Куб

Задача 1. (*Моск. матем. регата, 2011, 10*) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1 точки T, P и Q — центры граней $AA'B'B$, $A'B'C'D'$ и $BB'C'C$ соответственно. Найдите расстояние от точки P до плоскости ATQ.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Задача 2. (*Турнир городов, 1996, 10–11*) Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Задача 3. (*Турнир городов, 1997, 10–11*) Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри куба и равноудалённых от трёх скрещивающихся рёбер a, b, c этого куба.

Задача 4. (*Турнир городов, 1997, 10–11*) Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1). Найдите объём исходного куба.

$\boxed{125}$

Задача 5. (*Турнир городов, 2001, 10–11*) Для какого наибольшего n можно выбрать на поверхности куба n точек так, чтобы не все они лежали в одной грани куба и при этом были вершинами правильного (плоского) n-угольника?

Задача 6. (*Турнир городов, 2003, 10–11*) Можно ли поверхность куба оклеить без пропусков и наложений тремя треугольниками?

Задача 7. (*Турнир городов, 2012, 10–11*) Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше, чем $6\sqrt{2}$.

Задача 8. (*ММО, 2016, 11*) Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя её точками было:
а) меньше $4/5$;
б) меньше $4/7$?
Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

Задача 9. (*ММО, 1996, 11*) В пространстве даны восемь параллельных плоскостей таких, что расстояния между каждыми двумя соседними равны. На каждой из плоскостей выбирается по точке. Могут ли выбранные точки оказаться вершинами куба?

Задача 10. (*ММО, 1991, 10*) Куб размером $10 \times 10 \times 10$ сложен из 500 чёрных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков так, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1 \times 1 \times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, не хватало ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых чёрных кубиков делится на 4.

Задача 11. (*ММО, 2017, 11.5*) На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые служат вершинами меньшего куба. Найдите все значения, которые может принимать длина ребра этого куба.

Задача 12. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 10*) На каждой из двенадцати диагоналей граней куба выбирается произвольная точка. Определяется центр тяжести этих двенадцати точек. Найдите геометрическое место всех таких центров тяжести.

Задача 13. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделённый перегородками на единичные кубики?

Задача 14. (*Всеросс., 1998, округ, 10*) Куб со стороной n ($n \geqslant 3$) разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

Задача 15. (*Всеросс., 1995, округ, 10*) N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (то есть вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N такое ожерелье из кубиков можно упаковать в кубическую коробку с ребром длины N?

Задача 16. (*Всеросс., 1997, финал, 11*) Куб $n \times n \times n$ сложен из единичных кубиков. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная, каждое звено которой соединяет центры двух соседних (имеющих общую грань) кубиков. Назовем *отмеченными* грани кубиков, пересекаемые данной ломаной. Докажите, что ребра кубиков можно покрасить в два цвета так, чтобы каждая отмеченная грань имела нечётное число, а всякая неотмеченная грань — чётное число сторон каждого цвета.

Задача 17. (*Турнир городов, 1988, 9–10*) Куб $20 \times 20 \times 20$ составлен из 2000 кирпичей размером $2 \times 2 \times 1$. Докажите, что его можно проткнуть иглой так, чтобы игла прошла через две противоположные грани и не уткнулась в кирпич.

Задача 18. (*Турнир городов, 1993, 10–11*) Дан куб с ребром длины n см. В нашем распоряжении имеется длинный кусок изоляционной ленты шириной 1 см. Требуется обклеить куб лентой, при этом лента может свободно переходить через ребро на другую грань, по грани она должна идти по прямой параллельно ребру и не свисать с грани вбок. На сколько кусков необходимо разрезать ленту, чтобы обклеить куб?

Задача 19. (*Турнир городов, 2014, 10–11*) Космический аппарат сел на неподвижный астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат проехал по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Всё это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там точно определили трёхмерную траекторию аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ездил аппарат?