Комбинаторика–7

Данный листок является непосредственным продолжением листков «Комбинаторика. Перебор вариантов» и «Комбинаторика. Правило произведения». Он состоит из задач, предлагавшихся на различных олимпиадах в 7 классе.

1. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 7–9*) Назовём число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 — зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

100

2. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 7.5*) Определите, в каком количестве точек пересекаются 10 прямых, если среди них есть только две параллельные и ровно три из этих прямых пересекаются в одной точке.

42

3. (*Математический праздник, 1997, 7.1*) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

Поровну

4. (*Математический праздник, 1996, 7.4*) Сколькими способами можно прочитать в таблице слово

а) КРОНА,

б) КОРЕНЬ,

начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз?

```
КРОНА      К
РОНА      КО
ОНА      КОР
НА      КОРЕ
А      КОРЕН
      КОРЕНЬ
```

а) 16; б) 32

5. (*Математический праздник, 1996, 7.5*) Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

20

6. (*Математический праздник, 1990, 6–7*) Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше — философов или математиков?

Философов (в предположении их существования)

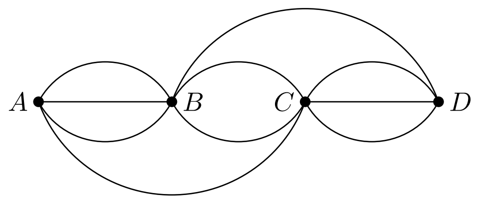
7. (*«Физтех», 2014, 7–8*) На данный момент в классе 20 учеников, получивших с начала учебного года хотя бы одну двойку, 17 учеников, получивших не менее двух двоек, 8 учеников, получивших не менее трёх двоек, три ученика, получивших не менее четырёх двоек, один ученик, получивший пять двоек. Больше пяти двоек нет ни у кого. Сколько всего двоек в журнале?

49

8. (*«Ломоносов», 2015, 7*) Таблицу размера 3×3 надо заполнить числами 2014, 2015 и 2016 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была одинаковой. Сколькими различными способами можно это сделать?

$\boxed{831}$

9. (*«Ломоносов», 2012, 7*) Города A, B, C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке.



Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D, побывав в каждом городе ровно по одному разу?

$\boxed{20}$

10. (*«Ломоносов», 2013, 7*) Сколькими различными способами шахматный король может пройти с поля $e1$ на поле $h5$, если ему разрешается ходить только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо вверх?

$\boxed{129}$

11. (*«Физтех», 2014, 7–8*) Сколько различных натуральных делителей у числа 15552?

$\boxed{42}$

12. (*«Ломоносов», 2013, 7*) а) Сколько натуральных делителей имеет число $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}$?

б) Найдите количество натуральных делителей числа N, не являющихся точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел).

$\boxed{\text{а) 10000; б) 7500}}$

13. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2012, 7–9*) Найдите количество натуральных чисел, которые делятся на 2012 и имеют, не считая единицы и самого этого числа, ровно 2199 различных делителей.

$\boxed{2}$

14. (*«Высшая проба», 2014, 7–8*) Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

$\boxed{333}$

15. (*«Физтех», 2014, 7–9*) Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

$\boxed{45}$

16. (*«Высшая проба», 2014, 7–8*) Трамвайный билет состоит из шести цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр?

$\boxed{540}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–8*) Мария Ивановна — строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четвёрки, причём никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке 6 оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать?

448

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8*) Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

8999999934

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9*) Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (a, b, c — произвольные цифры, не обязательно разные.)

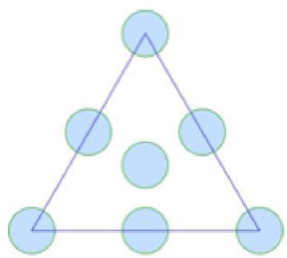
90

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9*) Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

540

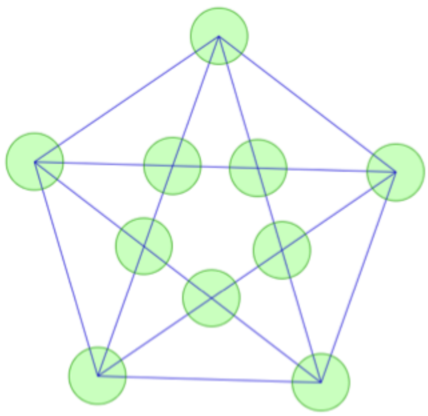
21. (*Московская устная олимпиада, 2015, 7.7*) У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–9*) Поле для игры «7 кругов» представляет собой правильный треугольник и 7 одинаковых кружочков с центрами в вершинах, серединах сторон и центре треугольника. Сколько существует различных способов расставить черные и белые фишки, по одной в каждый кружок? Расстановки, которые переходят друг в друга при повороте, считаются одинаковыми.



48

23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–9*) Поле для игры «10 кругов» представляет собой правильный пятиугольник и 10 одинаковых кружочков с центрами в вершинах и точках пересечения диагоналей пятиугольника. Сколько существует различных способов расставить черные и белые фишки, по одной в каждый кружок? Расстановки, которые переходят друг в друга при повороте вокруг центра пятиугольника, считаются одинаковыми.



208

24. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.9*) Сколькими способами можно заполнить цифрами клетки квадрата размером 3×3 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма цифр была равна 7, а ненулевые цифры не повторялись?

$\boxed{216}$