, ШЭ, 8.4*) На школьном спектакле все 25 мест в первом ряду заняты школьниками. Известно, что

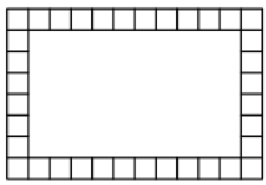
- никакие две девочки в этом ряду не сидят рядом;
- рядом с каждым мальчиком сидит ещё хотя бы один мальчик;
- всего в первом ряду сидят 9 девочек.

Могло ли так оказаться, что на центральном месте в ряду сидит мальчик? (Ответ обоснуйте.)

**1.2.** (*Всеросс., 2016, ШЭ, 8.6*) Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2015, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Верно ли, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4?

**1.3.** (*Всеросс., 2015, МЭ, 8.1*) Графики трёх функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причём $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$? Ответ обоснуйте.

**1.4.** (*Всеросс., 2015, МЭ, 8.2*) Из клетчатой бумаги вырезана прямоугольная рамка (см. рисунок). Её разрезали по границам клеток на девять частей и сложили из них квадрат $6 \times 6$. Могли ли все части, полученные при разрезании, оказаться различными? (*При складывании квадрата части можно переворачивать.*)



**1.5.** (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.3*) На координатной плоскости построены четыре прямые, уравнения которых имеют вид $y = kx + b$. Все коэффициенты и свободные члены — различные натуральные числа от 1 до 8. Могут ли эти 4 прямые разделить плоскость ровно на 8 частей?

**1.6.** (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.2*) Женя расставил по кругу числа от 1 до 10 в некотором порядке, а Дима в каждой промежуток между числами вписал их сумму. Могло ли так случиться, что все написанные Димой числа оказались различными?

**1.7.** (*Всеросс., 2020, ШЭ, 9.4*) Ирина выписала на доску в ряд некоторые целые числа от 0 до 999. В итоге получилось длинное число. Полина записала на свою часть доски все оставшиеся целые числа из этого же диапазона, в итоге получилось второе длинное число. Могли ли эти два длинных числа совпасть?

**1.8.** (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.6*) Вдоль трассы стоят 60 дорожных знаков. На каждом из них написана сумма расстояний до оставшихся 59 знаков. Возможно ли такое, что на знаках написаны 60 различных натуральных чисел? (Расстояния между знаками не обязательно целые.)

**1.9.** (*Всеросс., 2017, МЭ, 9.1*) В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три — на правую, то левая чаша перевесит. Пять слонов встали на левую чашу и четыре — на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

**1.10.** (*Всеросс., 2014, РЭ, 9.1*) По кругу расставлены 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

**1.11.** (*Всеросс., 2016, РЭ, 9.5*) В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились каждые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)

**1.12.** (*Всеросс., 2017, РЭ, 9.3*) Существует ли треугольник, для сторон $x$, $y$, $z$ которого выполнено соотношение

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x)\,?$$

**1.13.** (*Всеросс., 2019, РЭ, 9.7*) На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников?

**1.14.** (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10.1*) Число $a$ на 1 больше числа $b$. Могут ли числа $a^2$ и $b^2$ быть равными?

**1.15.** (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10.4*) В квадрате со стороной 5 произвольным образом отметили 201 точку. Верно ли, что какие-то 5 точек можно накрыть квадратом со стороной 1?

**1.16.** (*Всеросс., 2016, МЭ, 10.1*) В клетках квадрата $3 \times 3$ записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (Например, из клетки с буквой $a$ конь может пойти в клетки с буквами $f$ и $h$, а король — в клетки с буквами $b$, $d$ и $e$.)

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

**1.17.** (*Всеросс., 2018, МЭ, 10.1*) 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй — два, в третий — три, и так далее, в последний день — все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?

**1.18.** (*Всеросс., 2017, МЭ, 10.3*) В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три — на правую, то левая чаша перевесит. Три слона встали на левую чашу и два — на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

**1.19.** (*Всеросс., 2014, МЭ, 10.6*) В клетки таблицы размером $9 \times 9$ расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

**1.20.** (*Всеросс., 2016, ЗЭ, 10.7*) На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырёх написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?

**1.21.** (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 10.7*) В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо *сыгранной*, либо *не сыгранной*. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют?

**1.22.** (*Всеросс., 2020, ШЭ, 11.2*) Можно ли так раскрасить все натуральные числа в красный и синий цвета, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, были разных цветов, и любые два числа, отличающиеся в два раза, были разных цветов?

**1.23.** (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 11.5*) Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина $k$-го прыжка равна $2k + 1$). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)?

## 2 Московская математическая олимпиада

**2.1.** (*ММО, 2018, 8.1*) Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа $a$, $b$ и $c$, что числа $a + b + c$ и $a \cdot b \cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел?

**2.2.** (*ММО, 2019, 8.1*) Все таверны в царстве принадлежат трем фирмам. В целях борьбы с монополиями царь Горох издал следующий указ: каждый день, если у некоторой фирмы оказывается более половины всех таверн и число её таверн делится на 5, то у этой фирмы остается только пятая часть её таверн, а остальные закрываются. Могло ли так случиться, что через три дня у всех фирм стало меньше таверн? (Новые таверны в это время открываться не могут.)

**2.3.** (*ММО, 2020, 8.1*) Том написал на заборе из досок слово ММО, а Гек — число 2020. Ширина каждой буквы и цифры 9 см, а ширина доски забора — 5 см. Мог ли Гек испачкать меньше досок, чем Том? (Доски расположены вертикально, а слова и числа пишутся горизонтально. Цифры и буквы пишутся через равные промежутки.)

**2.4.** (*ММО, 2014, 8.3*) Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

**2.5.** (*ММО, 2015, 8.4*) Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

**2.6.** (*ММО, 2019, 9.1*) Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

**2.7.** (*ММО, 2019, 10.4*) Каждая точка плоскости раскрашена в один из трёх цветов. Обязательно ли найдётся треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет?

**2.8.** (*ММО, 2015, 11.6*) Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

**2.9.** (*ММО, 2014, 11.6*) В королевстве некоторые пары городов соединены железной дорогой. У короля есть полный список, в котором поименно перечислены все такие пары (каждый город имеет свое собственное имя). Оказалось, что для любой упорядоченной пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, а король не заметил бы изменений. Верно ли, что для любой пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, второй город оказался названным именем первого города, а король не заметил бы изменений?

## 3 Турнир городов

**3.1.** (*Турнир городов, 2015, 8–9.1*) Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, . . . , 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

**3.2.** (*Турнир городов, 2016, 8–9.2*) Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

**3.3.** (*Турнир городов, 2015, 8–9.4*) Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит ещё хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника

а) не превосходить девяти;

б) не превосходить восьми?

**3.4.** (*Турнир городов, 2016, 8–9.5, 10–11.4*) В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелёт. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелёт из А в Б стоит столько же, сколько перелёт из Б в А. Средняя стоимость перелёта равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь $m$ разных городов за $m$ перелётов, начав и закончив в своём родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более $m$ тугриков, если

а) $m = 99$;

б) $m = 100$?

**3.5.** (*Турнир городов, 2016, 8–9.6, 10–11.5*) Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение $5 \pm 1$, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0{,}5) \pm 0{,}5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) числа 1, 2, 4;

б) любые 100 различных действительных чисел?

**3.6.** (*Турнир городов, 2015, 10–11.3*) Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася — все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)

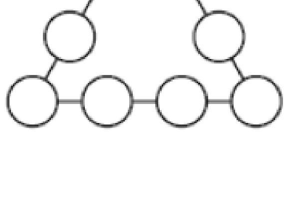
**3.7.** (*Турнир городов, 2016, 10–11.6*) Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной $h$ (надрез — это сегмент круга, $h$ — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

а) $h = 17$ см;

б) $h = 18$ см?

## 4 «Покори Воробьёвы горы!»

**4.1.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.4, 7–9.3*) Можно ли расставить числа 2016, 2017, ..., 2024 на указанные позиции (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел, стоящих на каждой стороне треугольника, была одинаковой?



**4.2.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9.4*) Квадратное табло состоит из $2012 \times 2012$ ячеек, каждая из которых может светиться или быть погашена. Известно, что можно переключать состояние на противоположное одновременно для всех ячеек на любой горизонтали, на любой вертикали и на любой (не обязательно большой) диагонали. Гарантированно ли (независимо от того, какие ячейки в начальный момент светились, а какие были погашены) такими переключениями можно перевести табло в состояние, когда все ячейки погашены?

**4.3.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9.5*) Нано-лягушка, перемещаясь по плоскости, может делать два вида действий: прыгать в направлении взгляда ровно на 1 метр и изменять направление взгляда на угол, кратный 45 градусам.

а) Докажите, что таким образом нано-лягушка может приблизиться к любой точке плоскости на расстояние, не превосходящее 1 нанометра.

б) Может ли нано-лягушка, перемещаясь таким образом, удалиться от точки, в которой она первоначально находилась, ровно на 2,5 метра?

**4.4.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9.8*) Можно ли сложить прямоугольный лист бумаги, согнув его несколько раз, и сделать один прямолинейный разрез так, что после разворачивания отрезанная часть превратится

а) в правильный треугольник;

б) в равнобедренный треугольник с заданным углом при основании;

в) в треугольник с заданными углами?

**4.5.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8.5*) Дана бесконечная последовательность:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Можно ли выбрать из неё 100 чисел так, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию?

**4.6.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.8*) Даны 2015 попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих $10^7$. Могут ли они все быть составными?

**4.7.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.4*) Заданы 2014 натуральных чисел. Если выбрать из них любые 100 чисел, то среди них окажется хотя бы одно чётное число. Если выбрать из них любые 1916 чисел, то среди них окажется хотя бы одно нечётное число. Может ли сумма всех этих чисел равняться $2014 \cdot 2013$? Ответ обоснуйте.

## 5 «Ломоносов»

**5.1.** (*«Ломоносов», 2012, 7.5, 8.3*) Можно ли разрезать три равных правильных шестиугольника так, чтобы из всех кусков можно было бы сложить один правильный шестиугольник? Ответ обоснуйте.

**5.2.** (*«Ломоносов», 2016, 9.2*) Можно ли нанести на грани двух кубиков неотрицательные целые числа так, чтобы при случайном бросании сумма выпавших очков могла быть равна любому целому числу от 1 до 36? Если это возможно, то в ответе укажите сумму всех 12 чисел на гранях; если невозможно — в ответе запишите 0.

**5.3.** (*«Ломоносов», 2015, 9.6*) Последовательность задана рекуррентным соотношением

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 3.$$

Может ли число $a_{2015} - a_{2011} - 39$ быть простым?

**5.4.** (*«Ломоносов», 2009.4*) Можно ли данный двугранный угол величиной $90^\circ$ пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной $130^\circ$?

**5.5.** (*«Ломоносов», 2010.9*) На доске написан квадратный трёхчлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при $x$, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число $m$ свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Ваня получает оценку «пять». Может ли он обеспечить себе «пятёрку» при любых действиях Тани, если а) $m = 2$; б) $m = 3$?

## 6 «Высшая проба»

**6.1.** (*«Высшая проба», 2014, 8.2, 9.1*) Известно, что ни одно из чисел $a$, $b$, $c$ не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел $ab$, $bc$, $ca$, $abc$ — целое?

**6.2.** (*«Высшая проба», 2020, 8.3*) Имеется прямоугольный параллелепипед. Вася считает, что при увеличении каждого из его рёбер на 1 см полная поверхность параллелепипеда увеличится на 9 см$^2$, а объём увеличится на 5 см$^3$. Может ли он оказаться прав?

*Замечание.* Прямоугольный параллелепипед — пространственная фигура, напоминающая куб, но, рёбра, выходящие из одной вершины, у неё могут иметь различную длину. Её объём равен произведению длин трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

**6.3.** (*«Высшая проба», 2013, 8.3, 9.2*) Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы а) центр круга находился на границе каждой из частей и б) из некоторых частей, полученных в результате разрезания, можно было составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник? Если можно, то опишите разрезание и укажите, как составить шестиугольник из полученных частей; если нет, то докажите, что нельзя.

**6.4.** (*«Высшая проба», 2019, 7.6, 8.6*) Имеется несколько монет, каждая стоит целое число тугриков. Известно, что этими монетами можно набрать любую другую сумму от 1 до 51 тугрика включительно, кроме суммы в 50 тугриков. Обязательно ли этими монетами можно набрать сумму ровно в 100 тугриков?

**6.5.** (*«Высшая проба», 2013, 8.6*) Верхняя полуплоскость разбита на квадратные клетки. Костяшка домино занимает две соседние по стороне клетки. Можно ли заполнить некоторые из клеток неперекрывающимися костяшками домино так, чтобы в каждой строке и каждом столбце оказалось заполненным нечётное число клеток? Если можно, то опишите конфигурацию; если нет, то докажите, что нельзя.

**6.6.** (*«Высшая проба», 2015, 8.6, 9.4, 11.2*) В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос — на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \rightleftarrows \mathcal{E}$ и $\$ \rightleftarrows$ Б в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

**6.7.** (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 9.1, 10.1*) Числа от 1 до 2011 выписаны в ряд в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки $+$ и $-$ так, чтобы значение полученного выражения было полным квадратом?

**6.8.** (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 9.2, 10.2, 11.2*) Существует ли квадратный трёхчлен

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

такой, что $f(0) = 2011$, $f(2011) = 0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т. е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном $n$.)

**6.9.** (*«Высшая проба», 2012, 9.6*) На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках — параллелограммы?

**6.10.** (*«Высшая проба», 2014, 10.1*) Могут ли ненулевые числа $x$, $y$ и $z$ удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 - y, \\ y^2 + y = z^2 - z, \\ z^2 + z = x^2 - x\,? \end{cases}$$

**6.11.** (*«Высшая проба», 2018, 10.2, 11.2*) Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами $(a, b)$ освещает точки $(x, y)$ с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей так, что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению.)

**6.12.** (*«Высшая проба», 2015, 10.3*) В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{7}}{\overset{5}{\rightleftarrows}} \text{Б}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос — на 1/15 доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять 101/43 енота на 606/43 банана). Обмены $\$ \rightleftarrows \mathcal{E}$ в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

**6.13.** (*«Высшая проба», 2012, 10.6*) Существует ли набор выпуклых четырёхугольников, который является набором всех граней как двух выпуклых многогранников, так и одного?

**6.14.** (*«Высшая проба», 2014, 11.2*) Через вершины правильного шестиугольника проведены шесть различных параллельных прямых. Может ли оказаться так, что все попарные расстояния между этими прямыми являются целыми числами?

# 7 ОММО

**7.1.** (*ОММО, 2012.1*) На 100 мест за круглым столом посадили 50 мужчин и 50 женщин. Будем называть человека *довольным*, если у него есть сосед противоположного пола. Может ли отношение числа довольных мужчин к числу довольных женщин быть больше 1,9?

**7.2.** (*ОММО, 2011.2*) Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:

1) прибавить по баллу за каждый экзамен;

2) за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

# 8 «Курчатов»

**8.1.** (*«Курчатов», 2015, 8.1*) Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 8 раз больше, чем в другой?

**8.2.** (*«Курчатов», 2015, 9.2*) Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 8,5 раз больше, чем в другой?

**8.3.** (*«Курчатов», 2015, 8.5, 9.5*) Вначале на каждой клетке шахматной доски $8 \times 8$ стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т. п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 63 хода собрать все шашки на одной клетке?

**8.4.** (*«Курчатов», 2015, 10.3, 11.3*) Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа $N$ (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа $N$ (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

**8.5.** (*«Курчатов», 2015, 10.5, 11.5*) Вначале на каждой клетке доски $100 \times 100$ стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т. п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 9999 ходов собрать все шашки на одной клетке?

**8.6.** (*«Курчатов», 2015, 11.6*) Для приготовления картофельного пюре повару Коле надо как можно быстрее получить заданный объём очищенной картошки. Не заботясь об экономии очисток, он из шарообразных картофелин вырезает кубики, каждым взмахом ножа очищая по одной грани. Может ли он справиться с заданием быстрее при той же частоте взмахов ножа, если будет вырезать какие-нибудь другие многогранники? (Формально: верно ли, что из всех многогранников, вырезаемых из данного шара, наибольшее отношение объема к числу граней — у вписанного куба?)

**8.7.** (*«Курчатов», 2014, 11.6*) На квадратной пластинке со стороной 1 см сидит вирус-невидимка Вася. Он и доктор Петя ходят по очереди. Очередным $n$-м ходом Петя рисует вакциной как чернилами отрезок длиной 1 микрон, а затем Вася должен выбрать направление и проползти в этом направлении *по прямой* расстояние $1/n$ микрона (не выходя за край пластинки). Если Вася проползёт через любую из точек с вакциной или коснётся её, он погибнет. Петя может действовать с любой точностью. Может ли он за конечное число ходов наверняка погубить вирус?