Алгебраические преобразования

1. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.1*) Каково расстояние между точками a и b на числовой оси, если про них известно, что $a + b = \sqrt{2019}$ и $ab = 248{,}75$?

$\boxed{32}$

2. (*«Бельчонок», 2021, 8.1*) Вася написал число, а Петя написал число на 1 больше. Потом Вася написал ещё одно число, а Петя написал число на 3 больше. Могли ли суммы квадратов чисел Васи и Пети быть равными?

3. (*«Бельчонок», 2021, 8.1*) Известно, что $a = b + 7$, $c = d + 2$. Может ли быть так, что $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$?

4. (*«Бельчонок», 2020, 8.1*) Для различных положительных действительных чисел a, b справедливо равенство

$$\frac{a}{a^3 + a + 1} = \frac{b}{b^3 + b + 1}.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{13 - a^2 b - b^2 a}{2 + a^2 b + b^2 a}.$$

$\boxed{4}$

5. (*«Курчатов», 2020, 8.1*) Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

6. (*Всесиб., 2016, 7.1*) Доказать, что если $a + \frac{1}{a}$ — целое число, то и $a^2 + \frac{1}{a^2}$ — целое число.

7. (*«Надежда энергетики», 2017, 8.2*) Число x неизвестно, но известно число $A = x + \frac{1}{x}$.

1. Выразите через A числа $B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$ для $k = 2, 3, 4, 8$.
2. Выясните, при каких A и x выполняются равенства

$$B_2 = B_4 = B_8.$$

1) $B_2 = A^2 - 2$, $B_3 = A^3 - 3A$, $B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$, $B_8 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$; 2) $A = 2$, $x = 1$ или $A = -2$, $x = -1$

8. (*«Росатом», 2023, 7.2*) При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} = 50?$$

$\boxed{5100}$

9. (*«Бельчонок», 2018, 8.2*) Для неотрицательных x и y имеет место равенство

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \sqrt{2xy + \frac{1}{2}}.$$

Какие значения может принимать выражение $\sqrt{x+y} - \sqrt{2xy}$?

10. (*«Курчатов», 2021, 8.2*) Про вещественные числа a, b, c, x, y известно, что

$$\frac{1}{a+x} = 6, \quad \frac{1}{b+y} = 3, \quad \frac{1}{c+x+y} = 2.$$

Докажите, что среди чисел a, b, c одно равно сумме двух других.

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.3*) Сравните числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $2+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

12. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.4, 8.4*) Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz = 1$, $x + \frac{1}{z} = 5$, $y + \frac{1}{x} = 29$. Найдите значение $z + \frac{1}{y}$.

$\boxed{\frac{1}{4}}$

13. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 8.1*) Замените в выражении $\left(x^3-2\right)^2 + \left(x^2+*\right)^2$ звёздочку $(*)$ на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

14. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 9.1*) Замените в выражении $\left(x^4-3\right)^2 + \left(x^3+*\right)^2$ звёздочку $(*)$ на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

15. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 8.4*) Разность квадратов двух чисел равна 6, а если уменьшить каждое из этих чисел на 2, то разность их квадратов станет равна 18. Чему равна сумма этих чисел?

$\boxed{-2}$

16. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9.2*) На доске была написана несократимая дробь. Петя уменьшил её числитель на 1, а знаменатель на 2. А Вася прибавил к числителю 1, а знаменатель оставил без изменений. Оказалось, что в результате мальчики получили одинаковые значения. Какой именно результат у них мог получиться?

17. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.5*) Числа a, b, c и d таковы, что $a+b = c+d \neq 0$, $ac = bd$. Докажите, что $a + c = b + d$.

18. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.2*) Убедитесь, что $1009 = 15^2 + 28^2$, и представьте число 2018 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

19. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8.2*) Про различные числа a и b известно, что

$$\frac{a}{b} + a = \frac{b}{a} + b.$$

Найдите $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

$\boxed{-1}$

20. (*Всеросс., 2016, МЭ, 9.1*) Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение

$$a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2)\,?$$

$\boxed{0}$

21. (*Всеросс., 2019, МЭ, 9.2*) Найдите все такие тройки чисел, что каждое число равно квадрату суммы двух остальных.

$\boxed{(0, 0, 0);\ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$

22. (*ММО, 1996, 8.1*) Известно, что $a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}$. Верно ли, что $a = b$?

23. (*ММО, 2000, 8.1*) Два различных числа x и y (не обязательно целых) таковы, что

$$x^2 - 2000x = y^2 - 2000y.$$

Найдите сумму чисел x и y.

24. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 8.5*) Пусть a, b, c, d, e и f — некоторые числа, причём $ace \neq 0$. Известно, что значения выражений $|ax + b| + |cx + d|$ и $|ex + f|$ равны при всех значениях x. Докажите, что $ad = bc$.

25. (*ММО, 1993, 8.2*) Известно, что число n является суммой квадратов трёх натуральных чисел. Показать, что число n^2 тоже является суммой квадратов трёх натуральных чисел.

26. (*ММО, 1999, 8.3*) Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются полными квадратами.

27. (*ММО, 1998, 9.1*) Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?

28. (*«Физтех», 2023, 8*) В магазине продаются зелёные, красные и чёрные ручки. Крокодил Гена купил 16 зелёных, 85 красных и 57 чёрных ручек; Чебурашка — 50 зелёных, 75 красных и 34 чёрных, а старуха Шапокляк — 82 зелёных, 70 красных и 6 чёрных. Выйдя из магазина, они с удивлением обнаружили, что каждый из них заплатил за покупку одну и ту же сумму. Во сколько раз красная ручка дороже чёрной?

$\boxed{1{,}44}$

29. (*ОММО, 2019.3*) При каком наименьшем натуральном k выражение $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + k$ является квадратом натурального числа?

30. (*ОММО, 2016, 9–10.3*) Про действительные числа x, y, z известно, что

$$xy + z = yz + x = zx + y.$$

Докажите, что какие-то два из чисел x, y, z равны.

31. (*ОММО, 2016, 11.1*) Представьте в виде несократимой дроби

$$7\frac{19}{2015} \times 6\frac{19}{2016} - 13\frac{1996}{2015} \times 2\frac{1997}{2016} - 9 \times \frac{19}{2015}\,.$$

$\boxed{19/96}$

32. (*МГУ, ДВИ, 2014.1*) Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\left(8 + 4\sqrt{3}\right).$$

$\boxed{4}$

33. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1*) Сравните число

$$\sqrt{\left|8\sqrt{3} - 16\right|} - \sqrt{8\sqrt{3} + 16}$$

и наименьший корень уравнения $4x^2 + 21x + 17 = 0$.

$\boxed{\text{Число больше корня}}$

34. (*«Шаг в будущее», 2021, 8.2*) Решите уравнение

$$\sqrt{x + 7 + 6\sqrt{x-2}} - \sqrt{x + 142 + 24\sqrt{x-2}} = x^2 - 18.$$

$\boxed{3}$

35. (*«Ломоносов», 2014, 7.3, 8.3*) Незнайка придумал фантастическое умножение $\circledast$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликативности:

$$x \circledast x = 0$$

и тилимилитивности:

$$x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) + z.$$

Помогите Знайке вычислить $1755 \circledast 2014$.

$\boxed{-259}$

36. (*«Высшая проба», 2015, 8.4, 9.2*) Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найти значение выражения

$$(x^2 - 17x)\left(y + \frac{17}{y}\right).$$

$\boxed{-289}$

37. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–8.6*) Разложите на множители многочлен $x^4 + 3x^2 + 4$. В ответе укажите сумму коэффициентов получившихся множителей.

$\boxed{6}$

38. (*«Курчатов», 2018, 9.2*) Петя и Вася загадали по два действительных числа и сообщили их Маше. Оказалось, что сумма чисел, загаданных Петей, равна произведению чисел, загаданных Васей, и что произведение чисел, загаданных Петей, равно сумме чисел, загаданных Васей. Маша прибавила ко всем четырем числам по единице и перемножила. Мог ли у Маши получиться отрицательный результат?

39. (*«Курчатов», 2018, 9.3*) Вычислите значение выражения

$$\frac{(3^4+4)\,(7^4+4)\,(11^4+4)\ldots(2015^4+4)\,(2019^4+4)}{(1^4+4)\,(5^4+4)\,(9^4+4)\ldots(2013^4+4)\,(2017^4+4)}.$$

$\boxed{4080401}$

40. (*«Курчатов», 2019, 9.4*) Известно, что число 400000001 является произведением двух простых чисел p и q. Найдите сумму натуральных делителей числа $p + q - 1$.

$\boxed{45864}$

41. (*«Курчатов», 2019, 9.5, 10.4*) Положительные числа a, b и c таковы, что выполнены равенства

$$a^2 + ab + b^2 = 1, \quad b^2 + bc + c^2 = 3, \quad c^2 + ca + a^2 = 4.$$

Найдите $a + b + c$.

$\boxed{\sqrt{7}}$

42. (*«Ломоносов», 2013, 9.7*) Доказать, что если числа x, y и z — целые, то число

$$\frac{1}{2}\left((x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4\right)$$

является квадратом некоторого целого числа.

43. (*ММО, 2019, 9.4*) Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами четное число вершин, и в синий — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

44. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.1*) Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y}\right) : \frac{y^2}{4x^2-y^2}$$

при $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{7}{3}$.

$\boxed{\frac{8}{3}}$

45. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.1*) Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x-x^2)\cdot 10^6}{33}+\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right),$$

если $x = 0{,}9999$.

$\boxed{30304{,}03}$

46. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1*) Можно ли представить выражение

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-(ax+bz)^2-(by-cx)^2-(cz+ay)^2$$

в виде квадрата некоторого многочлена от переменных a, b, c, x, y, z?

47. (*«Высшая проба», 2019, 10.1, 11.1*) Про вещественные числа a, b и c известно, что

$$abc+a+b+c=10 \quad \text{и} \quad ab+bc+ac=9.$$

Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

48. (*«Высшая проба», 2015, 11.1*) Действительные числа x, y, z выбираются так, что выполняются равенства $xy+yz+zx=4$, $xyz=6$. Доказать, что при любом таком выборе значение выражения

$$\left(xy-\frac{3}{2}(x+y)\right)\left(yz-\frac{3}{2}(y+z)\right)\left(zx-\frac{3}{2}(z+x)\right)$$

является одним и тем же числом, и найти это число.

$\boxed{\frac{81}{4}}$

49. (*«Ломоносов», 2005.1*) Вычислите

$$\frac{2xy(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2}+\frac{(x+y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при $x=-1,\underbrace{6\ldots6}_{44}7$ и $y=-1,\underbrace{3\ldots3}_{45}$.

$\boxed{-27}$

50. (*«Ломоносов», 2008.1*) Найдите k, если

$$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2k-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3}.$$

$\boxed{1}$

51. (*«Курчатов», 2018, 11.3*) Приведите пример натуральных чисел a и b таких, что

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = 2018^2 + 2018 + 1.$$

52. (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 10.1*) Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

53. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2015.1*) На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

54. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2018.2*) Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

55. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2019.6*) Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

56. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.6*) Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде

$$\frac{xy+yz+zx}{x+y+z},$$

где x, y и z — три различных натуральных числа.

57. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2009.6*) В трёх клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трёх разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трёх исходных чисел (какими бы они ни были).

58. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2013.4*) Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a+b+c+d+e+f) : \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right) = 2012\,?$$

59. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2019.1*) Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?

60. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2011.1*) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a + b = c + d = ab - cd = 4n$.

61. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2018.5*) Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Докажите, что $a^3+b^2-a^2-b^3$ делится на n.

62. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2011.2*) Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

63. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2009.2*) При всяком ли натуральном n, большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

64. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2012.6*) Существуют ли такие различные натуральные числа a, b и c, что число $a+\frac{1}{a}$ равно полусумме чисел $b+\frac{1}{b}$ и $c+\frac{1}{c}$?

65. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2010.7*) Докажите, что для произвольных a, b, c равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0.$$