Окружность

Окружность — это геометрическое место точек плоскости, удалённых от данной точки на данное (ненулевое) расстояние.

На рис. 1 мы видим окружность — геометрическое место точек M, удалённых от точки O на фиксированное расстояние R.

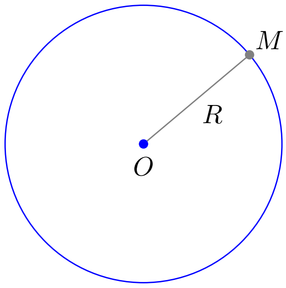

Рис. 1. Окружность с центром O и радиусом R

Точка O называется *центром* окружности, а величина $R = OM$ — *радиусом* окружности. Кроме того, радиусом называется сам отрезок OM.

Хорда — это отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. Также называется диаметром величина, равная удвоенному радиусу окружности.

Описанная окружность

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется *описанной* вокруг этого треугольника.

Мы уже знаем (см. листок «Геометрическое место точек»), что *вокруг любого треугольника можно описать единственную окружность, и центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника* (рис. 2).

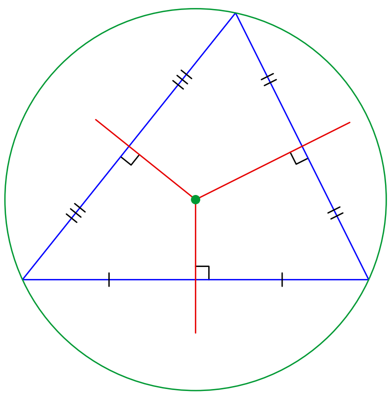

Рис. 2. Описанная окружность

(Напомним, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка. Поэтому серединные перпендикуляры к сторонам треугольника обязаны пересечься в одной точке; эта точка, будучи равноудалена от всех трёх вершин треугольника, служит центром описанной окружности.)

Касательная к окружности

Касательная к окружности — это прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку (которая называется *точкой касания*).

Свойство касательной. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Признак касательной. Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в данную точку, то эта прямая является касательной к окружности.

Обе ситуации проиллюстрированы на рис. 3.

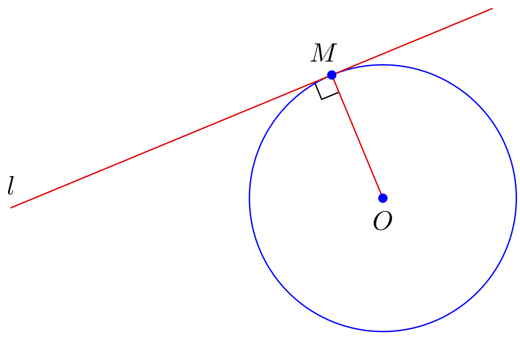

Рис. 3. l — касательная $\Leftrightarrow$ $l \perp OM$

Задача 1. Докажите, что отрезки касательных, проведённых из данной точки к окружности, равны друг другу.

Решение. Пусть точка A лежит вне окружности. Проведём касательные AB и AC (B и C — точки касания; рис. 4).

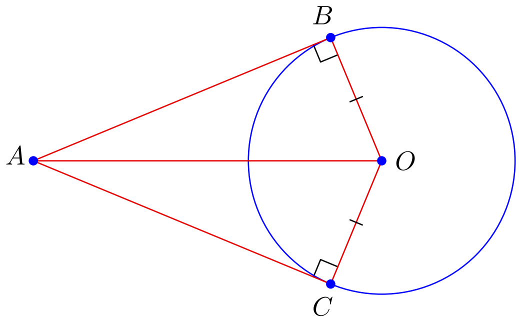

Рис. 4. К задаче 1

Треугольники AOB и AOC — прямоугольные с общей гипотенузой AO. Катеты OB и OC являются радиусами окружности и потому равны друг другу. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta AOC$ по гипотенузе и катету, и потому $AB = AC$ — что требовалось.

Рассмотренная задача проста, но полученный результат чрезвычайно важен. Равенство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, очень часто используется при решении задач.

Вписанная окружность

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Из свойства касательной следует, что радиусы вписанной окружности, проведённые в точки касания, перпендикулярны сторонам треугольника. Следовательно, центр вписанной окружности равноудалён от всех трёх сторон треугольника и поэтому совпадает с точкой пересечения биссектрис.

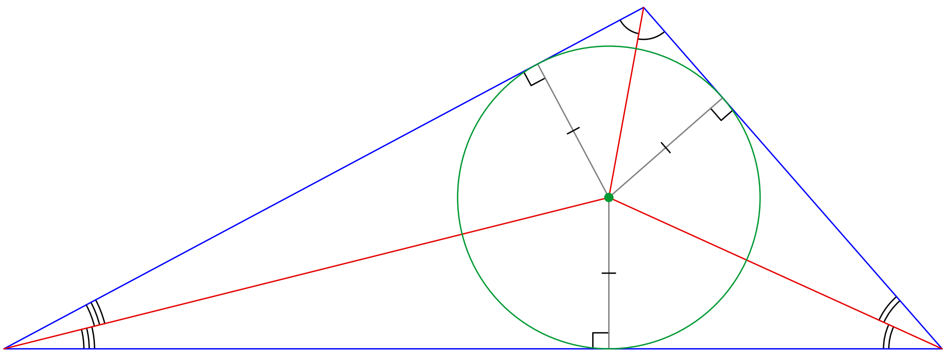

Рис. 5. Вписанная окружность

Таким образом, *в любой треугольник можно вписать единственную окружность, центр которой есть точка пересечения биссектрис треугольника* (рис. 5). Этот факт мы уже отметили в самом конце листка «Геометрическое место точек».

Задача 2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K. Найдите AK, если $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 2$.

Решение. Воспользуемся равенством отрезков касательных к окружности, проведённых из одной точки (рис. 6)

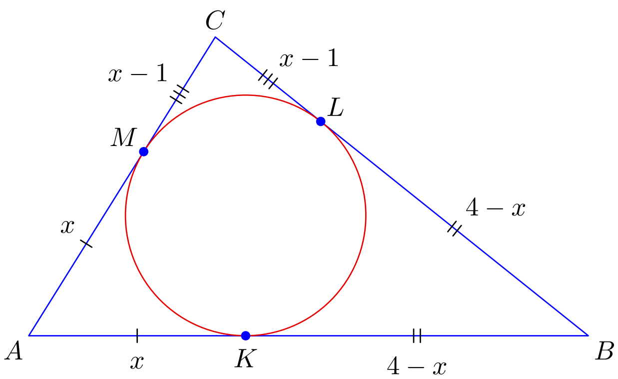

Рис. 6. К задаче 2

Пусть $AK = x$. Тогда и $AM = x$. Отрезок BK равен $4 - x$. Но тогда и $BL = 4 - x$. Далее находим: $CL = 3 - BL = 3 - (4 - x) = x - 1$. Но тогда и $CM = x - 1$. Получаем уравнение:

$$x + (x - 1) = 2,$$

откуда $x = 3/2$.

Ответ: $3/2$.

Задачи

1. *Свойства окружности.*

- Если хорда не является диаметром, то диаметр, проходящий через середину этой хорды, перпендикулярен ей.
- Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.
- Равные хорды удалены от центра на равные расстояния.
- Хорды, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

Докажите эти свойства.

2. Через точку окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

$\boxed{60^\circ}$

3. Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC. Известно, что $\angle BAC = \alpha$. Найдите $\angle BOC$.

$\boxed{2\alpha}$

4. В окружности радиуса 1 угол между радиусами OA и OB равен 60°. Найдите AB.

$\boxed{1}$

5. Найдите угол между радиусами OA и OB, если расстояние от центра O окружности до хорды AB: а) вдвое меньше AB; б) вдвое меньше OA.

$\boxed{\text{а) } 90^\circ;\ \text{б) } 120^\circ}$

6. Дана окружность с центром O. На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC, равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (точка O расположена между точками C и D). Найдите $\angle AOD$, если $\angle ACD = \alpha$.

$\boxed{3\alpha}$

7. Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Докажите, что отрезки этой прямой, заключённые между окружностями, равны.

8. Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке K. Докажите, что KO — биссектриса угла, образованного этими хордами.

9. Прямая l, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно (точка A лежит между B и C). Расстояние между проекциями центров окружностей на прямую l равно 1. Найдите BC.

$\boxed{2}$

10. Даны две перпендикулярные хорды окружности. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

11. Даны две перпендикулярные хорды окружности. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные a и b ($a < b$). Найдите растояние от центра окружности до каждой хорды.

$\boxed{\frac{b-a}{2}}$

12. Докажите, середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной вокруг него окружности.

13. Найдите геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом (то есть $\angle AMB = 90^\circ$).

Окружность с диаметром AB и выколотыми точками A, B

14. В треугольнике ABC провели высоты AE и BH. Докажите, что точки A, H, E, B лежат на одной окружности.

15. Через точку A, лежащую на окружности, проведены диаметр AB и хорда AC. Известно, что $AC = 4$ и $\angle BAC = 30^\circ$. Найдите хорду CD, перпендикулярную AB.

$\boxed{4}$

16. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности. Длины хорд равны 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

6 и 8

17. В окружности проведены диаметр AB и параллельные хорды AC и BD. Докажите, что $AC = BD$, а CD — также диаметр.

18. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N. Докажите, что окружность, построенная на отрезке MN как на диаметре, проходит через точку A.

19. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.

$\boxed{1}$

20. Две окружности пересекаются в точках A и B, AC и AD — диаметры окружностей. Докажите, что точки B, C, D лежат на одной прямой.

21. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон.

22. а) Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

б) Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

23. Докажите, что касательные к окружности, проведённые через концы диаметра, параллельны.

24. Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведённые через эти точки, пересекаются в точке C, причём $AB = AC$. Найдите углы треугольника ABC.

$\boxed{60^\circ, 60^\circ, 60^\circ}$

25. Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Найдите углы треугольника AOB.

$\boxed{120^\circ, 30^\circ, 30^\circ}$

26. Даны две концентрические окружности. Хорда большей окружности касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

27. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на биссектрисе угла.

28. Окружность радиуса 3 касается сторон угла, равного 120°, в точках A и B. Найдите AB.

$\boxed{3}$

29. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C. Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

$\boxed{80^\circ}$

30. Две прямые, пересекающиеся в точке C, касаются окружности в точках A и B, причём $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что $AC + BC = OC$.

31. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключённый между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

32. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABM и ACM вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Докажите, что $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$.

33. Найдите углы треугольника, если центры его вписанной и описанной окружностей совпадают.

$\boxed{60^\circ, 60^\circ, 60^\circ}$

34. Окружности радиусов R и r, центры которых расположены по разные стороны от некоторой прямой, касаются этой прямой. Линия центров пересекает эту прямую под углом 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей.

$\boxed{2(R + r)}$

35. В прямой угол вписана окружность радиуса R, касающаяся сторон угла в точках A и B. Через точку меньшей дуги AB проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

$\boxed{2R}$

36. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

$\boxed{a}$

37. К окружности, вписанной в квадрат со стороной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

$\boxed{a}$

38. Прямая, параллельная хорде AB, касается окружности в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

39. Точка A лежит вне окружности S с центром O. Окружность с диаметром OA пересекается с окружностью S в точках B и C. Докажите, что прямые AB и AC касаются окружности S.

40. Из точки, лежащей вне двух концентрических окружностей, проведены четыре касательные к этим окружностям. Докажите, что исходная точка и четыре точки касания лежат на одной окружности.

41. Точка M расположена вне окружности с центром O. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок AM делится прямой AB?

$\boxed{1 : 3 \text{ (считая от точки } O)}$

42. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

$\boxed{30^\circ, 60^\circ}$

43. Расстояние между равными параллельными хордами AB и CD равно радиусу окружности. Найдите угол между прямыми AC и BD.

$\boxed{60^\circ}$

44. В окружности проведены равные хорды AB и CD. Их продолжения за точки B и C соответственно пересекаются в точке E. Докажите, что треугольники ADE и BCE равнобедренные.

45. Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом 25°. Найдите угол между прямыми AC и BD.

$\boxed{25^\circ}$

46. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках E и F (отличных от A). Докажите, что $AE = AF$.

47. На сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся (помимо A) в точке D. Докажите, что точки B, C, D лежат на одной прямой.

48. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите острые углы треугольника,

$\boxed{45^\circ, 45^\circ}$

49. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1 : 3$. Найдите острые углы треугольника,

$\boxed{30°, 60°}$

50. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K (отличной от A), а окружность с центром B — в точках M и N. Докажите, что $KM = KN$.

51. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке K, а биссектрисы внешних углов B и C пересекаются в точке L. Докажите, что точки B, C, K, L лежат на одной окружности.

52. Точки A, B, C, D последовательно расположены на окружности так, что центр O окружности лежит внутри четырёхугольника $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и DE соответственно. Докажите, что $\angle KON + \angle LOM = 180°$.

53. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены четыре окружности. Докажите, что общая хорда окружностей, построенных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей.

54. Точки D, E и F — середины сторон AB, BC и AC (соответственно) равностороннего треугольника ABC. Докажите, что прямая DE касается окружности, проходящей через точки C, E, F.

55. Окружность вписана в треугольник со сторонами 5, 7 и 10. Найдите отрезки, на которые наибольшая сторона делится точкой касания.

$\boxed{\text{4 и 6}}$

56. Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по разные стороны от прямой OA. Найдите угол CAD, если $\angle AOD = 110°$.

$\boxed{125°}$

57. Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA. Найдите угол CAD, если $\angle AOD = 110°$.

$\boxed{55°}$

58. (*Свойство описанного четырёхугольника*) Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Докажите.

59. Окружность высекает на сторонах четырёхугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

60. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке K и продолжений двух других сторон. Докажите, что периметры треугольников ABK и ACK равны.

61. В равнобедренный треугольник с основанием a вписана окружность. К окружности проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника три маленьких треугольника. Найдите боковую сторону данного треугольника, если сумма периметров маленьких треугольников равна b.

$\boxed{\frac{b-a}{2}}$

62. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите угол KLM, если $\angle A = 70°$.

$\boxed{55°}$

63. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите угол BOC, если $\angle KLM = \alpha$.

$\boxed{180° - \alpha}$

64. Дан прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите, что радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен $(a + b - c)/2$.

65. Из вершины C прямого угла треугольника ABC проведена высота CH. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACH и BCH, равна CH.

66. Сторона BC треугольника ABC равна a, полупериметр треугольника равен p. Вписанная окружность касается стороны AB в точке K. Докажите, что $AK = p - a$.

67. CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.

$\boxed{1}$

68. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D так, что $BD - AD = 10$. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках E и F. Найдите EF.

$\boxed{5}$

69. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжений сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны BC в точке K, а стороны AB — в точке L. Докажите, что:

а) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC;

б) $BK = CM$;

в) $NL = BC$.

70. В треугольник со сторонами 3, 5 и 6 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бóльшие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

$\boxed{8}$

71. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные двух окружностей пересекаются на прямой, проходящей через центры окружностей.

72. Докажите, что центры двух касающихся окружностей и точка касания лежат на одной прямой.

73. Окружность с центром O касается внутренним образом большей окружности в точке A. Из точки B большей окружности, диаметрально противоположной точке A, проведена хорда BC, касающаяся меньшей окружности в точке K. Докажите, что $OK \parallel AC$.

74. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекают их общую касательную, проходящую через K, в точке M. Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90°$.

75. В угол, равный $60°$, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

$\boxed{3r}$

76. Две окружности касаются внутренним образом. Два радиуса большей окружности, угол между которыми $60°$, касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

$\boxed{1 : 3}$

77. Две окружности касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает эти окружности вторично в точках B и C соответственно. Докажите, что касательные, проведённые к этим окружностям в точках B и C, параллельны.

78. (*Признак описанного четырёхугольника*) Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Докажите.