Алгебраические преобразования

1. (*Всесиб., 2016, 7.1*) Доказать, что если $a + \frac{1}{a}$ — целое число, то и $a^2 + \frac{1}{a^2}$ — целое число.

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.2; 7–8.1*) Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до увеличения)?

$\boxed{-505}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.2; 7–8.1*) Целое число уменьшили на 3, при этом его квадрат увеличился на 2015. Каким число было в начале (до уменьшения)?

Таких целых чисел нет

4. (*Московская устная олимпиада, 2011, 7.1*) В кафе Цветочного города автомат выдаёт пончик, если ввести в него число x, при котором значение выражения $x^2 - 9x + 13$ отрицательно. А если ввести число x, при котором отрицательно значение выражения $x^2 + x - 5$, то автомат выдаёт сироп. Сможет ли Незнайка, введя в автомат всего одно число, получить и то и другое?

5. (*«Высшая проба», 2017, 7.1*) Дано равенство

$$(x - 7)(x^2 - 28x + \ldots) = (x - 11)(x^2 - 24x + \ldots).$$

Вместо многоточий стоят некоторые числа, выбранные так, что равенство верно при любом значении x. Найдите числа, стоящие вместо многоточий.

6. (*«Курчатов», 2016, 7.2*) Если у прямоугольника ширину увеличить на 3 см, а высоту уменьшить на 3 см, его площадь не изменится. А как изменится площадь, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 4 см, а высоту увеличить на 4 см?

Уменьшится на 28 см^2

7. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.2*) Убедитесь, что $1009 = 15^2 + 28^2$, и представьте число 2018 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

8. (*«Высшая проба», 2015, 7.2*) Натуральные числа x и y таковы, что верно равенство

$$x^2 - 3x = 25y^2 - 15y.$$

Во сколько раз число x больше числа y?

В 5 раз

9. (*«Ломоносов», 2015, 7.2*) Для двух положительных чисел $a \neq b$ известно, что

$$a^2 - 2015a = b^2 - 2015b.$$

Какое наименьшее значение может принимать $a^2 + b^2$?

$\boxed{\frac{2015^2}{2}}$

10. (*«Ломоносов», 2014, 7–8*) Незнайка придумал фантастическое умножение $\circledast$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликативности:

$$x \circledast x = 0$$

и тилимилитивности:

$$x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) + z.$$

Помогите Знайке вычислить $1755 \circledast 2014$.

$\boxed{-259}$

11. (*«Росатом», 2023, 7.2*) При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=50?$$

$\boxed{5100}$

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.3*) Сравните числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $2+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

13. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.4, 8.4*) Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz=1$, $x+\frac{1}{z}=5$, $y+\frac{1}{x}=29$. Найдите значение $z+\frac{1}{y}$.

$\boxed{\frac{1}{4}}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7.5*) Можно ли подобрать целые числа $A\neq 0$, $B\neq 0$ и $C\neq 0$ так, чтобы каждый из многочленов $Ax^2+Bxy+Cy^2$, $Bx^2+Cxy+Ay^2$ и $Cx^2+Axy+By^2$ раскладывался в произведение двух линейных множителей с целыми коэффициентами?

$\boxed{\text{Можно}}$

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–8.6*) Разложите на множители многочлен x^4+3x^2+4. В ответе укажите сумму коэффициентов получившихся множителей.

$\boxed{6}$

16. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.7*) Два математика решили пообедать в кафе. Общая стоимость их заказов составила 770 рублей. Первый математик сказал: «Суммарное количество блюд, которые мы заказали, — простое число». Второй математик ответил: «Если ты такой умный, то я отдам тебе пряник стоимостью 64 рубля и после этого средняя стоимость блюд у каждого из нас увеличится на один рубль». Сколько рублей потратил каждый из них на свой заказ?

$\boxed{\text{первый потратил 122 рубля, а второй — 648 рублей}}$

17. (*Московская устная олимпиада, 2015, 7.9*) На каждой из ста карточек записано по одному числу, отличному от нуля, так, что каждое число равно квадрату суммы всех остальных. Какие это числа?