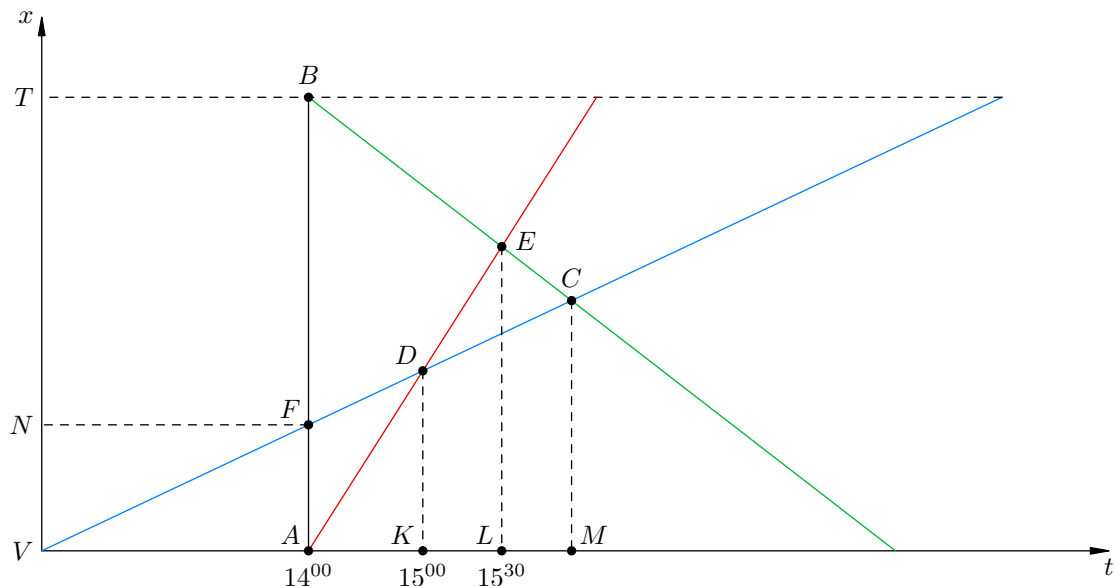


Задача на движение: Менелай vs алгебра

Перед нами обычная с виду задача на движение (олимпиада «Курчатов», 2021 год, 11 класс). Автор и решает ее обычным образом — алгебраически, составляя систему уравнений. Однако задача допускает совсем иное, чисто геометрическое решение — с помощью теоремы Менелая!

ЗАДАЧА. («Курчатов», 2021, 11.2) Из деревни в город шел путник. В 14:00, когда путник прошел четверть пути, из деревни в город выехал мотоциклист, а из города в деревню — грузовик. В 15:00 мотоциклист догнал путника, а в 15:30 встретил грузовик. Во сколько путник встретит грузовик?

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим графики движения, то есть зависимость координаты наших персонажей от времени. Синяя прямая — путник, красная — мотоциклист, зеленая — грузовик, V — деревня, T — город.



В момент старта мотоциклиста и грузовика (то есть в 14:00) путник находился в точке N . По условию $TN/NV = 3$. По теореме Менелая:

$$\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AD}{DE} \cdot \frac{EC}{CB} = 1. \quad (1)$$

Но $BF/FA = TN/NV = 3$ и $AD/DE = AK/KL = 2$, поэтому из (1) получаем $EC/CB = 1/6$, то есть $EC/BE = 1/5$. Но с другой стороны $EC/BE = LM/AL$. Следовательно,

$$LM = \frac{AL}{5} = \frac{90 \text{ мин}}{5} = 18 \text{ мин.}$$

Значит, путник встретит грузовик в момент времени $15:30 + 18 \text{ мин} = 15:48$. Всё!

Авторское решение

Решение. Ответ: 15:48.

Обозначим всё расстояние за S , а скорости путника, мотоцикла и грузовика — за V_p , V_m и V_g соответственно (расстояние измеряем в километрах, а скорость — в километрах в час). По условию мотоциклист догнал путника за один час. Их скорость сближения равна $V_m - V_p$, а расстояние между ними $S/4$, поэтому имеет место уравнение

$$\frac{S/4}{V_m - V_p} = 1.$$

Через полтора часа после начала движения встретились мотоцикл и грузовик. Их скорость сближения равна $V_m + V_g$, а суммарное пройденное ими расстояние равно S , поэтому имеет место уравнение

$$\frac{S}{V_m + V_g} = 1,5.$$

Преобразуем оба уравнения и получим

$$\begin{cases} V_m - V_p = \frac{S}{4} \\ V_m + V_g = \frac{2S}{3}. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и получим

$$V_g + V_p = \frac{5S}{12},$$

откуда находим

$$\frac{3S/4}{V_g + V_p} = \frac{9}{5}.$$

Следовательно, путник и грузовик встретились через $9/5$ часа после начала движения. Переводя это время в часы и минуты, получаем, что путник и грузовик встретились в 15:48.

Если желаете поупражняться в геометрическом подходе с привлечением теоремы Менелая, то вот пример идейно похожей задачи.

Задача. (МГУ, ДВИ, 2016.6) Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

ОТВЕТ. 12:00