Большее в меньшем

Можно ли внутри фигуры поместить «такую же» фигуру, но «больше»? Например, может ли внутри треугольника располагаться треугольник большего периметра? Или внутри тетраэдра — тетраэдр большего периметра?

Данный листок посвящён различным подходам к одной геометрической задаче, которая была предложена в далёком 1982 году на Всесоюзной олимпиаде по математике[1].

Задача. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на рёбрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех рёбер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $4/3$ суммы длин всех рёбер тетраэдра $ABCD$.

Эта задача была четвёртой в варианте второго дня, и решили её лишь четыре человека из пятидесяти трёх (среди них был Григорий Перельман — в то время десятиклассник, а ныне один из крупнейших современных математиков). При этом было найдено три различных решения: одно — чисто геометрическое, не требующее ничего кроме неравенства треугольника; второе использовало усреднение проекций векторов на различные прямые, а третье базировалось на идее выпуклой оптимизации и по сути совпадало с авторским. Со всеми тремя решениями мы и познакомимся.

Задача 1. Один тетраэдр расположен внутри другого. Может ли периметр (т. е. сумма длин рёбер) внутреннего тетраэдра быть больше периметра внешнего?

Задача 2. Один треугольник расположен внутри другого. Может ли периметр внутреннего треугольника быть больше периметра внешнего?

Геометрическое решение

Вначале рассмотрим решение, не выходящее за рамки школьной геометрии и требующее минимума технических средств.

Задача 3. Назовём грань тетраэдра *наибольшей*, если её периметр не меньше периметра каждой из остальных граней. Докажите, что периметр тетраэдра не превосходит удвоенного периметра его наибольшей грани.

Задача 4. Треугольник расположен внутри выпуклого многоугольника. Докажите, что периметр треугольника не превосходит периметра многоугольника.

Задача 5. Какой фигурой может быть проекция тетраэдра на плоскость? Докажите, что периметр фигуры-проекции меньше $2/3$ суммы длин проекций рёбер тетраэдра на эту плоскость.

Задача 6. Решите **Задачу**.

[1] Уровень Всесоюзной олимпиады был выше нынешней Всероссийской, так как помимо России в ней участвовали лучшие школьники союзных республик: Украины, Белоруссии, Закавказья, Прибалтики, ... (сейчас бывшие республики сами по себе являются сильными математическими странами и берут медали на Международной математической олимпиаде). Из победителей и призёров «союза» можно было составить несколько полноценных команд на «межнар», а сборная СССР на Международной олимпиаде обычно занимала 1–3 места (чаще всего первое).

Усреднение проекций вектора

Сначала нужно обсудить понятие *среднего значения функции*, которое служит далеко идущим обобщением понятия среднего арифметического нескольких чисел.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $I = [a; b]$. Что такое среднее значение функции на отрезке? Давайте разобьём наш отрезок I на n маленьких отрезков I_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ одинаковой длины $\Delta x_k = (b-a)/n$; на каждом из маленьких отрезков выберем соответственно точку x_k и найдём среднее арифметическое

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Что будет, если устремить число n отрезков разбиения к бесконечности (или, что то же самое, Δx_k к нулю)? Оказывается, если функция f непрерывна на отрезке I, то записанная в правой части (1) *интегральная сумма* стремится к некоторому предельному значению, которое не зависит от конкретного выбора точек x_1, x_2, ..., x_n и является определённым интегралом:

$$\text{если } n \to \infty, \text{ то } \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, мы приходим к определению среднего значения функции f на отрезке $[a; b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Задача 7. Выясните геометрический смысл среднего значения функции на отрезке.

Задача 8. Пусть $f(x) \leqslant g(x)$ на отрезке $[a; b]$. Покажите, что $\overline{f} \leqslant \overline{g}$.

Пусть, в частности, $f(\varphi)$ есть периодическая функция угла φ с периодом 2π. Среднее значение функции f — это её среднее значение на отрезке $[0; 2\pi]$. Из (2) имеем:

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi.$$

Для наших дальнейших целей полезно вернуться в данной формуле от определённого интеграла к интегральной сумме. Мы не будем гнаться за строгостью и обозначим результат по-прежнему $\overline{f}$, считая, что в сумме «очень много» слагаемых и она с хорошей точностью приближает величину интеграла:

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \sum_k f(\varphi_k)\Delta\varphi_k. \tag{3}$$

Теперь подключим к делу тригонометрическую окружность ω, то есть окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Каждому углу $\varphi \in [0; 2\pi]$ отвечает единственная точка $M \in \omega$, так что функцию $f(\varphi)$ можно понимать как функцию $f(M)$, заданную на окружности ω. Разбиение отрезка $\varphi \in [0; 2\pi]$ на малые отрезки длиной $\Delta\varphi_k$ приводит к разбиению тригонометрической окружности на малые дуги с угловой величиной $\Delta\varphi_k$ и соответственно длиной $\Delta l_k = \Delta\varphi_k$. Заметив, наконец, что длина тригонометрической окружности $l = 2\pi$, запишем формулу (3) в следующем виде:

$$\overline{f} = \frac{1}{l} \sum_k f(M_k)\Delta l_k. \tag{4}$$

Пользуясь тем, что дуги разбиения очень малы, мы можем аппроксимировать окружность многоугольником и считать, что Δl_k есть длина стороны многоугольника (то есть длина хорды, стягивающей соответствующую дугу), а точка M_k выбрана в середине этой стороны. Такой приём поможет найти интересующее нас среднее значение чисто геометрически, не прибегая к вычислению интеграла.

Задача 9. В вертикальной плоскости расположено проволочное кольцо радиуса R. На проволоку насажена бусинка массой m. Вычислите работу силы тяжести при соскальзывании бусинки из верхней точки кольца в нижнюю.

$\boxed{A = 2mgR}$

Задача 10. Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\vec{a}$ и семейство всевозможных прямых, проходящих через начало координат (они параметризуются единичной полуокружностью). Чему равно среднее значение длины проекции вектора $\vec{a}$ на прямую данного семейства?

$\boxed{\frac{2}{\pi}|\vec{a}|}$

Установленный замечательный результат — *среднее значение длины проекции вектора на всевозможные прямые пропорционально длине вектора и не зависит от его направления* — позволяет доказать следующее утверждение.

Задача 11. На плоскости даны две системы векторов: $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ и $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$. Известно, что сумма длин проекций векторов первой системы на любую прямую не превосходит суммы длин проекций векторов второй системы на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первой системы не превосходит суммы длин векторов второй системы.

Задача 12. Один выпуклый многоугольник расположен внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника не превосходит периметра внешнего.

Переход от формулы (2) к формуле (4) был в некотором смысле очередным шагом обобщения: мы вышли из прямой на плоскость. Сделаем теперь следующий шаг и выйдем в трёхмерное пространство; а именно — перейдём от окружности к сфере.

Рассмотрим сферу Ω единичного радиуса с центром в начале координат O. Пусть имеется функция $f(M)$ точки M, пробегающей сферу Ω. Мы хотим уметь вычислять среднее значение функции f. Для этого уже всё подготовлено: нужно лишь соответствующим образом обобщить формулу (4). Ясно, что вместо длины возникает площадь: мы разбиваем сферу Ω на малые куски площадью ΔS_k, выбираем в каждом куске точку M_k и после суммирования делим на площадь сферы $S = 4\pi$:

$$\overline{f} = \frac{1}{S}\sum_k f(M_k)\Delta S_k = \frac{1}{4\pi}\sum_k f(M_k)\Delta S_k.$$

Так же, как и выше, мы можем воспользоваться малостью кусков разбиения и аппроксимировать сферу многогранником, считая, что ΔS_k есть площадь маленькой грани (стягивающей кусок разбиения сферы), а точка M_k выбрана на этой грани так, что вектор $\overrightarrow{OM_k}$ перпендикулярен плоскости грани. Это снова позволит вычислить интересующее нас среднее значение из геометрических соображений.

Задача 13. Рассмотрим в трёхмерном координатном пространстве вектор $\vec{a}$ и семейство всевозможных прямых, проходящих через начало координат (они параметризуются единичной полусферой). Чему равно среднее значение длины проекции вектора $\vec{a}$ на прямую данного семейства?

$\boxed{\frac{1}{2}|\vec{a}|}$

Задача 14. В пространстве даны две системы векторов: $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ и $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$. Известно, что сумма длин проекций векторов первой системы на любую прямую не превосходит суммы длин проекций векторов второй системы на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первой системы не превосходит суммы длин векторов второй системы.

Задача 15. Один выпуклый многогранник расположен внутри другого. Докажите, что площадь поверхности внутреннего многогранника не превосходит площади поверхности внешнего.

Задача 16. Пусть проекция тетраэдра на некоторую прямую является отрезком длины l. Докажите, что сумма длин проекций рёбер тетраэдра на эту прямую не меньше $3l$ и не больше $4l$.

Задача 17. Решите **Задачу**.

Выпуклая оптимизация

Для начала разберёмся с важнейшим понятием выпуклой функции.

Определение. Множество точек плоскости или пространства называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно целиком содержит отрезок, их соединяющий.

Определение. Функция $f(x)$ называется выпуклой на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in I$ и любых неотрицательных λ, μ таких, что $\lambda + \mu = 1$.

Задача 18. Пусть $a < b$ и $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Убедитесь, что если λ пробегает отрезок $[0; 1]$, то x пробегает отрезок $[a; b]$.

Задача 19. *Надграфиком* функции $y = f(x)$ называется множество

$$\{(x, y) \mid x \in I,\ y \geqslant f(x)\}$$

(это множество точек, расположенных над графиком, включая сам график). Докажите, что функция выпукла тогда и только тогда, когда её надграфик — выпуклое множество.

Задача 20. Докажите, что сумма функций, выпуклых на промежутке I, также является выпуклой на I функцией.

Задача 21. Докажите, что наибольшее значение функции, выпуклой на отрезке, достигается на границе этого отрезка.

Мы определили понятие выпуклости для функции, заданной на точках прямой. Можно обобщить его для функции точки плоскости или пространства.

Рассмотрим для определённости трёхмерное пространство E_3 (ведь именно оно нужно для нашей **Задачи**). Зафиксируем начало координат O и каждой точке $X \in E_3$ поставим в соответствие её радиус-вектор $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. Тогда функцию $f(X)$ точки X можно рассматривать как функцию $f(\vec{x})$ радиус-вектора этой точки.

Определение. Пусть $V \subset E_3$ — выпуклое подмножество трёхмерного пространства. Функция $f(\vec{x})$ называется выпуклой на V, если

$$f(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) \leqslant \lambda f(\vec{x}_1) + \mu f(\vec{x}_2)$$

для любых $X_1, X_2 \in V$ и любых неотрицательных λ, μ таких, что $\lambda + \mu = 1$.

Задача 22. Пусть $f(X)$ — выпуклая функция точки X. Пусть X пробегает некоторый отрезок. Докажите, что наибольшее значение f достигается на границе этого отрезка.

Для решения **Задачи** нас интересует выпуклость лишь одной функции — *расстояния.*

Задача 23. Докажите, что функция $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$ является выпуклой (на всём пространстве E_3).

Задача 24. Пусть $\vec{a}$ — фиксированный вектор. Докажите, что функция $f(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{a}|$ является выпуклой.

Задача 25. Пусть A, B, C — фиксированные точки пространства. Докажите, что периметр тетраэдра $ABCX$ является выпуклой функцией точки X.

Задача 26. Решите **Задачу**.