Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — это специального вида последовательность. Поэтому прежде чем давать определение арифметической (а затем и геометрической) прогрессии, нам нужно вкратце обсудить важное понятие числовой последовательности.

Последовательность

Вообразите устройство, на экране которого высвечиваются одно за другим некоторые числа. Скажем, $2, -7, 13, 1, -6, 0, 3, \ldots$ Такой набор чисел как раз и является примером последовательности.

Определение. Числовая последовательность — это множество чисел, в котором каждому числу можно присвоить уникальный номер (то есть поставить в соответствие единственное натуральное число)[1]. Число с номером n называется n-м членом последовательности.

Так, в приведённом выше примере первый номер имеет число 2 — это первый член последовательности, который можно обозначить a_1; номер пять имеет число -6 — это пятый член последовательности, который можно обозначить a_5. Вообще, n-й член последовательности обозначается a_n (или b_n, c_n и т. д.).

Очень удобна ситуация, когда n-й член последовательности можно задать некоторой формулой. Например, формула $a_n = 2n - 3$ задаёт последовательность: $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$ Формула $a_n = (-1)^n$ задаёт последовательность: $-1, 1, -1, 1, \ldots$

Не всякое множество чисел является последовательностью. Так, отрезок $[0; 1]$ — не последовательность; в нём содержится «слишком много» чисел, чтобы их можно было перенумеровать. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел также не является последовательностью. Эти факты доказываются в курсе математического анализа.

Арифметическая прогрессия: основные определения

Вот теперь мы готовы дать определение арифметической прогрессии.

Определение. Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа (называемого разностью арифметической прогрессии).

Например, последовательность $2, 5, 8, 11, \ldots$ является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3. Последовательность $7, 2, -3, -8, \ldots$ является арифметической прогрессией с первым членом 7 и разностью -5. Последовательность $3, 3, 3, \ldots$ является арифметической прогрессией с разностью, равной нулю.

Эквивалентное определение: последовательность a_n называется арифметической прогрессией, если разность $a_{n+1} - a_n$ есть величина постоянная (не зависящая от n).

Арифметическая прогрессия называется *возрастающей*, если её разность положительна, и *убывающей*, если её разность отрицательна.

[1] А вот более лаконичное определение: *последовательность есть функция, определённая на множестве натуральных чисел*. Например, последовательность действительных чисел есть функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

По умолчанию последовательности считаются *бесконечными*, то есть содержащими бесконечное множество чисел. Но никто не мешает рассматривать и конечные последовательности; собственно, любой конечный набор чисел можно назвать конечной последовательностью. Например, конечная последовательность $1, 2, 3, 4, 5$ состоит из пяти чисел.

Формула n-го члена арифметической прогрессии

Легко понять, что арифметическая прогрессия полностью определяется двумя числами: первым членом и разностью. Поэтому возникает вопрос: как, зная первый член и разность, найти произвольный член арифметической прогрессии?

Получить искомую формулу n-го члена арифметической прогрессии нетрудно. Пусть a_n — арифметическая прогрессия с разностью d. Имеем:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В частности, пишем:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,
\end{aligned}$$

и теперь становится ясно, что формула для a_n имеет вид:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \tag{1}$$

Задача 1. В арифметической прогрессии $2, 5, 8, 11, \ldots$ найти формулу n-го члена и вычислить сотый член.

Решение. Согласно формуле (1) имеем:

$$a_n = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1.$$

Отсюда

$$a_{100} = 3 \cdot 100 - 1 = 299.$$

Свойство и признак арифметической прогрессии

Свойство арифметической прогрессии. В арифметической прогрессии a_n для любого $n \geqslant 2$ выполнено равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\,. \tag{2}$$

Иначе говоря, каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) является средним арифметическим соседних членов.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = a_n,$$

что и требовалось.

Более общим образом, для арифметической прогрессии a_n справедливо равенство

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

при любом $n \geqslant 2$ и любом натуральном $k < n$. Попробуйте самостоятельно доказать эту формулу — тем же самым приёмом, что и формулу (2).

Оказывается, формула (2) служит не только необходимым, но и достаточным условием того, что последовательность является арифметической прогрессией.

Признак арифметической прогрессии. Если для всех $n \geqslant 2$ выполнено равенство (2), то последовательность a_n является арифметической прогрессией.

Доказательство. Перепишем формулу (2) следующим образом:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Отсюда видно, что разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n, а это как раз и означает, что последовательность a_n есть арифметическая прогрессия.

Свойство и признак арифметической прогрессии можно сформулировать в виде одного утверждения; мы для удобства сделаем это для трёх чисел (именно такая ситуация часто встречается в задачах).

Характеризация арифметической прогрессии. Три числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $2b = a + c$.

Задача 2. (*МГУ, экономич. ф-т, 2007*) Три числа $8x$, $3-x^2$ и -4 в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

Решение. По свойству арифметической прогрессии имеем:

$$2(3 - x^2) = 8x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = -5.$$

Если $x = 1$, то получается убывающая прогрессия 8, 2, -4 с разностью -6. Если $x = -5$, то получается возрастающая прогрессия -40, -22, -4; этот случай не годится.

Ответ: $x = 1$, разность равна -6.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Легенда гласит, что однажды учитель велел детям найти сумму чисел от 1 до 100 и сел спокойно читать газету. Однако не прошло и нескольких минут, как один мальчик сказал, что решил задачу. Это был 9-летний Карл Фридрих Гаусс, впоследствии один из величайших математиков в истории.

Идея маленького Гаусса была такова. Пусть

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100.$$

Запишем данную сумму в обратном порядке:

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1,$$

и сложим две этих формулы:

$$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1).$$

Каждое слагаемое в скобках равно 101, а всего таких слагаемых 100. Поэтому

$$2S = 101 \cdot 100 = 10100,$$

откуда

$$S = 5050.$$

Мы используем эту идею для вывода формулы суммы

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

первых n членов арифметической прогрессии. Именно, запишем друг под другом:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

и сложим:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Каждое слагаемое в скобках равно $a_1 + a_n$, а всего таких слагаемых n. Поэтому

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

откуда

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{3}$$

Полезная модификация формулы (3) получается, если в неё подставить формулу n-го члена $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \tag{4}$$

Задача 3. Найти сумму всех положительных трёхзначных чисел, делящихся на 13.

Решение. Трёхзначные числа, кратные 13, образуют арифметическую прогрессию с первым членом 104 и разностью 13; n-й член этой прогрессии имеет вид:

$$a_n = 104 + 13(n-1) = 91 + 13n.$$

Давайте выясним, сколько членов содержит наша прогрессия. Для этого решим неравенство:

$$\begin{gathered} a_n \leqslant 999, \\ 91 + 13n \leqslant 999, \\ 13n \leqslant 908, \\ n \leqslant \frac{908}{13} = 69\frac{11}{13}, \\ n \leqslant 69. \end{gathered}$$

Итак, в нашей прогрессии 69 членов. По формуле (4) находим искомую сумму:

$$S = \frac{2 \cdot 104 + 68 \cdot 13}{2} \cdot 69 = 37674.$$

Задачи

1. Придумайте формулу n-го члена для следующих последовательностей:

а) $1, 3, 5, 7, \ldots$ б) $5, 8, 11, 14, \ldots$

в) $1, 4, 9, 16, \ldots$ г) $1, -2, 3, -4, \ldots$

а) $a_n = 2n - 1$; б) $a_n = 3n + 2$; в) $a_n = n^2$; г) $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$

2. Сколько положительных чисел содержится в арифметической прогрессии 23,1; 22,7; …?

58

3. Между числами 1 и 7 вставьте четыре числа так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

$\boxed{1;\ 2{,}2;\ 3{,}4;\ 4{,}6;\ 5{,}8;\ 7}$

4. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $5/3$, а произведение третьего и четвёртого её членов равно $65/72$. Найдите сумму первых 17 членов этой прогрессии.

$\boxed{\frac{119}{3}}$

5. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

$\boxed{44}$

6. Известно, что при любом n сумма первых n членов арифметической прогрессии равна $4n^2 - 3n$. Найдите десятый член этой прогрессии.

$\boxed{73}$

7. Первый член арифметической прогресии равен 429, разность её равна -22. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

$\boxed{9 \text{ или } 31}$

8. Найти сумму всех положительных чётных двузначных чисел, делящихся на 3.

$\boxed{810}$

9. Внутренние углы некоторого многоугольника, наименьший из которых равен $120°$, образуют арифметическую прогрессию с разностью $5°$. Найдите число сторон этого многоугольника.

$\boxed{9}$

10. Найти сумму всех положительных трёхзначных чисел, делящихся на 7.

$\boxed{70336}$

11. Сумма трёх чисел равна $11/18$. Сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

$\boxed{1/3,\ 1/6,\ 1/9}$

12. В арифметической прогрессии a_n известно, что $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. Найдите сумму первых 19 членов этой прогрессии.

$\boxed{1064}$

13. Известно, что $a_1, \ldots, a_{15}$ — арифметическая прогрессия и $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

$\boxed{2}$

14. Найти трёхзначное число, цифры которого образуют (в том порядке, в котором они стоят в числе) возрастающую арифметическую прогрессию и которое делится на 45

$\boxed{135}$

15. Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами прогрессии $3, 7, \ldots, 203$ и прогрессии $2, 9, \ldots, 212$.

$\boxed{749}$

16. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^4 - 10x^2 + a = 0$ образуют арифметическую прогрессию?

$\boxed{9}$

17. Найти все значения a, при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре корня и эти корни образуют арифметическую прогрессию.

$\boxed{-\frac{82}{9}}$

18. Упростите выражение $k^2 - (k-1)^2$, после чего докажите, что:

$$\text{а) } 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2; \qquad \text{б) } 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

19. Упростите выражение $k^3 - (k-1)^3$, после чего докажите, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

20. (*МГУ, физический ф-т, 1992*) Девятый член арифметической прогрессии в 2 раза больше десятого, а сумма шестого и двенадцатого членов равна 8. Найти первый член и разность прогрессии.

$\boxed{20 \text{ и } -2}$

21. (*МГУ, физический ф-т, 1979*) Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов равна 105. Найти первый член и разность прогрессии.

$\boxed{9 \text{ и } 2}$

22. (*МГУ, ИСАА, 1993*) Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи её членов.

$\boxed{28}$

23. (*МГУ, биологич. ф-т, 1991*) Лыжник проходил каждый следующий виток круговой трассы на одно и то же время дольше, чем предыдущий. На второй и четвёртый витки он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время лыжник прошёл первые пять витков?

$\boxed{8 \text{ мин } 20 \text{ с}}$

24. (*МГУ, экономич. ф-т, 1987*) В магазине продано 12 т орехов трёх сортов по цене 6, 4 и 2 руб/кг на общую сумму 42000 рублей. Количества проданных орехов первого, второго и третьего сорта (в данном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найти эти количества.

$\boxed{2{,}5 \text{ т; } 4 \text{ т; } 5{,}5 \text{ т}}$

25. (*МГУ, ВМК, 1988*) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого её членов равна 10.

$\boxed{50}$

26. (*МГУ, ВМК, 1995*) Разность арифметической прогрессии отлична от нуля, а сумма членов с четвёртого по четырнадцатый равна 77. Найти номер того её члена, который равен 7.

$\boxed{9}$

27. (*МГУ, ВМК, 1990*) Среди первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии сумма членов с нечётными номерами на 19 больше, чем с чётными. Найти двенадцатый член прогрессии, если её двадцатый член равен утроенному девятому.

$\boxed{17}$

28. (*МГУ, мехмат, 2002*) Найти восемнадцатый член арифметической прогрессии, если первый и одиннадцатый её члены — натуральные числа, а сумма первых четырнадцати членов равна 77.

$\boxed{-5}$

29. (*МГУ, мехмат, 2003*) Найдите первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на пять сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

$\boxed{54}$

30. (*МГУ, ВШБ, 2003*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

$\boxed{-2}$

31. (*МГУ, мехмат, 2004*) Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m - 9}{6m - m^2}\,; \quad a_2 = \frac{6m - m - 12}{6m - m^2}\,; \quad \ldots; \quad a_n = \frac{-10}{6m - m^2}\,,$$

где m — некоторое целое число.

$\boxed{-\frac{21}{5},\ -\frac{11}{4}}$

32. (*МГУ, социологич. ф-т, 2004*) Три числа, являющиеся длинами рёбер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

$\boxed{2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}}$

33. (*МГУ, ВМК, 2005*) Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b^n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых её двадцати трёх членов равна -60. Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

81; 15050

34. (*МГУ, ВМК, 2005*) В убывающей арифметической прогрессии разность девятого и четвёртого членов равна третьему, а сумма квадратов первого и второго членов равна 4. Найдите сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.

-150

35. (*МГУ, геологич. ф-т, 2005*) В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвёртого членов равен сумме второго и пятого членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

0 или 3

36. (*МГУ, МШЭ, 2005*) Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних чисел равна 18, а второе число меньше третьего на 20%.

6, 8, 10, 12

37. (*Олимпиада «Покори Воробьёвы горы», 2006*) Первый член арифметической прогрессии равен -12, разность равна $24/11$. Найдите сумму первых n членов этой прогрессии при условии, что она меньше -39.

$-\frac{432}{11}$

38. (*МГУ, мехмат, 2006*) Первый член арифметической прогрессии меньше 0, сотый не меньше 74, а двухсотый меньше 200. Количество членов прогрессии на интервале $(0{,}5; 5)$ ровно на два меньше, чем на отрезке $[20; 24{,}5]$. Найдите первый член и разность прогрессии.

$-\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$

39. (*МГУ, географич. ф-т, 2006*) Числа y и z таковы, что последовательность 1, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, а также последовательность 1, $y-1$, $z-y$ являются арифметическими прогрессиями. Найдите разность второй прогрессии.

2

40. (*МГУ, геологич. ф-т, 2007*) Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырём?

24

41. (*МГУ, экономич. ф-т, 2007*) Три числа $12x$, $x^2 - 5$ и 4 в указанном порядке образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

-1; 8