Три логарифма

Рассматриваем задачу 11.6 олимпиады «Курчатов» по математике 2021 года и демонстрируем изящную идею, которую предложил одиннадцатиклассник Кирилл Орынбаев. Приходим к цели гораздо быстрее авторского решения!

Задача. (*«Курчатов», 2021, 11.6*) Даны положительные действительные числа a, b, c. Известно, что

$$(a-b)\ln c + (b-c)\ln a + (c-a)\ln b = 0.$$

Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Здесь $\ln x$ — это натуральный логарифм (логарифм числа x по основанию e).

Решение. Если $a = b$, то доказывать нечего. Пусть $a \neq b$. Покажем, что в таком случае обязательно $c = a$ или $c = b$.

Перепишем данное нам равенство следующим образом:

$$(a-b)\ln c = (\ln a - \ln b)\cdot c + a\ln b - b\ln a \qquad (1)$$

и рассмотрим его как уравнение с параметрами a и b относительно переменной c. Правая часть (1) является линейной функцией аргумента c, а левая часть (1) есть выпуклая функция c. Но прямая может пересечь график выпуклой функции самое большее в двух точках; значит, уравнение (1) может иметь самое большее два корня.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что значения $c = a$ и $c = b$ удовлетворяют уравнению (1), так что других корней оно иметь не может. Следовательно, из (1) с необходимостью следует $c = a$ или $c = b$, что и требовалось.

Авторское решение

Задача 6. Даны положительные действительные числа a, b, c. Известно, что

$$(a-b)\ln c + (b-c)\ln a + (c-a)\ln b = 0.$$

Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Здесь $\ln x$ — это натуральный логарифм (логарифм числа x по основанию e).

Решение. Воспользуемся следующим известным утверждением.

Если на координатной плоскости даны точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, то для любого действительного α точка с координатами $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2;\ \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)$ лежит на прямой, проходящей через $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Верно также и обратное утверждение: если точка лежит на прямой с начальными двумя, то найдётся такое действительное α, для которого координаты данной точки представляются в искомом виде.

Перейдём теперь к решению задачи. Если $a = c$, то всё очевидно. Если $a \neq c$, поделим равенство на $a - c$ и перенесём $\ln b$ в другую часть, получим

$$\ln b = \frac{b-c}{a-c}\ln a + \frac{a-b}{a-c}\ln c.$$

Рассмотрим на координатной плоскости две точки $A(a; \ln a)$ и $C(c; \ln c)$, а также обозначим $\alpha = \frac{b-c}{a-c}$ (тогда $1-\alpha = \frac{a-b}{a-c}$). Из утверждения выше следует, что точка

B с координатами $x_B = \frac{b-c}{a-c}a + \frac{a-b}{a-c}c = b$ и $y_B = \frac{b-c}{a-c}\ln a + \frac{a-b}{a-c}\ln c = \ln b$ лежит на прямой AC. Следовательно, точки $A(a; \ln a)$, $B(b; \ln b)$ и $C(c; \ln c)$ лежат на одной прямой. Но также ясно, что эти точки лежат на графике $y = \ln x$. Из свойств функции $\ln x$ известно, что графики логарифма и прямой могут пересекаться максимум по двум точкам (как говорят, функция $\ln x$ является *вогнутой*), а это значит, что какие-то два из трёх чисел a, b, c совпадают и $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

$\square$