# Комбинации фигур

**1.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016.4*) Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 3$. В каком отношении делит боковую сторону $SB$ сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

$\boxed{5:8}$

**2.** (*«Ломоносов», 2014.7*) В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку $A$ и середины рёбер $BB_1$ и $CC_1$.

$\boxed{\frac{12\pi}{5}}$

**3.** (*МФТИ, 1997.5*) Внутри цилиндра лежат два шара радиуса $r$ и один шар радиуса $2r$ так, что каждый шар касается двух других, верхнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

$\boxed{\frac{17+7\sqrt{7}}{12}r}$

**4.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014.5*) На основании прямого кругового конуса расположны три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвёртый шар того же радиуса касается первых трёх и боковой поверхности конуса. Найдите объём конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвёртым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

$\boxed{\frac{\pi}{6}\left(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^3}$

**5.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013.5*) Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по $90^\circ$. Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

$\boxed{2\arccos\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$

**6.** (*ОММО, 2015.10*) В конус вписан цилиндр объёма 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объёмом 91. Найдите объём исходного конуса.

$\boxed{94{,}5}$

**7.** (*МФТИ, 2003.6*) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся:
а) ребер $BA$, $BB_1$, $BC$ и плоскости $A_1DC_1$;
б) ребер $BA$, $BB_1$, $BC$ и прямой $DA_1$.

$\boxed{\text{а) } \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}\text{; б) } 2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

**8.** (*МФТИ, 2001.6*) Сторона основания $ABC$ правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, угол $DAB$ равен $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{37}{3}}$. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — середины ребер $AD$, $BD$, $CD$ соответственно. Найти:

1. угол между прямыми $BA_1$ и $AC_1$;
2. расстояние между прямыми $BA_1$ и $AC_1$;
3. радиус сферы, касающейся плоскости $ABC$ и отрезков $AC_1$, $BA_1$ и $CB_1$.

1) $\arccos\frac{11}{32}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{301}}$; 3) 2

**9.** (*«Физтех», 2020.4*) а) Сфера с центром $O$ касается боковых рёбер $SA$, $SB$, $SC$ пирамиды $SABC$ в точках $K$, $L$, $M$ соответственно, а также касается её основания $ABC$. Через точку сферы, ближайшую к точке $S$, проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos\frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите площадь треугольника $KLM$.

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости $KLM$ и $ABC$ параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.

а) $S_{KLM} = 9{,}8$; б) $V_{SABC} = \frac{1372}{3}$

**10.** (*«Физтех», 2019.7*) На рёбрах $AC$, $BC$, $BS$, $AS$ правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной $S$ выбраны точки $K$, $L$, $M$, $N$ соответственно. Известно, что точки $K$, $L$, $M$, $N$ лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности $\Omega_1$ и $\Omega_2$, причём окружность $\Omega_1$ касается сторон $KN$, $KL$ и $LM$, а окружность $\Omega_2$ касается сторон $KN$, $LM$ и $MN$. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями $\Omega_1$ и $\Omega_2$ соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина $P$ конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре $AB$, а вершина $Q$ конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре $CS$.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка $CQ$.

а) $\angle SAB = \arccos\frac{1}{6}$; б) $CQ = \frac{52}{3}$

**11.** (*«Физтех», 2019.7*) Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник $ABA_1$ — равносторонний. На ребре $CC_1$, перпендикулярном основанию $ABC$ пирамиды, лежит точка $M$ такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера $\Omega$ с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника $ABA_1$ и касается отрезка $CC_1$ в точке $M$.

а) Найдите длину ребра $AB$.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой $CC_1$ и плоскостью $ABA_1$, а также длину ребра $A_1C_1$.

а) $AB = \sqrt{15}$; б) $\angle(CC_1, ABA_1) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$, $A_1C_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$

**12.** (*«Физтех», 2018.7*) Ребро $A_1A$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера $\Omega$ касается рёбер $BB_1$, $B_1C_1$, $C_1C$, $CB$, $CD$, и при этом касается ребра $CD$ в такой точке $K$, что $CK = 4$, $KD = 1$.

а) Найдите длину ребра $A_1A$.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера $\Omega$ касается ребра $A_1D_1$. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и радиус сферы $\Omega$.

$A_1A = 8$; $V = 256$, $R = 2\sqrt{5}$

**13.** (*«Физтех», 2018.7*) На ребре $BC$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка $M$. Сфера, построенная на отрезке $C_1M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 8$. Найдите длину ребра $AA_1$, радиус сферы и объём параллелепипеда.

$AA_1 = 10$, $R = 3$, $V = 162$

**14.** (*«Физтех», 2015.5*) На ребре $BB_1$ правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка $T$ такая, что $BT : B_1T = 2 : 5$. Точка $T$ является вершиной прямого кругового конуса, такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 7$. Найдите объём конуса.

а) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; б) $\frac{3500\pi}{37\sqrt{37}}$

**15.** (*«Физтех», 2015.5*) На ребре $SA$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной $S$ отмечена точка $K$ такая, что $AK : KS = 1 : 4$. Точка $K$ является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $DS : BC$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$

**16.** (*«Физтех», 2015.7*) В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится ромб $ABCD$, в котором $CD = 3$ и $\angle ABD = 30°$. Сфера проходит через вершины $D$, $C$, $B$, $B_1$, $A_1$, $D_1$.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки $A$, $C$ и $D$.

б) Найдите угол $C_1AB$.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

а) $9\pi$; б) $90°$; в) 81

**17.** (*«Физтех», 2014.7*) Даны пирамида $ABCD$ и сфера. Ребро $AC$ пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол $ABC$, длину ребра $BD$ и объём пирамиды $ABCD$, если $AC = 6$.

$45°$, 12, $18\sqrt{3}$

**18.** (*«Физтех», 2014.7*) В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины $S$ опустили высоту $SH$. Известно, что $AB > BC$, $AB > AC$. Сфера, построенная на отрезке $SH$ как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, и её радиус равен 3.

а) Найдите длину ребра $AB$ и угол $ACB$.

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину $C$ и середину ребра $SA$, касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

$\boxed{12,\ 90^\circ,\ 36\sqrt{3}}$

**19.** (*«Физтех», 2013.7*) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник $ABC$ с гипотенузой $BC = 4$. Сфера $\omega$ касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть $\Omega$ — сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер $\omega$ и $\Omega$.

б) Найдите отношение радиусов сфер $\omega$ и $\Omega$.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями $SAB$ и $ABC$ равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

$\boxed{\text{а) } 0;\ \text{б) } 1:2;\ \text{в) } 4}$

**20.** (*«Физтех», 2013.7*) Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость $\alpha$ имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ в точках $K$, $N$, $P$ соответственно. Найдите отношения $CP : PC_1$ и $BN : NB_1$, если $AK : KA_1 = 1 : 12$.

$\boxed{CP : PC_1 = 25 : 27,\ BN : NB_1 = 49 : 3 \text{ или } CP : PC_1 = 49 : 3,\ BN : NB_1 = 25 : 27}$

**21.** (*«Физтех», 2011.6*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $ABC$ равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера с центром $O$ на прямой $SB$ касается рёбер $SA$, $SC$ и $AC$. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей $ASC$ и $ABC$, а также радиус сферы.

$\boxed{\frac{3}{7}\sqrt{\frac{23}{2}};\ \frac{1}{7}\sqrt{\frac{23}{3}};\ \frac{8\sqrt{2}}{7}}$

**22.** (*«Физтех», 2011.6*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABC$ равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром $O$ на плоскости $ABS$ касается рёбер $SC$, $SD$ и $CD$. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей $ABC$ и $BCS$, а также радиус сферы.

$\boxed{\frac{\sqrt{23}}{11};\ \frac{8}{11}\sqrt{\frac{23}{6}};\ \frac{4\sqrt{29}}{11}}$

**23.** (*«Физтех», 2010.6*) Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник $ABC$ со стороной 5. Боковое ребро $SC$ перпендикулярно основанию и имеет длину 12. Сфера, центр $O$ которой лежит в плоскости $SBC$, касается рёбер $SA$, $AB$ и $AC$ в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Найдите $AA_1$, расстояние от точки $O$ до ребра $BC$ и радиус сферы.

$\boxed{\frac{15}{4};\ \frac{5}{2};\ \frac{5\sqrt{7}}{4}}$

**24.** (*«Физтех», 2009.4*) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки $K$, $L$, $M$ лежат на отрезках $A_1B$, $B_1C$, $C_1D$ соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 4.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых $A_1B$, $B_1C$, $C_1D$ в точках $K$, $L$, $M$ соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $KLM$, расстояние от центра сферы до плоскости $KLM$ и объём призмы.

$\boxed{\frac{2\sqrt{21}}{5};\ \frac{4}{5};\ 3\sqrt{3}}$

**25.** (*«Физтех», 2008.4*) В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера $\omega$ радиуса $\frac{77}{20}$ с центром $O$ касается рёбер $AS$, $BS$, $AD$, $BC$ пирамиды $SABCD$ соответственно в точках $K$, $L$, $M$, $N$, пересекает ребро $AB$ в точках $P$ и $Q$ и касается грани $CDS$. Известно, что прямая $SO$ перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке $H$, $\frac{PQ}{AB} = \sqrt{\frac{23}{72}}$, $\frac{AK}{BS} = \frac{1}{3}$. Найдите углы $SAB$ и $BSH$, высоту пирамиды и её объём.

$\boxed{\arccos\frac{2\sqrt{2}}{37};\ \arcsin\frac{11}{21};\ 8;\ \frac{576\sqrt{2}}{5}}$

**26.** (*«Физтех», 2007.6*) Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара $\omega_1$ и $\omega_2$, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар $\omega_1$ касается граней $ABCD$, $CDD_1C_1$, $BCC_1B_1$, а шар $\omega_2$ касается граней $A_1B_1C_1D_1$, $ADD_1A_1$, $ABB_1A_1$. Известно, что $C_1D_1 = 20 - \sqrt{11}$, $AD = 20$, $BB_1 = 20 + \sqrt{11}$. Найти расстояние между центрами шаров $\omega_1$ и $\omega_2$. Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

$\boxed{d = 13;\ V_{\max} = \left(\frac{4537}{3} - 182\sqrt{11}\right)\pi,\ V_{\min} = \frac{2197\pi}{3}}$

**27.** (*МФТИ, 1995.4*) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно $\sqrt{14}$, длина стороны основания $ABCD$ призмы равна 6. Окружность основания прямого кругового конуса вписана в треугольник $BC_1D$, а вершина конуса лежит в плоскости $ABC_1$. Найти объем конуса.

$\boxed{V = \frac{9\sqrt{14}}{20}\pi}$

**28.** (*МФТИ, 1994.4*) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB : BC = 2 : 3$. Точки $F$ и $F_1$ — середины ребер $BC$ и $B_1C_1$ соответственно. Сфера касается всех звеньев ломаной $AFDD_1A_1$ и пересекает отрезок $F_1F$ в точках $F_1$ и $E$. Найти объем параллелепипеда и радиус сферы, если $F_1E = 3/2$.

$\boxed{V = \frac{12}{15},\ R = \frac{\sqrt{13}}{4}\ (AB = 1,\ BC = \frac{3}{2},\ AA_1 = \frac{8}{5})}$

**29.** (*МФТИ, 1994.5*) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ имеет длину $11/5$ и составляет с плоскостью основания $ABC$ угол, равный $\operatorname{arctg}\left(5\sqrt{2}/4\right)$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра $AC$ и не пересекает грань $SAB$. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости $SAB$ и $SBC$ — прямоугольники с общей вершиной в точке $S$. Найти объем цилиндра.

$\boxed{V = 70\pi}$

**30.** (*МФТИ, 1994.5*) Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1 : 6 : 2$, считая от центра одного из оснований. Найти объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 8 друг от друга.

$\boxed{V = 98\pi\sqrt{6}}$

**31.** (*МФТИ, 1998.5*) Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Найти расстояние от точки $D$ до плоскости $SAB$.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник $SCD$, а вершина принадлежит грани $SAB$. Найти объем конуса.

$\boxed{\frac{\sqrt{30}}{4},\ \frac{\pi\sqrt{30}}{28}}$

**32.** (*МФТИ, 2008.6*) На основании $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ расположена точка $O$. Сфера с центром в точке $O$ касается прямых $SA$, $SB$, $SC$, $SD$ в точках $A$, $B$, $K$, $L$ соответственно. Известно, что $AB = KL = 2\sqrt{5}$, $AL = 2$, $BK = 6$, а отрезок $SO$ составляет с плоскостью $ABCD$ угол $\arccos\frac{2}{3}$. Найти длины отрезков $AK$, $OS$ и $SD$.

$\boxed{AK = 4\sqrt{2},\ OS = 7,\ SD = \frac{(35)^{3/2}}{27}}$

**33.** (*МФТИ, 2005.6*) Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{5}$, $AB = 6$, $SA = 5$, $SB = 7$, $SC = 2\sqrt{10}$. Найти длины рёбер $BC$ и $CD$, радиус сферы и двугранный угол при ребре $SD$.

$\boxed{R = 2\sqrt{\frac{6}{5}},\ BC = 9,\ CD = \frac{24}{5},\ \varphi = 2\arcsin\sqrt{\frac{77}{87}}}$

**34.** (*МФТИ, 2003.6*) Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань $ABC$. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра $DA$, $DB$ и $DC$, а ее центр лежит на грани $ABD$. Радиус цилиндра равен 3, объем пирамиды $ABCD$ равен $27\sqrt{2}$, ребро $AB = 24$. Найти двугранный угол между гранями $ABC$ и $ABD$ и радиус описанной около $ABCD$ сферы.

$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4},\ R = \sqrt{\frac{337}{2}}}$

**35.** (*МФТИ, 1996.5*) В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания $ABC$ равна $a$. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник $ACD$, а вершиной конуса является точка $O$, лежащая на высоте $BE$ треугольника $ABC$ так, что $BE : OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой $B$.

$\boxed{\text{радиус основания конуса } r = \frac{a}{4},\ \text{радиус шара } R = \frac{a\sqrt{13}(8-3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}}$

**36.** (*МГУ, ДВИ, 2012.8*) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник $ABC$ со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые ребра $AS$, $BS$, $CS$ пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости $ABC$ и касается прямых $AC$ и $BC$. Найдите высоту цилиндра.

$\boxed{\frac{5\sqrt{15}}{6}}$

**37.** (*МГУ, мехмат, 2003-03.5*) Точка $O$ расположена в сечении $AA'C'C$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ с размером $2\times6\times9$ так, что $\angle OAB+\angle OAD+\angle OAA' = 180^\circ$. Сфера с центром в точке $O$ касается плоскостей $A'B'C'$, $AA'B$ и не имеет общих точек с плоскостью $AA'D$. Найти расстояние от точки $O$ до этой плоскости.

$\boxed{3}$

**38.** (*МГУ, мехмат, 2002-05.5*) Сфера высекает на ребрах $AB$, $CB$, $AS$ и $CS$ треугольной пирамиды $SABC$ равные отрезки $KL$, $NM$, $K_1L_1$ и $N_1M_1$ соответственно (точки $K$ и $K_1$ лежат ближе к $A$, чем $L$ и $L_1$, а точки $N$ и $N_1$ лежат ближе к $C$, чем $M$ и $M_1$). Известно, что $MM_1 = 2KK_1$ и $2KN = 3L_1M_1$, $\angle SBA = \angle SBC$ и $\angle KK_1N_1 = 90°$. Найти отношение объемов пирамид $SABC$ и $M_1KLMN$.

$\boxed{32 : 5}$

**39.** (*МГУ, мехмат, 2001-05.5*) Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит треугольник со сторонами $AB = BC = 15$ и $AC = 18$. Двугранные углы при ребрах $AB$ и $BC$ равны по $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, а при ребре $AC$ — $\frac{\pi}{4}$. Сфера, центр которой лежит в плоскости $ABC$, касается боковых граней в точках $K$, $L$ и $M$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKLM$.

$\boxed{\frac{9}{266}\sqrt{221}}$

**40.** (*МГУ, мехмат, 2007.6*) Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в $30°$ и $45°$. Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найти величину этого угла.

$\boxed{2\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)^{3/2}}$