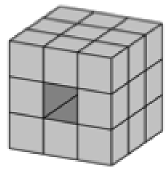
Шахматная раскраска

1. (*«Курчатов», 2017, 6.3*) В одной из клеток бесконечного клетчатого листа бумаги сидит лягушонок. За один прыжок он смещается в соседнюю по стороне клетку. Назовем клетку *прекрасной*, если лягушонок может в ней оказаться ровно через 2017 прыжков. Сколько всего прекрасных клеток?

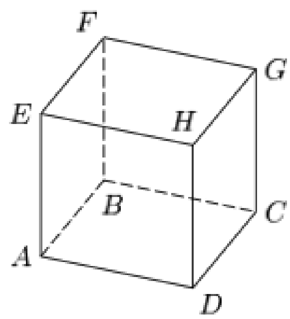
2018^2

2. (*Математический праздник, 1990, 6–7.3*) Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

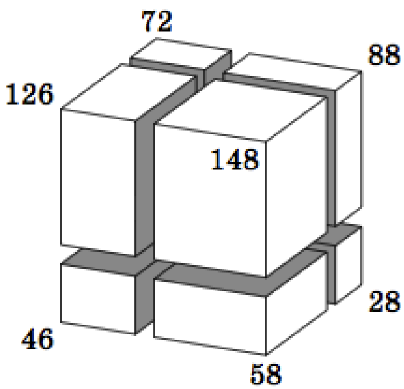
3. (*«Ломоносов», 2019, 5–6.5, 7–8.6*) Из 24 одинаковых деревянных кубиков склеили «трубу» — куб $3 \times 3 \times 3$ с убранной «сердцевиной» из трёх кубиков (см. рисунок). Можно ли в каждом квадратике на поверхности «трубы» провести диагональ так, чтобы получился замкнутый путь, который ни через одну вершину не проходит дважды?



4. (*Математический праздник, 2000, 6.5*) В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа. (В решении достаточно написать четыре тройки вершин, в которые последовательно стреляют охотники.)



5. (*Математический праздник, 2011, 6.6*) Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рисунке у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска?



22

6. (*Турнир Архимеда, 2014.5*) Вася оклеил (без наложений и разрывов) грани куба $5 \times 5 \times 5$ бумажными полосками 2×1, причём некоторые полоски оказались согнуты пополам (остальные полоски не согнуты). Каждая полоска покрывает ровно две клетки. Могло ли число согнутых полосок оказаться чётным?

Нет

7. (*Математический праздник, 2001, 7.5*) Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

8. (*Математический праздник, 2000, 7.6*) Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с ним общую грань, причём запрещено ходить два раза подряд в одном направлении?

Нет

9. (*Московская устная олимпиада, 2011, 7.7*) На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают с вершинами куба. Какое наименьшее количество звеньев этой ломаной может совпасть с рёбрами куба?