Площадь. 1

В данной статье мы выведем основные формулы площади параллелограмма, треугольника, ромба и трапеции. За основу берём формулу площади прямоугольника (рис. 1).

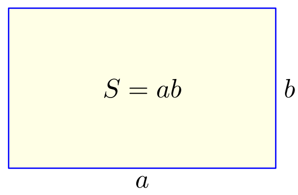

Рис. 1. Площадь прямоугольника

Кроме того, при выводе формул мы будем пользоваться следующими свойствами площади (интуитивно очевидными и принимаемыми в качестве аксиом).

- Площади равных фигур равны.
- Если данная фигура разбита на несколько фигур, то площадь данной фигуры равна сумме площадей фигур разбиения.

Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*. Равные фигуры, таким образом, равновелики; но равновеликие фигуры не обязательно равны.

Площадь параллелограмма

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту (проведённую к этому основанию).

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, в котором $AD = BC = a$ и $BH = h$ — высота (рис. 2). Проведём также высоту CK.

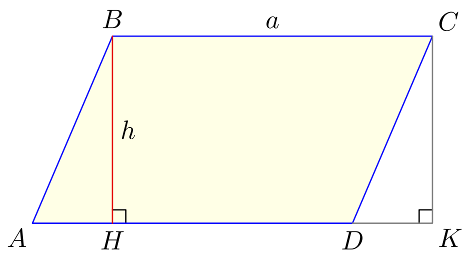

Рис. 2.

Очевидно, что треугольник DCK равен треугольнику ABH. Поэтому площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $HBCK$ (представьте себе, что мы отрезали от параллелограмма треугольник ABH и передвинули его на место треугольника DCK — тем самым мы из параллелограмма сделали прямоугольник).

Но площадь прямоугольника $HBCK$ равна произведению его сторон:

$$S_{HBCK} = BC \cdot BH = ah.$$

Следовательно, площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = ah.$$

Теорема доказана.

Площадь треугольника

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту (проведённую к этому основанию).

Доказательство. В треугольнике ABC проведём высоту h к стороне $AC = a$ (рис. 3). Проведём также $CK \parallel AB$ и $BK \parallel AC$; иными словами, достроим наш треугольник до параллелограмма $ABKC$.

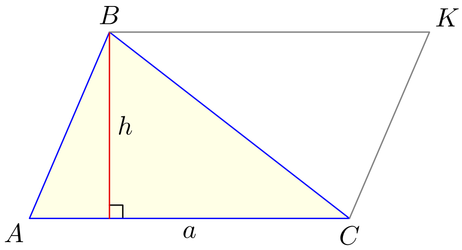

Рис. 3.

Полученный параллелограмм разбивается своей диагональю BC на два равных треугольника, поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABKC$. Но, как мы уже знаем,

$$S_{ABKC} = ah.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{ah}{2}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

В самом деле, если один из катетов принять за основание, то второй катет будет высотой, опущенной на это основание.

Данный результат легко вытекает и непосредственно из формулы площади прямоугольника (а именно, разрезаем прямоугольник вдоль диагонали).

Площадь ромба

Теорема. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

Доказательство. Пусть диагонали ромба равны a и b. Ромб разбивается своими диагоналями на четыре равных прямоугольных треугольника (рис. 4).

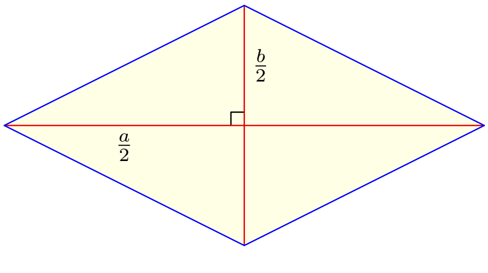

Рис. 4.

Для площади ромба получаем:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Теорема доказана.

Площадь трапеции

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями a и b (рис. 5). Диагональ BD разбивает её на два треугольника.

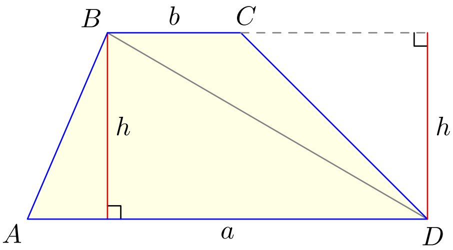

Рис. 5.

Имеем:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}bh,$$

откуда

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

Теорема доказана.

Задачи

1. Площадь прямоугольника равна 6. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.

$\boxed{3}$

2. Средняя линия треугольника разбивает его на треугольник и четырёхугольник. Какую часть площади исходного треугольника составляет площадь полученного треугольника?

$\boxed{\frac{1}{4}}$

3. Точка M расположена на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника AMD равна половине площади параллелограмма.

4. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

5. Точки, делящие треугольник на n равных отрезков, соединены с противоположной вершиной. Докажите, что при этом треугольник разбился на n равновеликих треугольников.

6. Пусть M — точка на стороне AB треугольника ABC, причём $AM : MB = m : n$. Докажите, что $S_{ACM} : S_{BCM} = m : n$.

7. Докажите, что диагонали разбивают параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

8. Точки M и N — соответственно середины противоположных сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 12. Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых AN, BN, CM и DM.

$\boxed{3}$

9. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

10. Площадь трапеции, основания которой относятся как $2 : 3$, равна 35. Найдите площади треугольников, на которые трапеция разбивается диагональю.

14 и 21

11. На сторонах AB и AC треугольника ABC, площадь которого равна 50, взяты соответственно точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 5$ и $AK : KC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника AMK.

5

12. Точки M и N расположены на стороне BC треугольника ABC, а точка K — на стороне AC. При этом $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$ и $CK : AK = 1 : 4$. Найдите площадь четырёхугольника $AMNK$, если площадь треугольника ABC равна 100.

65

13. Вершины одного квадрата расположены на сторонах другого и делят эти стороны в отношении $1 : 2$, считая по часовой стрелке. Найдите отношение площадей квадратов.

$9 : 5$

14. Площадь треугольника ABC равна 4. Точки M и N — середины сторон AB и AC, точка K лежит на стороне BC. Найдите площадь треугольника KMN.

1

15. Прямая, проведённая через вершину C трапеции $ABCD$ параллельно диагонали BD, пересекает продолжение основания AD в точке E. Докажите, что треугольник ACE равновелик трапеции $ABCD$.

16. Найдите площадь ромба со стороной 2 и углом 30°.

2

17. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны a и b ($a > b$), а острый угол равен 45°.

$\frac{a^2-b^2}{4}$

18. Проекция диагонали равнобедренной трапеции на большее основание равна p, боковая сторона равна b, угол при меньшем основании равен 150°. Найдите площадь трапеции.

$\frac{pb}{2}$

19. Медианы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника DEM, если площадь треугольника ABC равна 1.

$\frac{1}{12}$

20. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника BKN, если площадь треугольника ABC равна 24.

$\boxed{4}$

21. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

22. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что четырёхугольник $AMKN$ равновелик треугольнику BKC.

23. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и COD равновелики.

24. Диагонали четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника. Известно, что треугольники, прилежащие к двум противоположным сторонам четырёхугольника, равновелики. Докажите, что данный четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

25. Точка M, выбранная внутри параллелограмма $ABCD$, соединена со всеми его вершинами. Докажите, что $S_{AMB} + S_{CMD} = S_{AMC} + S_{BMD}$.

26. Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4 (в порядке обхода по часовой стрелке). Докажите, что $S_1S_3 = S_2S_4$.

27. Выпуклый четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20, 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

$\boxed{120}$

28. Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащих к основаниям трапеции, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

$\boxed{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}$

29. Докажите, что если диагональ четырёхугольника делит другую диагональ пополам, то она разбивает этот четырёхугольник на два равновеликих треугольника.

30. Середины сторон выпуклого четырёхугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырёхугольника вдвое меньше площади исходного четырёхугольника.

31. Боковые стороны трапеции равны a и b и лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований.

$\boxed{\frac{ab}{4}}$

32. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причём $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{mp}{nq}\,.$$

33. (*Теорема о биссектрисе*) Докажите, что если BK — биссектриса треугольника ABC, то

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}\,.$$

34. Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении 3 : 1 по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

$\boxed{\frac{7}{16}}$

35. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно за точки B, C, D и A отложены отрезки BB_1, CC_1, DD_1 и AA_1, равные этим сторонам. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S.

$\boxed{5S}$

36. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырёхугольника.

$\boxed{14}$

37. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

$\boxed{48}$

38. Докажите, что сумма расстояний от точки M, расположенной внутри равностороннего треугольника, до сторон треугольника не зависит от выбора точки M.

39. Докажите, что сумма расстояний от точки M, расположенной на основании равнобедренного треугольника, до боковых сторон треугольника не зависит от точки M.

40. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно a и b. На медиане, проведённой к стороне BC, взята точка M. Сумма расстояний от этой точки до прямых AB и AC равна c. Найдите эти расстояния.

$\boxed{\frac{bc}{a+b},\ \frac{ac}{a+b}}$

41. Докажите, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

42. Используя результат предыдущей задачи, докажите теорему Пифагора.

43. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания со вписанной окружностью.

44. Окружность с центром на гипотенузе прямоугольного треугольника касается катетов. Найдите радиус окружности, если катеты равны a и b.

$\boxed{\frac{ab}{a+b}}$

45. Вневписанная окружность радиуса r касается стороны треугольника длиной a. Докажите, что площадь треугольника равна $(p-a)r$, где p — полупериметр треугольника.

46. Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой c и углом 15°.

$\frac{c^2}{8}$

47. Точки K, L, M, N — середины соответственно сторон AB, BC, CD, AD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 10. Найдите площадь параллелограмма, образованного пересечениями прямых AL, BM, CN и DK.

2

48. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ вдвое меньше её основания AD. Найдите площадь трапеции, если $AC = a$, $CD = b$.

$\frac{3ab}{4}$

49. В треугольнике ABC угол A равен 45°, угол C острый. Из середины N стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площадь треугольника NMC составляет $1/8$ площади треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.

45°, 90°, 45°

50. Каждая сторона треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 0,01?

Да

51. Точки K и L лежат на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а точки M и N — на стороне AD, причём $BK = KL = LC$ и $AN = NM = MD$. Докажите, что площадь треугольника KLN равна полусумме площадей треугольников ABK и CML.

52. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части и не пересекаются внутри четырёхугольника. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырёхугольника.

53. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, площадь которого равна 25, проведны диагонали. Известно, что площадь треугольника ABC вдвое больше площади треугольника ABD, а площадь треугольника BCD втрое больше площади треугольника ACD. Найдите площадь треугольника ABC.

20

54. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, разделил его на два равновеликих четырёхугольника. Докажите, что эти стороны параллельны.

55. Пусть M — середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника CDM равна половине площади четырёхугольника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.

56. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с концами противоположной стороны. Найдите площадь восьмиугольника, образованного пересечениями проведённых отрезков, если площадь параллелограмма равна 1.

$\boxed{\frac{1}{6}}$

57. Пусть M и N — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN — в точке Q. Докажите, что

$$S_{APB} + S_{CQD} = S_{MPNQ}.$$

58. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

59. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника ABC трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники. Докажите, что сумма площадей трёх из этих треугольников, прилегающих к сторонам треугольника ABC, равна площади четвёртого.