Парабола и отрезок

К официальным авторским решениям олимпиадных задач всегда нужно относиться критически, поскольку там могут быть неточности и ошибки. В качестве примера рассмотрим задачу, которая предлагалась девятиклассникам на олимпиаде «Росатом» в 2017 году. Решение автора содержит существенный недочет, в результате которого искомая область оказывается неверной (ну и численный ответ, разумеется, неверен тоже). Исправляем ситуацию!

Задача. (*«Росатом», 2017, 9.1*) Числа a и b таковы, что $a \in [-4; 3]$ и парабола $y = x^2 + ax + b$ пересекает отрезок с концами в точках $P(1; 2)$ и $Q(-1; 4)$. Нарисовать на координатной плоскости область, содержащую все точки $M(a; b)$, и найти ее площадь.

Решение. Уравнение прямой PQ имеет вид $y = 3 - x$. Точка Q имеет абсциссу -1; точка P имеет абсциссу 1; поэтому точка, в которой парабола пересекает отрезок PQ, имеет абсциссу, расположенную на отрезке $[-1; 1]$. Следовательно, задача ставится так: найти все значения параметров a и b, при которых уравнение

$$x^2 + ax + b = 3 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (a + 1)x + b - 3 = 0$$

имеет корень на отрезке $[-1; 1]$.

Обозначая $f(x) = x^2 + (a+1)x + b - 3$, переформулируем задачу в более удобном виде: найти все значения параметров a и b, при которых функция $f(x)$ обращается в нуль в какой-либо точке отрезка $[-1; 1]$. Здесь возможны три случая.

1. Парабола пересекает отрезок PQ в единственной точке, расположенной между точками P и Q. Это равносильно тому, что функция $f(x)$ принимает на концах отрезка $[-1; 1]$ значения разных знаков, то есть $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

2. Хотя бы одна из точек P, Q лежит на параболе (не исключается при этом наличие второй точки пересечения параболы и отрезка PQ). Это равносильно тому, что функция $f(x)$ обращается в нуль хотя бы на одном из концов отрезка $[-1; 1]$, то есть $f(-1) \cdot f(1) = 0$.

3. Парабола пересекает отрезок PQ в двух точках, расположенных между точками P и Q. Этим случаем мы займемся позже.

Случаи 1 и 2 объединяются условием $f(-1) \cdot f(1) \leqslant 0$. Имеем:

$$f(-1) = b - a - 3, \quad f(1) = a + b - 1,$$

поэтому наше условие принимает вид

$$(b - a - 3)(b + a - 1) \leqslant 0. \tag{1}$$

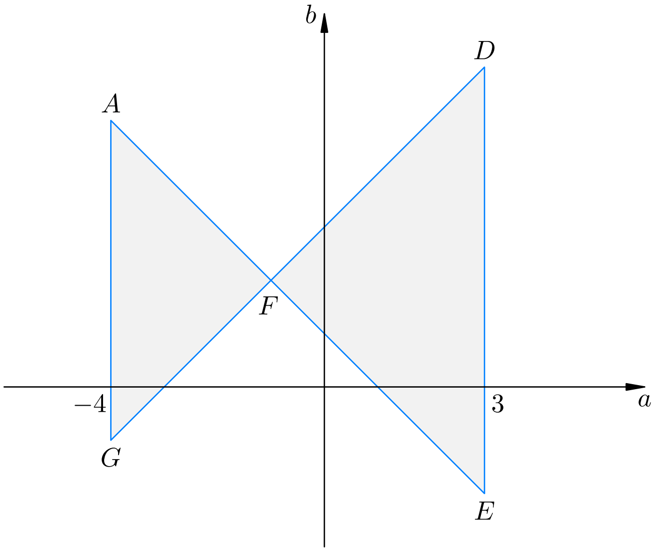
На координатной плоскости ab соответствующие точки лежат:

- либо над прямой $b = a + 3$ и одновременно под прямой $b = 1 - a$;

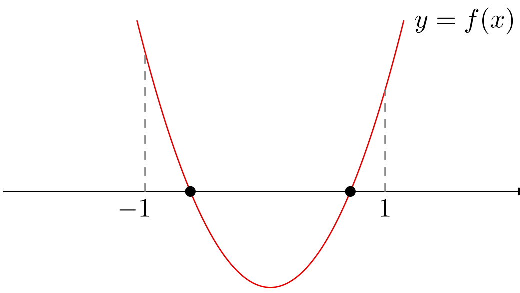
- либо наоборот — под прямой $b = a + 3$ и одновременно над прямой $b = 1 - a$;

- либо на самих этих прямых.

Данная область есть пара треугольников AFG и DFE на рисунке ниже (AE есть прямая $b = 1 - a$, DG есть прямая $b = a + 3$). Эта же область приведена в авторском решении в качестве ответа, поскольку в качестве условия пересечения параболы и отрезка у автора выступает лишь неравенство (1).



Однако данной областью дело не исчерпывается, поскольку имеется еще наш случай 3 (который в авторском решении упущен) — а именно, когда парабола пересекает отрезок в двух его внутренних точках. В этом случае функция $f(x)$ обращается в нуль в двух внутренних точках отрезка $[-1; 1]$. Графически ситуация выглядит так:



Данное расположение параболы характеризуется следующей системой условий[1]:

- дискриминант квадратного трехчлена $f(x)$ положителен;
- функция $f(x)$ принимает на концах отрезка $[-1; 1]$ положительные значения;
- абсцисса x_0 вершины параболы лежит внутри отрезка $[-1; 1]$.

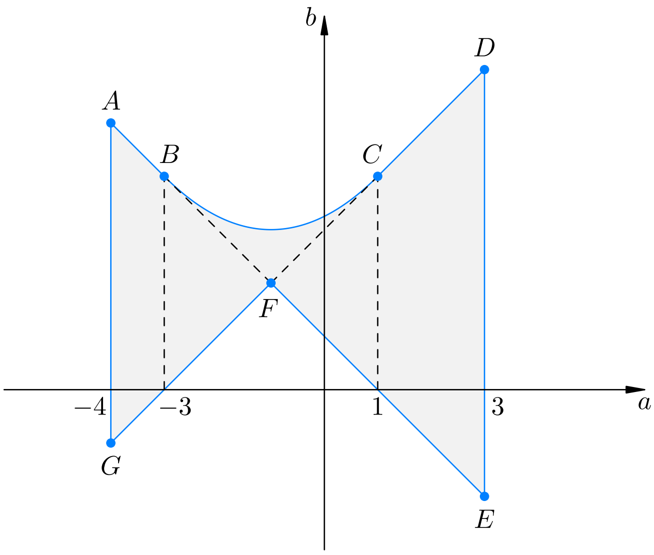
Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < x_0 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 - 4(b-3) > 0, \\ b - a - 3 > 0, \\ b + a - 1 > 0, \\ -1 < -\dfrac{a+1}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < \dfrac{(a+1)^2}{4} + 3, \\ b > a + 3, \\ b > 1 - a, \\ -3 < a < 1. \end{cases}$$

[1]Различные ситуации, в которых расположение параболы задается соответствующими необходимыми и достаточными условиями, обсуждаются в статье «Параметры и квадратный трехчлен. 2».

Эта система задает криволинейный треугольник BCF (рисунок ниже). Нетрудно убедиться, что прямые AE и DG являются касательными к параболе $b = \frac{(a+1)^2}{4} + 3$ в точках $B(-3;4)$ и $C(1;4)$ соответственно.

Итак, вот область $ABCDEFG$, которую требовалось нарисовать в задаче:



Остается найти площадь этой области. Суммарная площадь S_1 треугольников AFG и DFE равна 25; в этом вы можете легко убедиться самостоятельно (ну или посмотреть ниже в авторском решении — она там посчитана). Вычислим площадь S_2 криволинейного треугольника BCF; пользуемся его симметрией относительно прямой $x = -1$, проходящей через точку F, и находим S_2 как удвоенную площадь его правой половинки:

$$S_2 = 2 \cdot \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{(a+1)^2}{4} + 3 - (a+3) \right) da = 2 \cdot \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) da =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{a^3}{12} - \frac{a^2}{4} + \frac{a}{4} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Тогда искомая площадь $S = S_1 + S_2 = 25 + \frac{4}{3} = \frac{79}{3}$.

Авторское решение

Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 9 класс

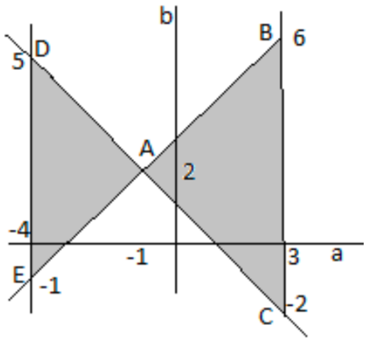
1. Числа $a, b,\ a \in [-4; 3]$ такие, что парабола $y = x^2 + ax + b$ пересекает отрезок с концами в точках $P(1; 2)$ и $Q(-1; 4)$. Нарисовать на координатной плоскости область D, содержащую все точки $M(a; b)$ и найти ее площадь.

1. Ответ: $S_D = 25$

Решение

Условие пересечения: $(a+b-1)(b-a-3) \le 0$

На рис изображена область D



Уравнение прямой $BE: b = a + 3$, уравнение прямой $DC: b = 1 - a$. Координаты точки $A(-1; 2)$.

Длины сторон $BC = 8,\ DE = 6$. Высота треугольника ADE равна $h_A = 3$, высота треугольника ABC равна $H_A = 4$. Площадь области $S_D = \frac{1}{2}(6 \cdot 3 + 8 \cdot 4) = 25$