Конкуррентность

В любом треугольнике медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры к сторонам являются *конкуррентными*, то есть пересекаются в одной точке.

Этот факт часто используется при решении задач: например, если в треугольнике ABC известно, что AA_1 и BB_1 — высоты, и пересекаются они в точке H, то $CH \perp AB$.

Задача 1. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 8–9*) Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

Задача 2. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

Задача 3. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.3*) В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD. Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$.

Задача 4. (*Олимпиада Эйлера и Всеросс., 2018, РЭ, 8.4, 9.3*) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

Задача 5. (*ММО, 2012, 8.4, 9.3*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

Задача 6. (*ММО, 2014, 8.4*) В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

Задача 7. (*ММО, 2011, 8.5*) Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

Задача 8. (*Турнир городов, 2011, 8–9*) В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP, в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.