

## Замена переменной

### Содержание

1	Предварительные преобразования . . . . .	1
2	Симметрические уравнения . . . . .	3
3	Однородные уравнения . . . . .	4
4	Замена в биномах . . . . .	4
5	Задачи . . . . .	5

В ряде случаев оказывается, что переменная присутствует в уравнении лишь в составе одного и того же устойчивого выражения. Естественный приём в подобных ситуациях — обозначить это устойчивое выражение новой буквой, то есть сделать замену переменной.

С помощью замены переменной можно решать разные виды уравнений. В данной статье не рассматриваются иррациональные уравнения (в которых переменная содержится под знаком корня); они изучаются в отдельной статье «[Иррациональные уравнения и системы](#)».

**ЗАДАЧА 1.** Решить уравнение

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} + \frac{2x}{x^2 + x - 2} - 3 = 0.$$

**РЕШЕНИЕ.** Замена  $t = \frac{x^2+x-2}{x}$  приводит к уравнению

$$t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 2}{t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 2. \end{cases}$$

Теперь делаем обратную замену. Если  $t = 1$ , то

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Если же  $t = 2$ , то

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

**ОТВЕТ:**  $\pm\sqrt{2}, -1, 2$ .

### 1 Предварительные преобразования

Устойчивое выражение далеко не всегда присутствует в готовом виде; в большинстве случаев для его поиска нужно как-то преобразовать данное уравнение.

**ЗАДАЧА 2.** Решить уравнение

$$(x^2 - 4x)^2 + (x - 2)^2 = 6.$$

**РЕШЕНИЕ.** Раскрываем вторую скобку:

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x + 4 = 6,$$

и видим замену  $t = x^2 - 4x$ :

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 1, \\ x^2 - 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{5}, \\ x = 2 \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

ОТВЕТ:  $2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{2}$ .

ЗАДАЧА 3. Решить уравнение:

$$(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 4) = 7.$$

РЕШЕНИЕ. Раскроем скобки, группируя первый множитель с четвертым, а второй — с третьим:

$$(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) = 7.$$

Теперь делаем замену  $t = x^2 + 3x - 4$ :

$$t(t + 6) = 7 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 1, \\ x^2 + 3x - 4 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 5 = 0, \\ x^2 + 3x + 3 = 0. \end{cases}$$

Первое квадратное уравнение данной совокупности имеет корни  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ ; второе квадратное уравнение корней не имеет.

ОТВЕТ:  $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ .

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x + 3)^2} = 16.$$

РЕШЕНИЕ. В левой части стоит сумма вида  $a^2 + b^2$ . Вычтем и прибавим величину  $2ab$ , выделив тем самым квадрат разности:

$$x^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 - 2x \cdot \frac{3x}{x+3} + 2x \cdot \frac{3x}{x+3} = 16 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} - 16 = 0.$$

Теперь — замена  $t = \frac{x^2}{x+3}$ :

$$t^2 + 6t - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -8, \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+3} = -8, \\ \frac{x^2}{x+3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 24 = 0, \\ x^2 - 2x - 6 = 0. \end{cases}$$

Первое квадратное уравнение корней не имеет, а второе имеет корни  $x = 1 \pm \sqrt{7}$ .

ОТВЕТ:  $1 \pm \sqrt{7}$ .

## 2 Симметрические уравнения

ЗАДАЧА 5. Решить уравнение

$$x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Действие «в лоб» — приведение к общему знаменателю — даст уравнение четвёртой степени, от которого ничего хорошего ждать не приходится (вы увидите ниже, какие в итоге получатся корни — подобрать их не представляется возможным). Нас выручает замена

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

Заметим, что

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

откуда

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Теперь исходное уравнение приводится к виду

$$t^2 - 2 + 2t = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -3. \end{cases}$$

Остаётся сделать обратную замену. В первом случае

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x} = 0.$$

Это уравнение не имеет корней. Во втором случае

$$x + \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

ОТВЕТ:  $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

ЗАДАЧА 6. Решить уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Значения  $x = \pm 1$  не являются корнями данного уравнения, так что приходится расстаться с надеждой подобрать корень. Однако можно заметить, что коэффициенты уравнения симметричны относительно центрального слагаемого (такие уравнения иногда называются *симметрическими*), и благодаря этой симметрии наше уравнение решается точно так же, как и предыдущая задача.

Поскольку  $x = 0$  не является корнем, можно поделить обе части на  $x^2$  и прийти к равносильному уравнению

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Теперь делаем замену  $t = x - \frac{1}{x}$ :

$$(t^2 + 2) - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 2, \\ x - \frac{1}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2}, \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

ОТВЕТ:  $1 \pm \sqrt{2}, \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ .

### 3 Однородные уравнения

Пусть  $p$  и  $q$  — некоторые выражения, зависящие от переменной  $x$ . Рассмотрим *однородное уравнение второй степени*

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

с ненулевыми коэффициентами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Если  $q = 0$ , то тогда и  $p = 0$ ; если  $q \neq 0$ , то делим уравнение на  $q^2$  и приходим к равносильному уравнению

$$a \left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \frac{p}{q} + c = 0,$$

квадратному относительно новой переменной  $t = p/q$ .

ЗАДАЧА 7. Решить уравнение

$$2x^4 + 3x^2(x - 2) = 2(x - 2)^2.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь  $p = x^2$ ,  $q = x - 2$ . Если  $x - 2 = 0$ , то и  $x^2 = 0$ , что невозможно. Поэтому делим обе части уравнения на  $(x - 2)^2$  и приходим к равносильному уравнению

$$2 \left(\frac{x^2}{x - 2}\right)^2 + \frac{3x^2}{x - 2} = 2.$$

Замена  $t = \frac{x^2}{x - 2}$ :

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2, \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x - 2} = -2, \\ \frac{x^2}{x - 2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 4 = 0, \\ 2x^2 - x + 2 = 0. \end{cases}$$

Первое квадратное уравнение имеет корни  $x = -1 \pm \sqrt{5}$ , второе квадратное уравнение не имеет корней.

ОТВЕТ:  $-1 \pm \sqrt{5}$ .

### 4 Замена в биномах

Напомним, что бином — это выражение вида  $(a + b)^n$ . При раскрытии скобок биномиальные коэффициенты определяются по треугольнику Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & & & \\
& & & & 1 & & 1 & & \\
& & & 1 & & 2 & & 1 & \\
& & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

(по сторонам идут единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух чисел над ним; на рисунке представлены первые шесть строчек этого треугольника). Так, например,

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \\
(a-b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 8. Решить уравнение

$$(x+5)^3 + (x+7)^3 = 8.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь удобно «врезаться посередине» — сделать замену  $t = x + 6$ . Получим:

$$(t-1)^3 + (t+1)^3 = 8 \Leftrightarrow (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = 8 \Leftrightarrow t^3 + 3t - 4 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корень  $t = 1$ , благодаря чему легко находим разложение на множители:

$$(t-1)(t^2 + t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = -5.$$

ОТВЕТ:  $-5$ .

## 5 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить уравнение.

1.  $x^6 + 9x^3 + 8 = 0.$

1-3-

2.  $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0.$

9^7 1-3-1

3.  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}.$

2-0

4.  $\frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2.$

0

5.  $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6.$

8-1

$$6. x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2.$$

-1; 2

$$7. \frac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \frac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}.$$

-4; 2

$$8. (x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55.$$

2; -4

$$9. (x^2 - 3x)^2 - 14x^2 + 42x + 40 = 0.$$

-2; -1; 4; 5

$$10. (x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81.$$

3; 3 ± 2√5

$$11. (2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0.$$

-5/2; -2; 1/2; 1

$$12. (x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) = 1.$$

2; 3

$$13. 10x^2(x - 2)^2 = 9(x^2 + (x - 2)^2).$$

-1; 3

$$14. \frac{1}{x(x + 2)} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{12}.$$

1; -3

$$15. \frac{6}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{8}{(x - 1)(x + 4)} = 1.$$

0; -3; -3 ± √73/2

$$16. \frac{16}{(x + 6)(x - 1)} - \frac{20}{(x + 2)(x + 3)} = 1.$$

-7; 2

$$17. (x^2 - 5x)(x + 3)(x - 8) + 108 = 0.$$

-1; 6; 5 ± √97/2

$$18. (x + 4)^2(x + 10)(x - 2) + 243 = 0.$$

-7; -1; -4 ± 3√3

19.  $(x - 2)(x - 3)^2(x - 4) = 20.$

$$\frac{2}{9^{\wedge} \mp 8}$$

20.  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120.$

$$9 - \text{; } 1$$

21.  $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 10.$

$$9^{\wedge} \mp 8 -$$

22.  $(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) = 1680.$

$$11 \text{ ; } 2 -$$

23.  $x^2 + 3x + 2 = 15 \cdot \frac{x^2 + 5x + 10}{x^2 + 7x + 12}.$

$$7 \text{ ; } 2 -$$

24.  $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30.$

$$\frac{2}{3 \mp \sqrt{25 \mp 4 \sqrt{30}}}, \frac{2}{3 \mp \sqrt{29}}$$

25.  $\frac{1}{6x^2 - 7x + 2} + \frac{1}{12x^2 - 17x + 6} = 4x^2 - 5x.$

$$\frac{8}{33^{\wedge} \mp 8}$$

26.  $\frac{1}{6x^2 - 7x + 2} + \frac{1}{12x^2 - 17x + 6} = 8x^2 - 6x + 1.$

$$\frac{2}{11} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{33}}}$$

27.  $\frac{24}{x^2 - 2x} = \frac{12}{x^2 - x} + x^2 - x.$

$$8 \text{ ; } 1 -$$

28.  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{10}{9}.$

$$8 - \text{; } 1$$

29.  $x^2 + \frac{x^2}{(x + 1)^2} = \frac{40}{9}.$

$$\frac{8}{2} - \text{; } 2$$

30.  $x^2 + \frac{81x^2}{(x + 9)^2} = 40.$

$$61^{\wedge} \mp 1$$

$$31. \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{45}{16}.$$

$$\frac{13}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$32. 4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47.$$

$$\frac{2}{1} \sqrt{\frac{4}{105}}$$

$$33. 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 4.$$

$$\frac{2}{1} \sqrt{2} - 1$$

$$34. \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - x - \frac{4}{x} - 12 = 0.$$

$$-2; 1; 4$$

$$35. \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$$

$$-2 \sqrt{2} \pm 3 \sqrt{6}$$

$$36. x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0.$$

$$\frac{2}{1} \sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{21}}$$

$$37. x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 1 = 0.$$

$$\frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{13}}; \frac{2}{1} \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$38. x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0.$$

$$2; 2$$

$$39. x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0.$$

$$-1 \pm \sqrt{3}; \frac{2}{1} \sqrt{\frac{2}{17}}$$

$$40. x^3 + \frac{1}{x^3} = 5\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

$$1 \pm \sqrt{2} - 1; 1 \pm \sqrt{2}$$

$$41. x^3 + x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 6.$$

$$1$$

$$42. \frac{(x^2 + 1)^2}{x(x + 1)^2} = \frac{625}{112}.$$

$$\frac{1}{1} \sqrt{2}$$

$$43. \frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{10}{9}.$$

$\frac{2}{1}$

$$44. (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$$

$\frac{2}{2} \wedge \frac{2}{2}; \frac{2}{2} \wedge \frac{2}{2}$

$$45. (x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2.$$

$\frac{2}{621} \wedge \frac{2}{-153}; -4; -6; -9$

$$46. (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 8) = 7x^2.$$

$\frac{4}{15} \wedge \frac{4}{37} \wedge \frac{4}{15} \wedge \frac{4}{37}$

$$47. \frac{2x}{x^2 - 4x + 2} + \frac{3x}{x^2 + x + 2} + \frac{5}{4} = 0.$$

$\frac{2}{2} \wedge \frac{2}{2}; -2; 1$

$$48. \frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} + \frac{3}{2} = 0.$$

$\frac{2}{13} \wedge \frac{2}{5}$

$$49. \frac{24x}{2x^2 - 3x + 4} = \frac{12x}{x^2 + x + 2} + 5.$$

$\frac{2}{1}$

$$50. \frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{3x}{x^2 - 8x + 15}.$$

$\frac{2}{3} \wedge \frac{2}{7}$

$$51. \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 7x + 4} + \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 4} + \frac{13}{3} = 0.$$

$\frac{4}{1}$

$$52. (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0.$$

$-4; -2$

$$53. 2(x^2 - x + 1)^2 = 9x(x - 1)^2.$$

$\frac{2}{1} \wedge \frac{2}{2}; \frac{2}{3}$

$$54. (x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 + 2x + 2) = 30x^2.$$

$\frac{2}{17} \wedge \frac{2}{5}; \frac{2}{2}$

$$55. x^4 + 5x^2(x + 1) = 6(x + 1)^2.$$

$\frac{2}{5} \wedge \frac{2}{3}; -3; -1$

56.  $20 \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^2 - 5 \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^2 + 48 \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$

$\frac{3}{2}; 3;$

57.  $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1).$

$\frac{2}{1}; -1; 4; 2;$

58.  $3(x + 2)^2 + 2(x^2 - 2x + 4)^2 = 5(x^3 + 8).$

$\frac{4}{33}; 1; 2; 7;$

59.  $\frac{x^2}{1-2x^2} = 12x^2 + 7x - 6.$

$\frac{4}{3}; -1; \frac{2}{1}; \frac{2}{2}; \frac{3}{3};$

60.  $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1).$

$\frac{2}{5}; 1;$

61.  $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16.$

$-3; -5;$

62.  $(x - 1)^5 + (x + 3)^5 = 242(x + 1).$

$-2; -1; 0;$

63.  $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64.$

$2; 4;$

64. («Ломоносов», 2012, 8–9)

$$4(x^3 - x) = (x^2 + 1)^2.$$

$\sqrt{2}; 1;$