Круги Эйлера. Формула включений и исключений

Содержание

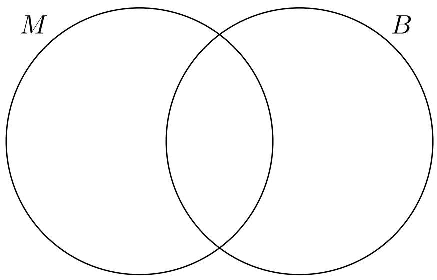
В данной статье мы учимся работать с кругами Эйлера и формулой включений и исключений. Начинаем с самых азов, подробно разбирая при этом три простые задачи кружка МЦНМО. Затем переходим к рассмотрению олимпиадных задач, среди которых наиболее интересны две последние: задача 7 про распределение работ между мальчиками (которая вплотную подводит нас к числам Стирлинга второго рода) и задача 8 про кружок робототехники (на симпатичную комбинацию формулы включений и исключений и метода «оценка плюс пример»).

1 Формула включений и исключений для двух множеств

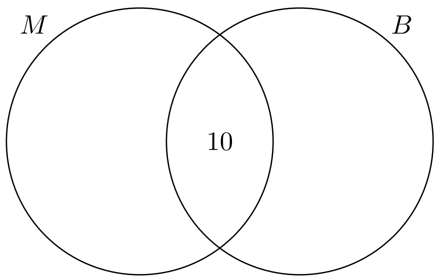
Начинаем с простейшего случая.

Задача 1. (*problems.ru, 103972*) В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 15 человек, биологией — 20, а математикой и биологией — 10?

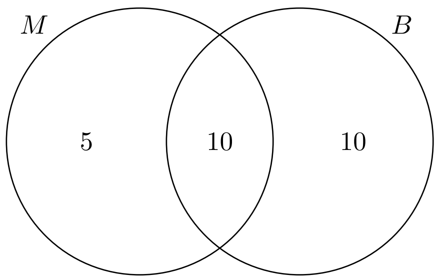
Решение. Обозначим через M множество всех математиков класса, а через B — множество всех биологов. Эти два множества можно наглядно изобразить с помощью *кругов Эйлера*:



Первый способ решения: заполняем области кругов. Удобно стартовать с «сердцевины». Область пересечения наших кругов — это 10 математиков-биологов:



Тогда математиков-небиологов получится $15-10=5$, а биологов-нематематиков $20-10=10$:



Теперь хорошо видно, что в классе учится $5+10+10=25$ человек.

Второй способ решения: формула включений и исключений. Что будет, если мы сложим всех математиков и всех биологов? Ну, мы получим $M+B=15+20=35$. Однако ясно, что это больше, чем число учеников класса. В самом деле, возьмем математика-биолога Петю. При таком сложении мы посчитали Петю дважды: один раз — со стороны математиков, второй раз — со стороны биологов. Следовательно, при сложении $M+B$ мы дважды посчитали всех десятерых математиков-биологов. А посчитать-то их нужно было лишь один раз! Поэтому из суммы $M+B$ надо вычесть затесавшееся туда лишнее число математиков-биологов:

$$M+B-MB=15+20-10=25.$$

Вот теперь число учеников класса найдено верно! А полученная формула для искомого числа N учеников класса:

$$\boxed{N=M+B-MB}$$

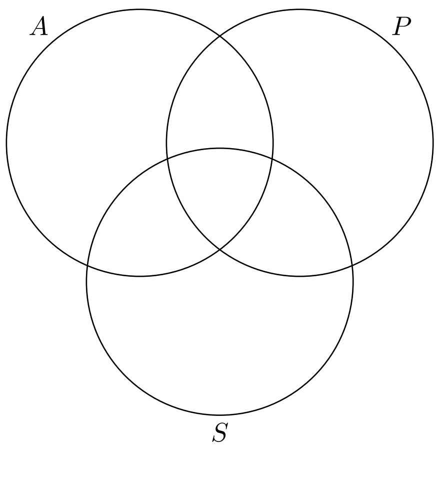
называется *формулой включений и исключений* для двух множеств.

2 Формула включений и исключений для трех множеств

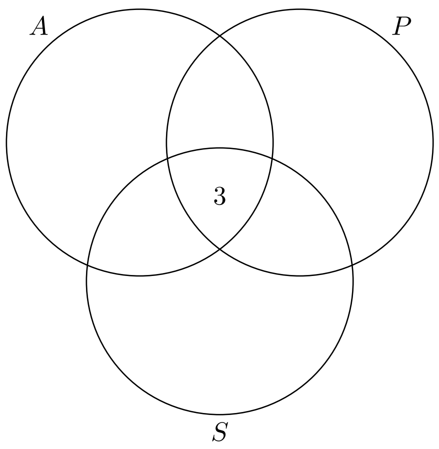
Усложняем ситуацию.

Задача 2. (*problems.ru, 103973*) В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

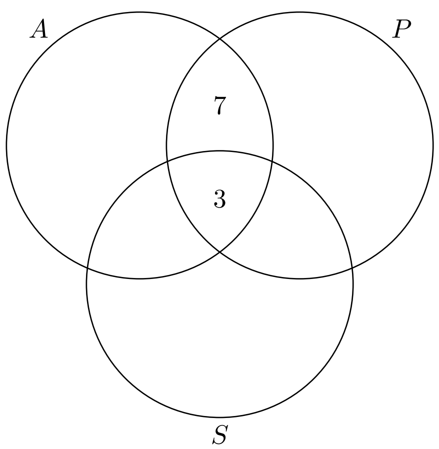
Решение. Пусть A — актеры, P — певцы, S — спортсмены. Изобразим их с помощью кругов Эйлера:



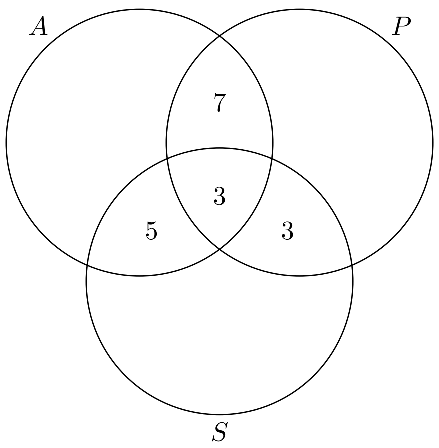
Первый способ решения: заполняем области кругов. Снова стартуем с сердцевины — там у нас по условию трое:



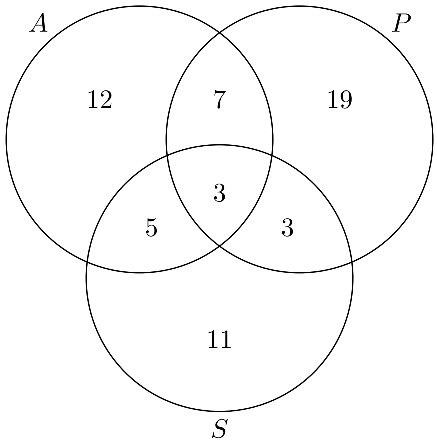
Актеров-певцов у нас 10 человек, поэтому число актеров-певцов-неспортсменов равно 7:



Аналогично актеров-спортсменов-непевцов получается 5 человек, а певцов-спортсменов-неактеров трое:



Теперь легко заполняем остальные пробелы. Тех, кто посещает только драмкружок, получается $27-7-3-5=12$ человек; аналогично, любителей только пения у нас 19, а спортсменов-неактеров-непевцов — 11:



Итого занимаются хоть чем-то $12 + 7 + 19 + 5 + 3 + 3 + 11 = 60$ человек. Нас спрашивают, сколько ребят не занимаются ничем; число таких безразличных равно $70 - 60 = 10$.

Второй способ решения: формула включений и исключений. Как и в предыдущей задаче, начнем с суммы всех небезразличных: $A + P + S = 27 + 32 + 22$ и подумаем, кого и сколько раз мы тут посчитали.

Пусть Петя — один из десяти актеров-певцов. В сумме $A+P+S$ наш Петя посчитан дважды: один раз — со стороны актеров, второй раз — со стороны певцов. Следовательно, из суммы $A + P + S$ надо вычесть AP; точно так же нужно вычесть PS и AS:

$$A + P + S - AP - PS - AS$$

(обозначения аналогичны предыдущей задаче).

Сейчас корректно учтены все, кроме троих из сердцевины. В самом деле, пусть Вася — актер-певец-спортсмен. Сначала мы его трижды посчитали в сумме $A+P+S$, а потом трижды выкинули: $-AP - PS - AS$. В итоге совсем не учтен оказался Вася! Надо поправить дело и прибавить Васю *один раз*, а заодно — и остальных ребят из сердцевины:

$$\boxed{N = A + P + S - AP - PS - AS + APS}$$

(в нашем случае $APS = 3$).

Мы пришли к *формуле включений и исключений* для трех множеств. Она дает нам число небезразличных (то есть занимающихся хоть чем-то) ребят:

$$N = 27 + 32 + 22 - 10 - 6 - 8 + 3 = 60.$$

Тот же самый результат мы получили и в первом способе решения.

3 Каким способом лучше решать: первым или вторым?

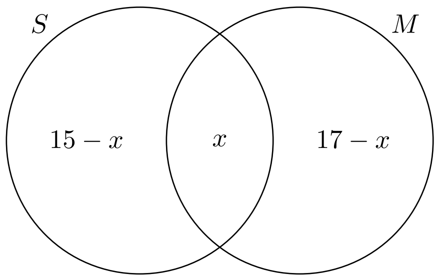
Разумеется, ориентируемся по ситуации, но формулу включений и исключений советую осваивать сразу. Впоследствии она приведет вас к целому созвездию интересных математических результатов: задача о беспорядках, функция Эйлера, числа Стирлинга второго рода. Об этом вы можете почитать в статье «Формула включений и исключений».

А пока заметим, что заполнение областей кругов Эйлера мы начинали с сердцевины, которая в обеих задачах была известна. Но что если мы не знаем сердцевину изначально?

Задача 3. (*problems.ru, 103971*) В киоске около школы продается мороженое двух видов: «Спортивное» и «Мальвина». На перемене 24 ученика успели купить мороженое. При этом

15 из них купили «Спортивное», а 17 — мороженое «Мальвина». Сколько человек купили мороженое обоих сортов?

Решение. Если мы хотим заполнять области кругов Эйлера, то сердцевину надо обозначить через x. Тогда одно лишь «Спортивное» купили $15 - x$ учеников, а одну лишь «Мальвину» купили $17 - x$ человек:



Получаем уравнение: $(15 - x) + x + (17 - x) = 24$, откуда $x = 8$.

Ну а с помощью формулы включений и исключений вопрос решается несколько быстрее и без лишних телодвижений:

$$24 = S + M - SM = 15 + 17 - SM,$$

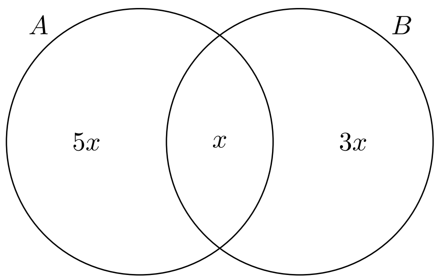
откуда $SM = 8$.

4 Разбираем олимпиадные задачи

Рассмотрим несколько олимпиадных задач разного уровня сложности, предлагавшихся в 5–10 классах.

Задача 4. (*«Росатом», 2019, 7.1*) Среди честных людей каждый шестой богатый. Среди богатых людей каждый четвертый — честный. Во сколько раз честных людей больше, чем богатых, но не честных?

Решение. Здесь очень наглядно работают круги Эйлера. Пусть A — честные, B — богатые. Количество AB честных и богатых обозначим через x.



Тогда $A = 6x$ и $B = 4x$. Число богатых, но не честных равно $3x$; это вдвое меньше, чем честных.

Ответ: В два раза.

Задача 5. (*«Ломоносов», 2012, отбор, 7.3*) Сколько чисел из набора 1, 2, …, 2010, 2011 не делятся ни на 3, ни на 7?

Решение. На 3 делятся числа 3, 6, ..., $2010 = 3 \cdot 670$, всего 670 чисел. На 7 делятся числа 7, 14, ..., $2009 = 7 \cdot 287$, всего 287 чисел.

Эти наборы пересекаются: общими являются числа, которые делятся на 21. Это числа 21, 42, ..., $1995 = 21 \cdot 95$, таких чисел 95.

По формуле включений и исключений для двух множеств найдем количество чисел, которые делятся на 3 или на 7: $670 + 287 - 95 = 862$. Тогда ни на 3, ни на 7 не делятся остальные $2011 - 862 = 1149$ чисел.

Ответ: 1149

Задача 6. (*«Физтех», 2014, 7.13, 8.12, 10.2*) На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игральных карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевёрнуто трижды?

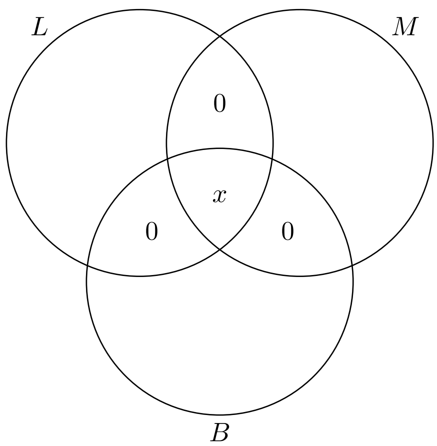
Решение. Обозначим числа перевернутых карт буквами: $L = 30$ (Лёша), $M = 19$ (Макс), $B = 21$ (Боря). Поскольку перевернутой оказалась вся колода, по формуле включений и исключений для трех множеств имеем:

$$36 = L + M + B - LM - MB - LB + LMB.$$

Каждая карта изначально лежала рубашкой вверх, а в итоге оказалась рубашкой вниз, поэтому она была перевернута либо один раз, либо три раза. Иными словами, никакая карта не переворачивалась ровно два раза, а этот означает, что

$$LM = LMB, \quad MB = LMB, \quad LB = LMB.$$

Особенно хорошо это видно на кругах Эйлера ($LMB = x$):



В итоге имеем:

$$36 = L + M + B - LMB - LMB - LMB + LMB = L + M + B - 2 \cdot LMB = 30 + 19 + 21 - 2x,$$

откуда $x = 17$.

Ответ: 17

Задача 7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7.4, 8.3, 9.3*) Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

Решение. На самом деле это классическая задача о разложении шаров по ящикам. Действительно, три мальчика — это три различных ящика, а шесть видов работ — это шесть разноцветных шаров. Нас спрашивают, сколькими способами можно разложить шесть разноцветных шаров по трем различным ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым.

Давайте сначала забудем про непустоту каждого ящика и разберемся с более простым вопросом: сколькими способами можно разложить шесть разноцветных шаров по трем различным ящикам? (Какие-то ящики могут при этом пустовать.) Присвоим ящикам буквы A, B и C, а шарам — номера 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Тогда каждая раскладка наших шести шаров по нашим трем ящикам однозначно кодируется шестибуквенным словом, составленным из букв A, B или C. Например:

- $ABCABC$ — первый и четвертый шар лежат в ящике A, второй и пятый шар лежат в ящике B, третий и шестой шар лежат в ящике C;
- $CCCBCB$ — первый, второй, третий и пятый шары лежат в ящике C, четвертый и шестой шары лежат в ящике B, ящик A пустой;
- $AAAAAA$ — все шары лежат в ящике A, ящики B и C пустые.

Ну а количество шестибуквенных слов, составленных из букв A, B и C, равно 3^6. Значит, число способов разложить шесть разноцветных шаров по трем различным ящикам также равно 3^6.

Но нам нужно, чтобы ни один из ящиков не пустовал. Для этого зайдем с другой стороны и посчитаем сначала количество всех остальных вариантов: а именно, найдем число N способов разложить шары так, чтобы *хотя бы один из ящиков оказался пустым.* Тут-то нам и поможет формула включений и исключений.

Обозначим N_A число раскладок, при которых пустует ящик A (аналогичный смысл имеют обозначения N_B и N_C); N_{AB} — число раскладок, при которых пустуют ящики A и B (аналогичный смысл имеют обозначения N_{BC} и N_{AC}). Обозначим также N_{ABC} число раскладок, при которых пустуют ящики A, B и C; это число, очевидно, равно нулю.

Имеем:

$$N = N_A + N_B + N_C - N_{AB} - N_{BC} - N_{AC} + N_{ABC}. \tag{1}$$

Число N_A равно количеству способов разложить шесть шаров по двум ящикам B и C, то есть 2^6. Понятно, что N_B и N_C также равны 2^6.

Число N_{AB} равно количеству способов положить шесть шаров в один ящик C, то есть 1. Аналогично $N_{BC} = N_{AC} = 1$.

В итоге получаем из формулы (1):

$$N = 2^6 + 2^6 + 2^6 - 1 - 1 - 1 + 0 = 3 \cdot 2^6 - 3.$$

Ну а искомое количество раскладок, при которых ни один ящик не пуст, равно общему числу раскладок минус число раскладок, при которых хотя бы один ящик пустует, то есть

$$3^6 - N = 3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540.$$

Ответ: 540

Задача 8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 5–6.2; 7–8.1*) В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

Решение. Пусть M — математики, F — физики, P — программисты. По условию $M = 7$, $F = 8$ и $P = 11$, так что $M + F + P = 26$.

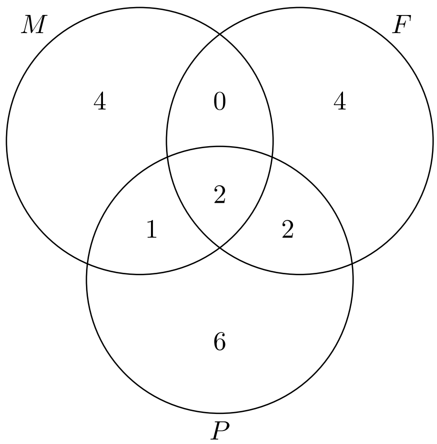
Всего участников кружка:

$$N = M + F + P - MF - MP - FP + MFP = 26 - MF - FP - MP + x, \tag{2}$$

где для краткости обозначено $x = MFP$. Согласно условию имеем $MF \geqslant 2$, $MP \geqslant 3$ и $FP \geqslant 4$, поэтому

$$N \leqslant 26 - 2 - 3 - 4 + x = 17 + x. \tag{3}$$

Прежде всего рассмотрим случай $x = 2$. Тогда имеем оценку $N \leqslant 19$, и эта оценка точна, то есть в ней может достигаться равенство. Вот пример:



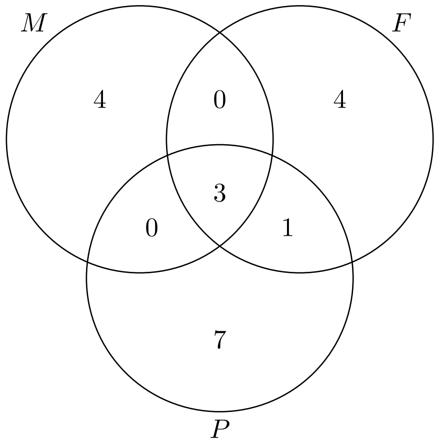
В самом деле, тогда $MF = 2$, $MP = 3$, $FP = 4$, а всего в кружке 19 человек.

Теперь становится понятно, что нет смысла рассматривать случаи $x = 0$ и $x = 1$. Ведь число $17 = 26 - 2 - 3 - 4$ в оценке (3) увеличить никак не получится, поскольку оно отвечает наименьшим возможным значениям MF, MP и FP. А число x мы уменьшаем по сравнению с рассмотренным случаем $x = 2$, поэтому и величина N в данных случаях лишь уменьшится.

Ну что ж, пойдем в сторону увеличения x. Пусть $x = 3$. Тогда $MF \geqslant 3$, $MP \geqslant 3$, $FP \geqslant 4$, и формула (2) дает оценку

$$N \leqslant 26 - 3 - 3 - 4 + 3 = 19.$$

Ничего нового не получили, пример на 19 у нас уже есть, можно идти дальше. Но интересно, что и в данном случае существует пример на 19:



Наконец, пусть $x \geqslant 4$. Тогда $MF \geqslant x$, $MP \geqslant x$, $FP \geqslant x$, и формула (2) дает оценку

$$N \leqslant 26 - x - x - x + x = 26 - 2x \leqslant 26 - 2 \cdot 4 = 18.$$

Это хуже приведенного примера на 19, и решение тем самым закончено.

Ответ: 19.

5 Решаем самостоятельно

1. (*ММО, 2006, 6.1, окружной этап*) В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

$\boxed{3}$

2. (*«Росатом», 2019, 7.1*) Каждый пятнадцатый брюнет имеет голубые глаза. Среди обладателей голубых глаз каждый десятый — брюнет. Во сколько раз число брюнетов, не обладающих голубым цветом глаз, больше числа голубоглазых, не являющимися брюнетами?

$\boxed{\text{в } \frac{9}{14} \text{ раза}}$

3. (*«Росатом», 2015, 7.1*) Среди 35 учеников 7 «А» класса не любят есть конфеты 13, торты — 12, пряники — 9 учеников. Кроме того, не любят есть конфеты и торты 3, пряники и торты — 6, конфеты и пряники — 5 учеников. Наконец, не любят есть конфеты, торты и пряники 2 ученика. Сколько в классе ребят, которые любят есть конфеты, торты и пряники?

$\boxed{13}$

4. (*ММО, 2008, 7, окружной этап*) По данным опроса, проведённого в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются ещё и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

$\boxed{26}$

5. (*Всесиб., 2015, 7.3*) Известно, что у всех *кракозябр* есть рога или крылья (возможно, и то, и то). По результатам всемирной переписи кракозябр выяснилось, что у 20% кракозябр, имеющих рога, есть ещё и крылья, а 25% кракозябр, у которых есть крылья, имеют ещё и рога. Сколько кракозябр осталось в мире, если известно, что их больше 25, но меньше 35?

$\boxed{32}$

6. (*«Бельчонок», 2021, 5.2*) На доске записаны все числа от 1 до 300 включительно. Вера раскрашивает в оранжевый цвет только те числа, у которых общий делитель с числом 99 больше 1. Сколько всего чисел станут оранжевыми?

$\boxed{118}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6, 7–8.5, 9.4*) Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

$\boxed{219}$

8. (*«Росатом», 2019, 7.4*) Среди натуральных чисел от 1 до 2019 есть n чисел кратных 7, но не кратных 8 и m чисел кратных 8, но не кратных 7. Найти $n - m$.

$\boxed{n - m = 36}$

9. (*ММО, 1938*) Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

$\boxed{686}$

10. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.1*) В некотором языке есть 3 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

$\boxed{16758}$

11. (*«Физтех», 2013, 8–9*) Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один закрасил красным 75% листа, второй закрасил зелёным 70% листа, а третий закрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо закрашено всеми тремя цветами?

$\boxed{10\%}$

12. (*«Высшая проба», 2014, 10*) В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знают польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные — ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?

$\boxed{52}$

13. (*«Ломоносов», 2013, 9.2*) Найдите количество натуральных делителей числа $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{40}$,

а) не являющихся ни точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами;

б) не представимых в виде m^n, где m и n — натуральные числа, причём $n > 1$.

а) 1093; б) 981