

Введение в аркфункции

Мы знаем, каким образом для заданного угла α определяются значения его тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса). Очень важной является обратная задача: по известному значению тригонометрической функции угла α определить сам угол α . При решении этой задачи и возникают *обратные тригонометрические функции* (или *аркфункции*): арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Арксинус

Возьмём произвольное число a . Нас интересует следующий вопрос: каковы углы x , для которых выполнено равенство $\sin x = a$?

Если $a > 1$ или $a < -1$, то ответ прост: таких углов не существует. В самом деле, синус не может принимать значения, по модулю превосходящие единицу.

Если же $|a| \leq 1$, то прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \sin x$ в бесконечном множестве точек (рис. 1). Стало быть, имеется бесконечно много углов, синус которых равен a .

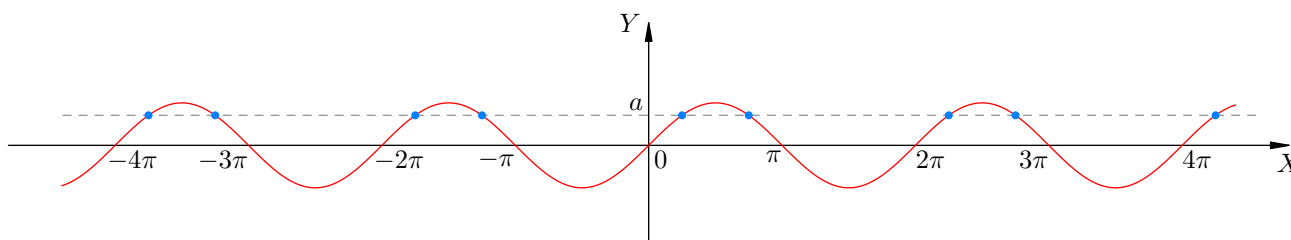


Рис. 1. Углов с данным синусом бесконечно много

Как описать все эти углы, мы разберёмся несколько позже, при решении простейших тригонометрических уравнений. А сейчас давайте посмотрим на рис. 2.

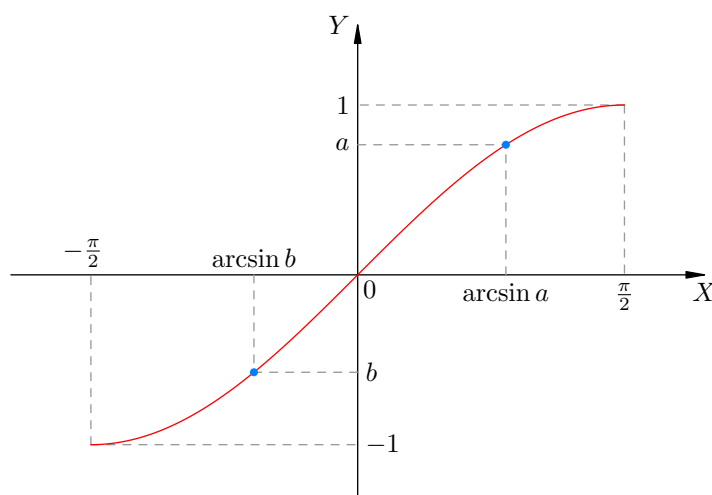


Рис. 2. График синуса на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Мы видим кусок синусоиды $y = \sin x$, который отвечает значениям x , расположенным на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Теперь, каково бы ни было число $a \in [-1; 1]$, прямая $y = a$ пересекает этот кусок *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и

отрицательное число b). Иными словами, существует *единственное* значение $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, для которого справедливо равенство $\sin x = a$. Это значение x называется **арксинусом** числа a и обозначается $\arcsin a$.

Определение. Арксинус числа $a \in [-1; 1]$ — это число, принадлежащее отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a :

$$x = \arcsin a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a, \\ x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (1)$$

Переобозначим в (1) величину a через x , а величину x через y :

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x, \\ y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (2)$$

Мы получили функцию $y = \arcsin x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- Областью определения функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1; 1]$. Это следует из соотношения $x = \sin y$ и того факта, что $\sin y$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ пробегает всевозможные значения от -1 до 1 .
- Областью значений функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Смотрите вторую строку в определении (2).

График функции $y = \arcsin x$ изображён на рис. 3.

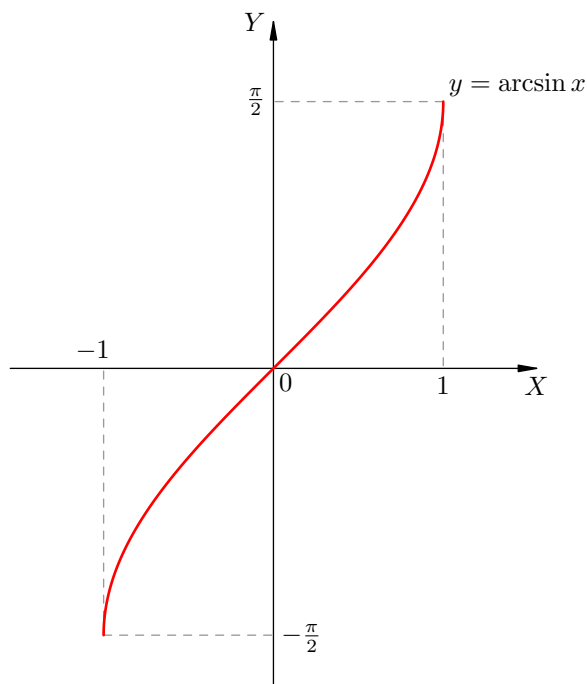


Рис. 3. График функции $y = \arcsin x$

Данная кривая есть тот же самый кусок синусоиды, что и на рис. 2, но только расположенный по-другому. В самом деле, поменяйте на рис. 3 местами буквы X и Y , после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. В результате получится кривая на рис. 2.

Вот хорошее упражнение: нарисуйте график арксинуса и кусок синусоиды на рис. 2 в одной системе координат и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

Нетрудно видеть, что график арксинуса симметричен относительно начала координат. Это значит, что *арксинус — нечётная функция*:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \quad (3)$$

Разумеется, нечётность арксинуса легко следует непосредственно из определения (2) и нечётности синуса. Проведите это доказательство самостоятельно.

Из рис. 3 мы видим также, что *функция $y = \arcsin x$ возрастает на отрезке $[-1; 1]$* .

Полезно изобразить арксинус на тригонометрической окружности (рис. 4). Как видим, «арксинусы живут справа» (то есть на правой полуокружности), но не просто справа, а именно на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

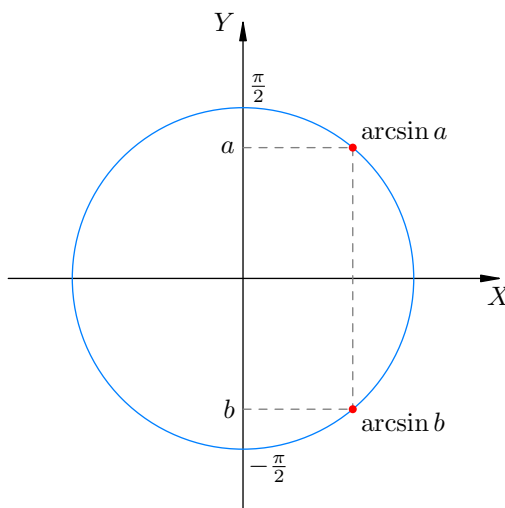


Рис. 4. Арксинус на тригонометрической окружности

На рис. 4 для наглядности изображено также число $b = -a$ и указан $\arcsin b$. Хорошо видна нечётность арксинуса: $\arcsin b = -\arcsin a$.

Пример. Чему равен $\arcsin \frac{1}{2}$? Поскольку $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, имеем $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Конечно, существует много других углов, для которых синус равен $\frac{1}{2}$ (таковы, например, $\frac{5\pi}{6}$ или $-\frac{7\pi}{6}$). Но только один из этих углов — а именно, $\frac{\pi}{6}$ — принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Пример. $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Этот же результат сразу следует из нечётности арксинуса: $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Пример. $\sin(\arcsin 0,7) = 0,7$. Это сразу следует из определения арксинуса; ведь $\arcsin 0,7$ — это угол, синус которого равен 0,7.

Вообще, $\sin(\arcsin a) = a$ для всех $a \in [-1; 1]$. Иначе говоря, если взять синус от арксинуса, то мы непременно вернёмся к исходному числу.

Пример. Верно ли, что $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$? Вообще говоря, нет. А именно, если $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то данное равенство будет верным, например:

$$\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Но если $\alpha \notin [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то данное равенство окажется неверным. Смотрите:

$$\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, арксинус от синуса не обязательно вернёт нас к исходному числу.

Пример. Вычислим $\cos(\arcsin 0,6)$. Обозначим $\arcsin 0,6$ через α ; таким образом, мы ищем $\cos \alpha$. Согласно основному тригонометрическому тождеству имеем:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,6^2 = 0,64.$$

Мы воспользовались тем, что $\sin \alpha = \sin(\arcsin 0,6) = 0,6$. Теперь нам нужно извлечь квадратный корень, определившись со знаком косинуса (плюс или минус). Для этого учтём, что $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (согласно определению арксинуса), а на данном отрезке косинус положителен. Поэтому:

$$\cos \alpha = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

Итак, $\cos(\arcsin 0,6) = 0,8$.

Арккосинус

Если $a > 1$ или $a < -1$, то не существует таких углов x , для которых $\cos x = a$. В самом деле, косинус не может принимать значения, превосходящие по модулю единицу.

Пусть $a \in [-1; 1]$. Возьмём график функции $y = \cos x$ и проведём прямую $y = a$ (рис. 5). Как видим, прямая пересекает график в бесконечном множестве точек. Стало быть, имеется бесконечно много углов, косинус которых равен a .

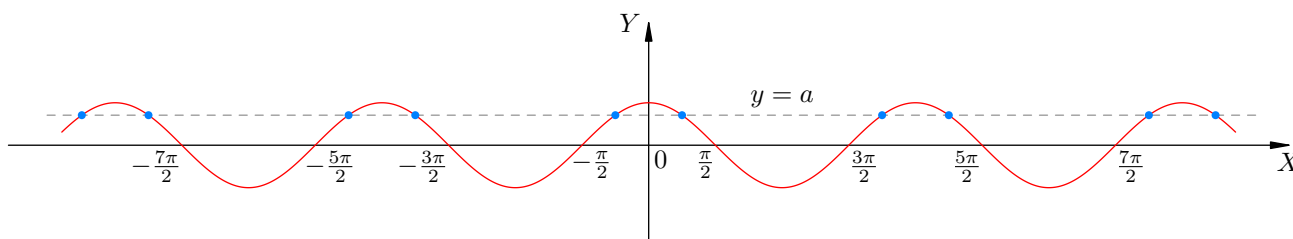


Рис. 5. Углов с данным косинусом бесконечно много

Но нам, как и в случае синуса, хотелось бы, чтобы точка пересечения была единственной. Для этого нужно ограничиться подходящим куском графика косинуса.

В данном случае годится кусок, соответствующий значениям $x \in [0; \pi]$ (рис. 6). Действительно, мы видим, что при любом $a \in [-1; 1]$ прямая $y = a$ пересекает этот кусок *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и отрицательное число b).

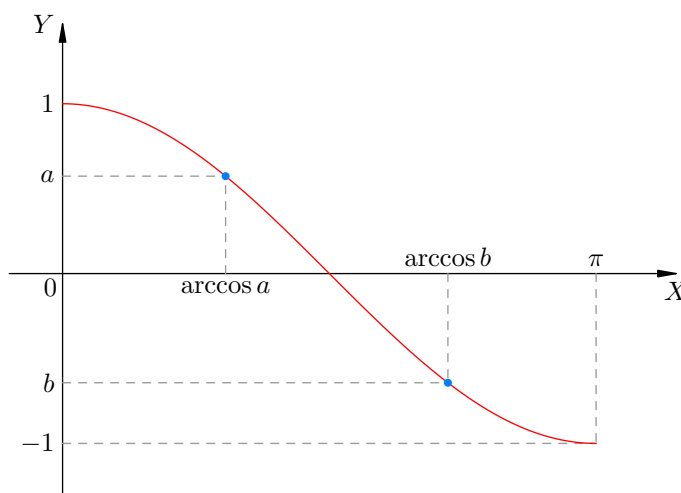


Рис. 6. График косинуса на отрезке $[0; \pi]$

Иными словами, существует *единственное* значение $x \in [0; \pi]$, для которого справедливо равенство $\cos x = a$. Это значение x называется **арккосинусом** числа a и обозначается $\arccos a$.

Определение. Арккосинус числа $a \in [-1; 1]$ — это число, принадлежащее отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен a :

$$x = \arccos a \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a, \\ x \in [0; \pi]. \end{cases} \quad (4)$$

Переобозначим в (4) величину a через x , а величину x через y :

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x, \\ y \in [0; \pi]. \end{cases} \quad (5)$$

Получилась функция $y = \arccos x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- *Областью определения функции $y = \arccos x$ является отрезок $[-1; 1]$.* Это следует из соотношения $x = \cos y$ и того факта, что $\cos y$ на отрезке $[0; \pi]$ пробегает всевозможные значения от -1 до 1 .
- *Областью значений функции $y = \arccos x$ является отрезок $[0; \pi]$.* Смотрите вторую строку в определении (5).

График функции $y = \arccos x$ изображён на рис. 7.

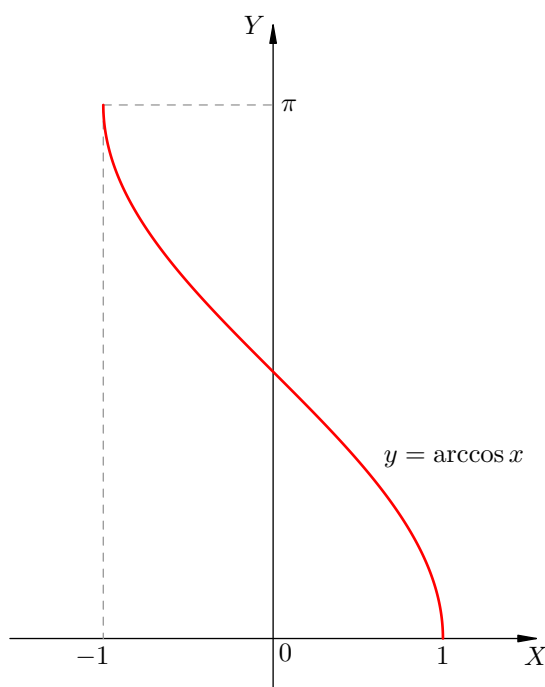


Рис. 7. График функции $y = \arccos x$

График арккосинуса — это та же самая линия, что и на рис. 6, но только расположенная по-другому. Действительно, поменяйте на рис. 7 местами буквы X и Y , после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. Вы получите в точности кривую на рис. 6.

Кроме того, нарисуйте оба этих графика в одной системе координат и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

График арккосинуса не симметричен относительно оси Y и не симметричен относительно начала координат. Стало быть, *арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией.*

Из рис. 7 мы видим также, что функция $y = \arccos x$ убывает на отрезке $[-1; 1]$.

Изобразим арккосинус на тригонометрической окружности (рис. 8). Как видим, «арккосинусы живут сверху» (то есть на верхней полуокружности), но не просто сверху, а именно на отрезке $[0; \pi]$.

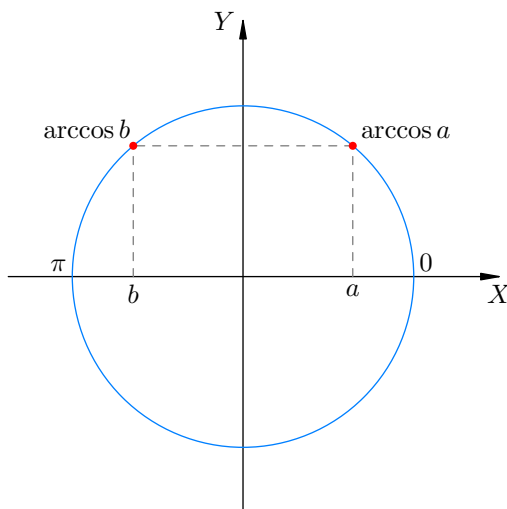


Рис. 8. Арккосинус на тригонометрической окружности

Наряду с числом a мы для наглядности показали на рисунке число $b = -a$. Легко видеть, что соответствующие арккосинусы связаны соотношением $\arccos b = \pi - \arccos a$. Таким образом, аналогом равенства (3) в случае арккосинуса служит следующее соотношение:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \quad (6)$$

Пример. $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Пример. $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Как видим, соотношение (6) выполнено: $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, то есть $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos \frac{1}{2}$.

Пример. Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство $\cos(\arccos a) = a$. Это прямо следует из определения арккосинуса — ведь $\arccos a$ есть угол, косинус которого равен a . Таким образом, косинус от арккосинуса непременно возвращает нас к исходному числу.

Пример. А вот взятие арккосинуса от косинуса не обязательно даст исходное число; иными словами, равенство $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$, вообще говоря, не верно.

Если $\alpha \in [0; \pi]$, то данное равенство выполнено. Например:

$$\arccos\left(\cos \frac{\pi}{6}\right) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Но если $\alpha \notin [0; \pi]$, то равенство нарушается:

$$\arccos\left(\cos \frac{11\pi}{6}\right) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{11\pi}{6}.$$

Пример. Вычислим $\sin(\arccos 0,8)$. Пусть $\arccos 0,8 = \alpha$; таким образом, мы ищем $\sin \alpha$. Имеем:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2(\arccos 0,8) = 1 - 0,8^2 = 0,36.$$

Будучи арккосинусом, угол α принадлежит отрезку $[0; \pi]$. На этом отрезке синус положителен, поэтому

$$\sin \alpha = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

Итак, $\sin(\arccos 0,8) = 0,6$.

Связь арксинуса и арккосинуса

Арксинус и арккосинус одного и того же числа x связаны простой формулой:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Докажем её. Пусть $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \arccos x$. Требуется показать, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

С одной стороны, имеем $x = \sin \alpha$, причём $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. С другой стороны, $x = \cos \beta$, причём $\beta \in [0; \pi]$. Отсюда $\sin \alpha = \cos \beta$ или, согласно формуле приведения,

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right).$$

Теперь заметим, что величина $\frac{\pi}{2} - \beta$ принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (так же, как и α). Но если равны синусы двух углов, расположенных на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то совпадают и сами углы:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

то есть

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

что нам и требовалось. Формула (7) тем самым доказана.

Арктангенс

Рассмотрим график функции $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = a$ (рис. 9).

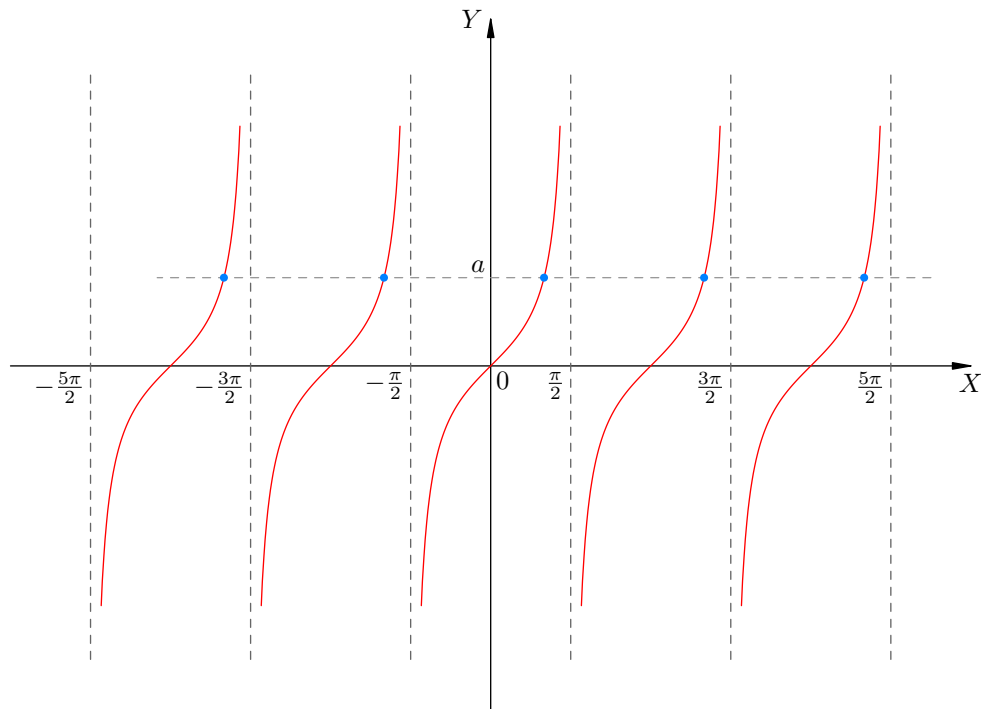


Рис. 9. Углов с данным тангенсом бесконечно много

Мы видим, что при любом a прямая пересекает график тангенса в бесконечном множестве точек. Следовательно, каково бы ни было число a , найдётся бесконечно много углов x , тангенс которых равен a .

Как и раньше, мы хотим единственности точки пересечения прямой и графика. Для этого следует ограничиться одной из ветвей тангенса. Естественно выбрать «центральную» ветвь графика, отвечающую значениям x из интервала $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тогда получится картина, изображённая на рис. 10.

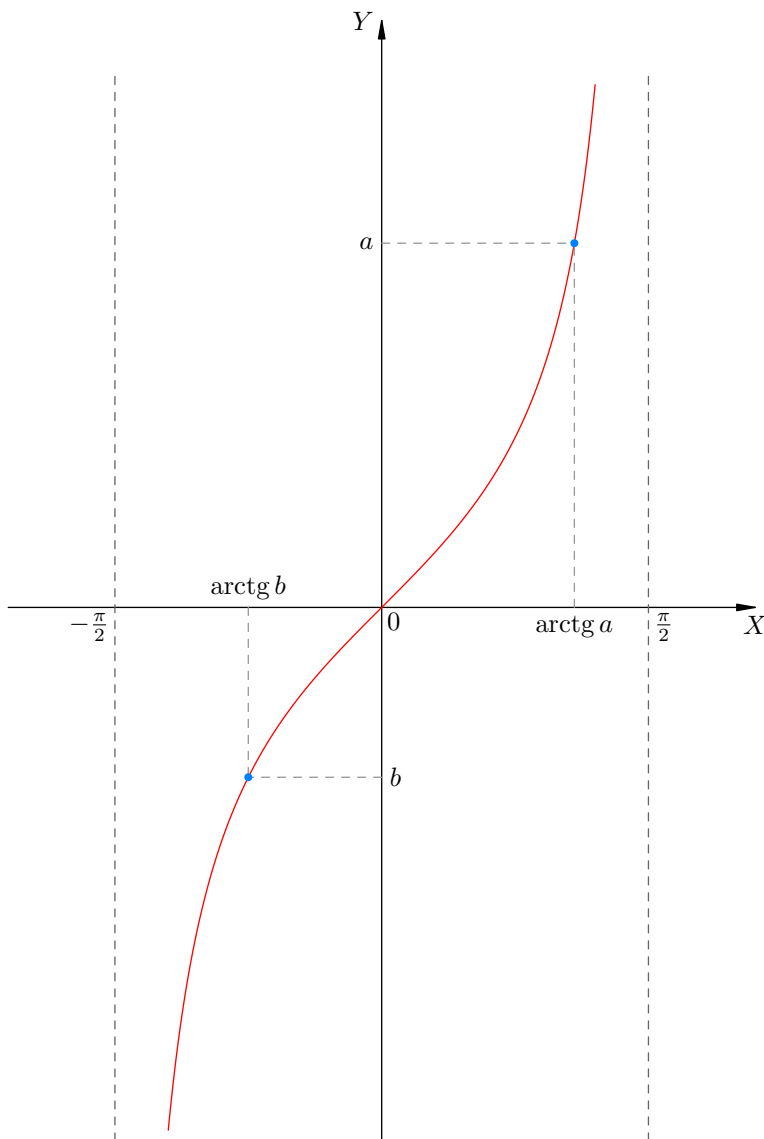


Рис. 10. График тангенса на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

Теперь при любом a прямая $y = a$ пересекает выбранную ветвь *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и отрицательное число b).

Иными словами, существует *единственное* значение x на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, для которого справедливо равенство $\text{tg } x = a$. Это значение x называется **арктангенсом** числа a и обозначается $\text{arctg } a$.

Определение. Арктангенс числа a — это число, принадлежащее интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a :

$$x = \text{arctg } a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg } x = a, \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (8)$$

Переобозначим в (8) величину a через x , а величину x через y :

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = x, \\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (9)$$

Мы получили функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- Областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является множество \mathbb{R} всех действительных чисел. Это следует из соотношения $x = \operatorname{tg} y$ и того факта, что $\operatorname{tg} y$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ пробегает всё множество \mathbb{R} .
- Областью значений функции $y = \operatorname{arctg} x$ является интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Смотрите вторую строку в определении (9).

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображён на рис. 11.

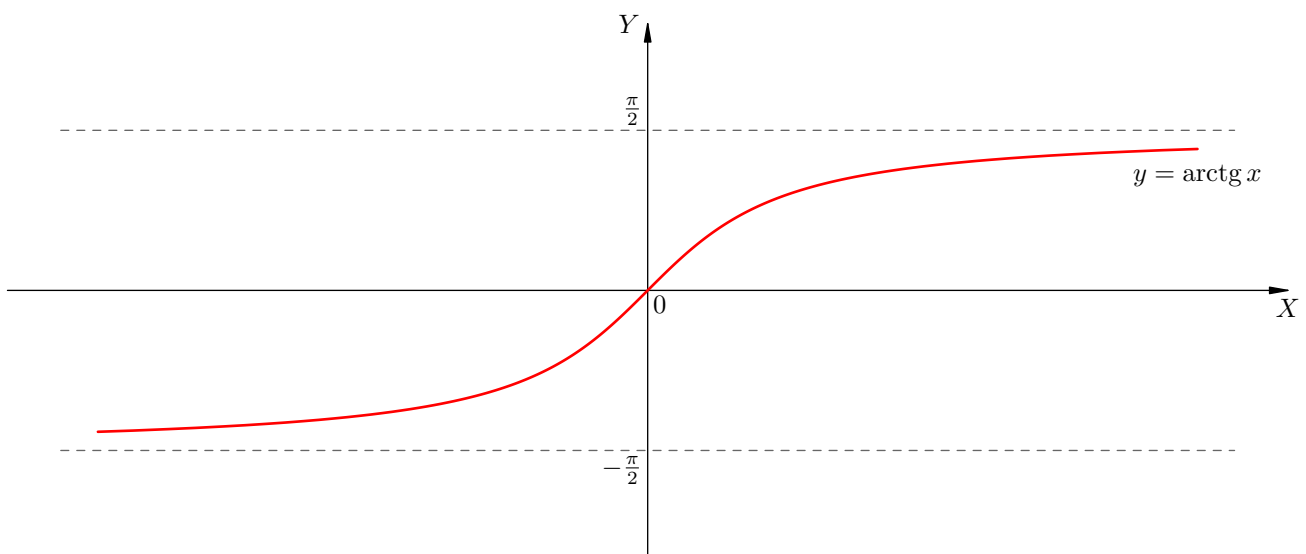


Рис. 11. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

График арктангенса есть та же центральная ветвь графика тангенса, но расположенная по-другому. Действительно, поменяйте местами, как и раньше, буквы X и Y на рис. 11, после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. В результате получится центральная ветвь тангенса, изображённая на рис. 10.

Нарисуйте также график арктангенса и центральную ветвь тангенса в одной системе координат и убедитесь, что данные графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Легко видеть, что график арктангенса симметричен относительно начала координат. Это значит, что *арктангенс — нечётная функция*:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x. \quad (10)$$

Разумеется, нечётность арктангенса легко доказать непосредственно из определения (9), воспользовавшись нечётностью тангенса. Сделайте это самостоятельно.

Важной особенностью арктангенса является наличие у графика двух горизонтальных асимптот. Это прямые $y = \pm\frac{\pi}{2}$, к которым график неограниченно приближается при $x \rightarrow \pm\infty$. Разумеется, горизонтальные асимптоты арктангенса суть не что иное, как отражённые относительно прямой $y = x$ вертикальные асимптоты $x = \pm\frac{\pi}{2}$ центральной ветви тангенса.

Из рис. 11 мы видим также, что *функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на всей числовой прямой*.

Изобразим арктангенс на тригонометрической окружности (рис. 12). Как видим, «арктангенсы живут справа» (то есть на правой полуокружности), но не просто справа, а именно на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

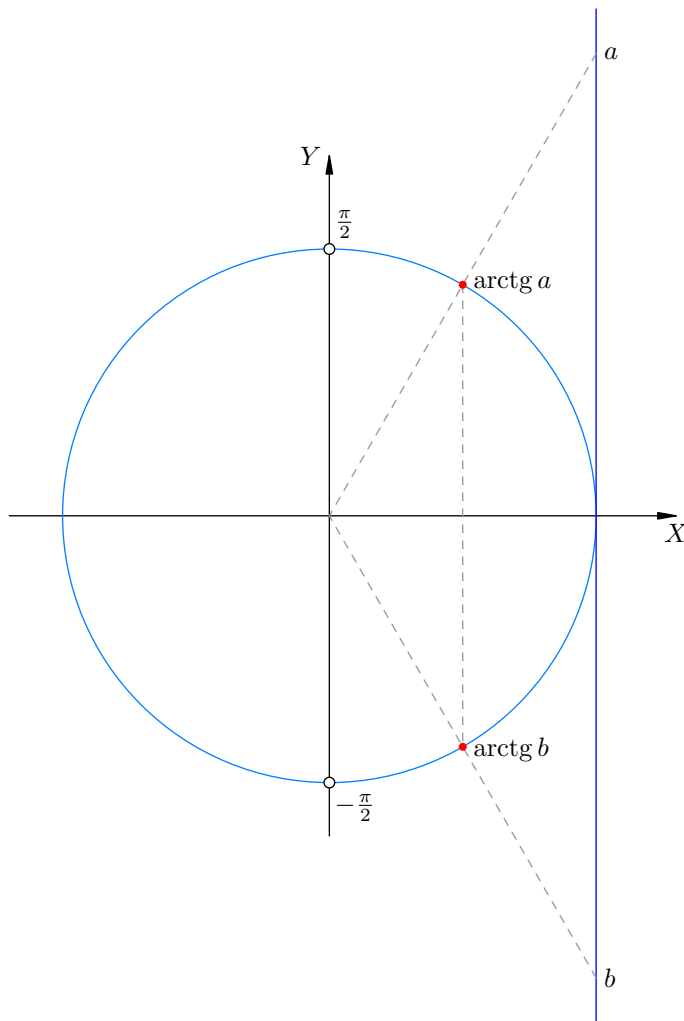


Рис. 12. Арктангенс на тригонометрической окружности

На данном рисунке изображено также число $b = -a$ и указан $\arctg b$. Хорошо видна нечётность арктангенса: $\arctg b = -\arctg a$.

Пример. $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\tg \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Пример. $\arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\tg(-\frac{\pi}{4}) = -1$ и $-\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Этот же результат сразу получается из нечётности арктангенса: $\arctg(-1) = -\arctg 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Пример. Взятие тангенса от арктангенса возвращает нас к исходному числу: $\tg(\arctg a) = a$ при любом a . Это прямо вытекает из определения: ведь $\arctg a$ — это число, тангенс которого равен a .

Пример. Взятие арктангенса от тангенса не обязательно возвращает нас к исходному числу: в общем случае $\arctg(\tg \alpha) \neq \alpha$.

Равенство достигается для $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, например:

$$\arctg\left(\tg \frac{\pi}{3}\right) = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Однако в случае $\alpha \notin (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ нарушение равенства налицо:

$$\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} \right) = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}.$$

Пример. Вычислим $\cos(\operatorname{arctg} 2)$. Пусть $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$; мы ищем, таким образом, $\cos \alpha$. Имеем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2)} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}.$$

Будучи арктангенсом, угол α принадлежит интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Косинус на этом интервале положителен, поэтому

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Итак, $\cos(\operatorname{arctg} 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример. Вычислим $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{2})$. Действуем аналогично: обозначаем $\operatorname{arctg} \sqrt{2} = \alpha$. Имеем:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3}.$$

Теперь заметим, что угол α положителен; будучи при этом арктангенсом, он принадлежит интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$. Синус на этом интервале положителен, поэтому

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Арккотангенс

Рассмотрим график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и прямую $y = a$ (рис. 13).

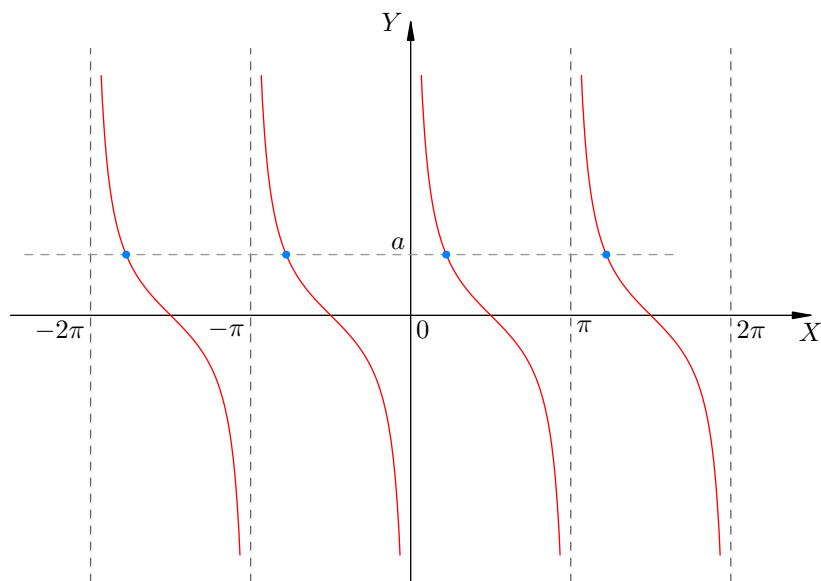


Рис. 13. Углов с данным котангенсом бесконечно много

Мы видим, что при любом a прямая пересекает график котангенса в бесконечном множестве точек. Следовательно, каково бы ни было число a , найдётся бесконечно много углов x , котангенс которых равен a .

Чтобы точка пересечения оказалась единственной, нужно ограничиться одной из ветвей котангенса. Удобно выбрать ветвь, отвечающую значениям x из интервала $(0; \pi)$. Это показано на рис. 14.

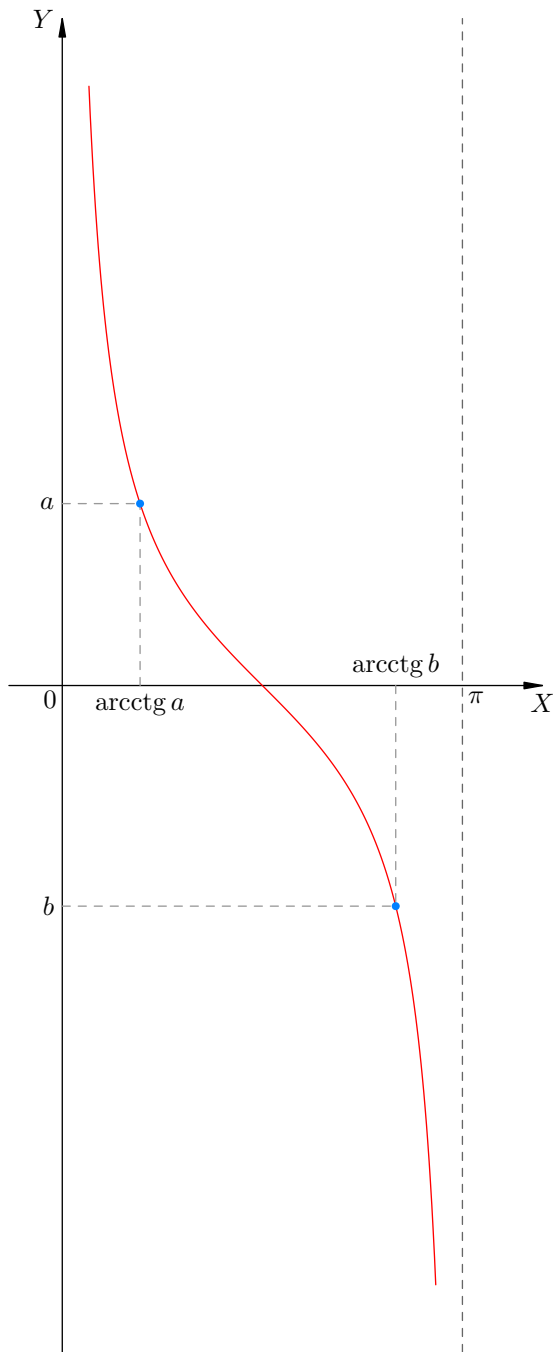


Рис. 14. График котангенса на интервале $(0; \pi)$

Теперь при любом a прямая $y = a$ пересекает выбранную ветвь *ровно в одной точке* (для наглядности на рисунке указаны положительное число a и отрицательное число b).

Иными словами, существует *единственное* значение x на интервале $(0; \pi)$, для которого справедливо равенство $\text{ctg } x = a$. Это значение x называется **арккотангенсом** числа a и обозначается $\text{arcctg } a$.

Определение. Арккотангенс числа a — это число, принадлежащее интервалу $(0; \pi)$, котангенс которого равен a :

$$x = \operatorname{arcctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ x \in (0; \pi). \end{cases} \quad (11)$$

Переобозначим в (11) величину a через x , а величину x через y :

$$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} y = x, \\ y \in (0; \pi). \end{cases} \quad (12)$$

Мы получили функцию $y = \operatorname{arcctg} x$. Имеем два важных свойства этой функции.

- Областью определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является множество \mathbb{R} всех действительных чисел. Это следует из соотношения $x = \operatorname{ctg} y$ и того факта, что $\operatorname{ctg} y$ на интервале $(0; \pi)$ пробегает всё множество \mathbb{R} .
- Областью значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является интервал $(0; \pi)$. Смотрите вторую строку в определении (12).

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображён на рис. 15.

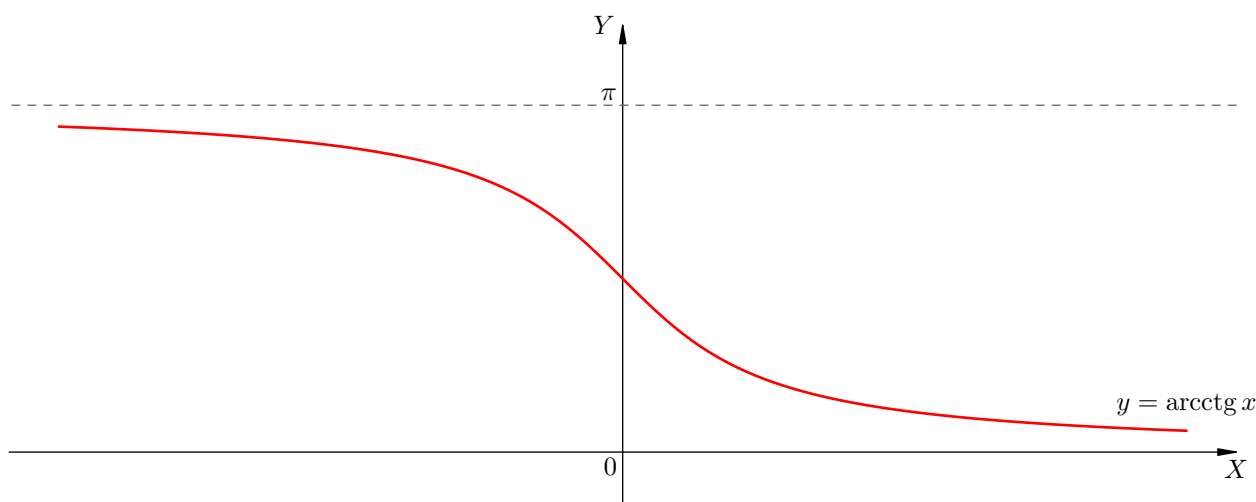


Рис. 15. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

График арккотангенса есть та же самая линия, что и ветвь котангенса на рис. 14, но только расположенная по-другому. Действительно, поменяйте на рис. 15 местами буквы X и Y , после чего разверните рисунок так, чтобы оси X и Y заняли привычные положения. Вы получите в точности кривую на рис. 14.

И снова сделайте полезное упражнение: нарисуйте выбранную ветвь котангенса и график арккотангенса в одной системе координат и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

График арккотангенса не симметричен относительно оси Y и не симметричен относительно начала координат. Стало быть, *арккотангенс не является ни чётной, ни нечётной функцией.*

Как и в случае арктангенса, график арккотангенса имеет две горизонтальные асимптоты. Это прямая $y = 0$ (к которой график неограниченно приближается при $x \rightarrow +\infty$) и прямая $y = \pi$ (к которой график неограниченно приближается при $x \rightarrow -\infty$). Разумеется, горизонтальные асимптоты арккотангенса суть не что иное, как отражённые относительно прямой $y = x$ вертикальные асимптоты $x = 0$ и $x = \pi$ выбранной ветви котангенса.

Из рис. 15 мы видим также, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ убывает на всей числовой оси.

Изобразим арккотангенс на тригонометрической окружности (рис. 16). Как видим, «арккотангенсы живут сверху» (то есть на верхней полуокружности), но не просто сверху, а именно на интервале $(0; \pi)$.

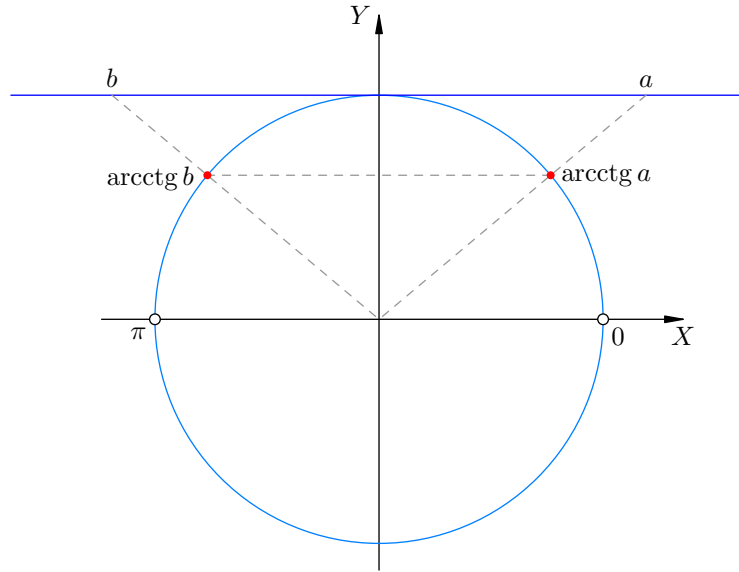


Рис. 16. Арккотангенс на тригонометрической окружности

Наряду с числом a мы показали на рисунке число $b = -a$. Легко видеть, что соответствующие арккотангенсы связаны соотношением $\operatorname{arcctg} b = \pi - \operatorname{arcctg} a$. Таким образом, аналогом равенства (10) в случае арккотангенса служит следующее соотношение:

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \quad (13)$$

Пример. $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Пример. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Как видим, соотношение (13) выполнено: $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, то есть $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$.

Пример. Для любого a справедливо равенство $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$. Это прямо следует из определения арккотангенса — ведь $\operatorname{arcctg} a$ есть угол, котангенс которого равен a . Таким образом, котангенс от арккотангенса непременно возвращает нас к исходному числу.

Пример. А вот взятие арккотангенса от котангенса не обязательно даст исходное число; иными словами, равенство $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$, вообще говоря, не верно.

Если $\alpha \in (0; \pi)$, до данное равенство выполнено. Например:

$$\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Но если $\alpha \notin (0; \pi)$, то равенство нарушается:

$$\operatorname{arcctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3} \right) = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}.$$

Пример. Вычислим $\sin(\operatorname{arcctg} 3)$. Пусть $\operatorname{arcctg} 3 = \alpha$; мы ищем, таким образом, $\sin \alpha$. Имеем:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} 3)} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}.$$

Будучи арккотангенсом, угол α принадлежит интервалу $(0; \pi)$. Синус на этом интервале положителен, поэтому

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Итак, $\sin(\operatorname{arccotg} 3) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$

Пример. Вычислим $\cos(\operatorname{arccotg} \frac{4}{3})$. Снова обозначаем $\operatorname{arccotg} \frac{4}{3} = \alpha$. Имеем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{16}{25}.$$

Теперь заметим, что угол α принадлежит интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$. Косинус на этом интервале положителен, поэтому

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

Таким образом, $\cos(\operatorname{arccotg} \frac{4}{3}) = \frac{4}{5}.$

Связь арктангенса и арккотангенса

Арктангенс и арккотангенс одного и того же числа x связаны следующим соотношением:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Данная формула аналогична формуле (7) и доказывается точно так же. Попробуйте провести доказательство самостоятельно.

Задачи

1. Вычислите:

- | | |
|---|--|
| а) $\arcsin 0 - \arccos 0$; | б) $\operatorname{arctg} 0 + 2 \operatorname{arccotg} 0$; |
| в) $\arcsin 1 + \operatorname{arctg} 1$; | г) $\arccos 1 - \operatorname{arctg} 1$; |
| д) $\frac{\arcsin(-1)}{\arccos(-1)}$; | е) $\frac{\operatorname{arctg}(-1)}{\operatorname{arccotg}(-1)}$. |

$$\frac{\pi}{2} - (\text{а}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{б}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{в}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{г}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{д}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{е})$$

2. Вычислите:

- | | |
|--|--|
| а) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}$; | б) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; |
| в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; | г) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; |
| д) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; | е) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. |

$$\frac{\pi}{2} - (\text{а}) ; 0 (\text{б}) ; 0 (\text{в}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{г}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{д}) ; \frac{\pi}{2} - (\text{е})$$

3. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$;

б) $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) - 2 \operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

$$\frac{9}{\sqrt{3}} \quad (\text{а} : \frac{2\pi}{3} \quad (\text{в} : \frac{\pi}{3} - (\text{г} : \frac{\pi}{3} \quad (\text{е} :$$

4. Вычислите:

а) $\sin(\arccos 0)$;

в) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$;

д) $\operatorname{tg}(\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}))$;

б) $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$;

г) $\cos(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$;

е) $\operatorname{ctg}(2 \arcsin \frac{1}{2})$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{а} : \frac{1}{2} - (\text{в} : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{г} : \frac{\sqrt{3}}{2} - (\text{е} : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{е} :$$

5. Вычислите:

а) $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6})$;

в) $\arccos(\cos \frac{5\pi}{3})$;

д) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4})$;

ж) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4})$;

б) $\arcsin(\sin \frac{4\pi}{3})$;

г) $\arccos(\cos \frac{7\pi}{6})$;

е) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{13\pi}{6})$;

з) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{3})$;

$$\frac{\pi}{6} \quad (\text{а} : \frac{\pi}{6} \quad (\text{в} : \frac{\pi}{6} \quad (\text{г} : \frac{\pi}{6} - (\text{е} : \frac{\pi}{6} - (\text{е} :$$

6. Вычислите:

а) $\sin(\arccos \frac{3}{5})$;

в) $\cos(\operatorname{arctg} \frac{1}{3})$;

б) $\cos(\arcsin \frac{5}{13})$;

г) $\sin(\operatorname{arctg} 5)$.

$$\frac{9\sqrt{4}}{5} \quad (\text{а} : \frac{4\sqrt{1}}{5} \quad (\text{в} : \frac{5\sqrt{1}}{13} \quad (\text{г} : \frac{5}{4} \quad (\text{е} :$$

7. Вычислите:

а) $\sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$;

б) $\sin\left(2 \arccos \frac{1}{3}\right)$;

в) $\cos\left(2 \arcsin \frac{2}{3}\right)$;

г) $\cos\left(2 \arccos \frac{3}{7}\right)$.

| |
|--|
| $\frac{67}{15} - \left(1 : \frac{6}{1} \left(\frac{6}{2} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \left(9 : \frac{27}{12}\right) \left(\frac{6}{2}\right)\right)$ |
|--|

8. Выясните, имеют ли смысл следующие выражения:

а) $\arcsin 2$;

б) $\arccos \frac{4}{5}$;

в) $\arcsin \frac{\pi}{2}$;

г) $\arccos \frac{\pi}{3}$;

д) $\operatorname{arctg} 3$;

е) $\operatorname{arcctg} 100$.

| |
|--|
| $\frac{67}{15} - \left(1 : \frac{6}{1} \left(\frac{6}{2} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \left(9 : \frac{27}{12}\right) \left(\frac{6}{2}\right)\right)$ |
|--|

9. Определите знак выражения:

а) $\arcsin \frac{1}{3} - \arcsin \frac{1}{4}$;

б) $\arccos \frac{7}{9} - \arccos \frac{4}{9}$;

в) $\operatorname{arctg} \pi - \operatorname{arctg} 10$;

г) $\operatorname{arcctg} \sqrt{15} - \operatorname{arcctg} 4$.

| |
|---|
| $1 + \left(1 : - \left(\frac{6}{2} : - \left(9 : + \left(\frac{6}{2}\right)\right)\right)\right)$ |
|---|