

## Неравенство на ДВИ по математике (МГУ, 2023)

ЗАДАЧА. (МГУ, ДВИ, 2023.6) Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Найти наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{2+a^2} + \frac{b}{2+b^2} + \frac{c}{2+c^2}.$$

В различных видеозаписях обсуждался [метод касательных](#) для решения данной задачи. Можно также исхитриться и решить через неравенства о средних. Ниже приводится чисто алгебраическое решение без применения спецсредств.

РЕШЕНИЕ. Перепишем условие в виде

$$\frac{3}{1+a} + \frac{3}{1+b} + \frac{3}{1+c} = 3$$

и введём замену

$$x = \frac{3}{1+a}, \quad y = \frac{3}{1+b}, \quad z = \frac{3}{1+c}.$$

Таким образом,

$$x + y + z = 3. \tag{1}$$

Имеем  $a = \frac{3-x}{x}$ , откуда

$$\frac{a}{2+a^2} = \frac{\frac{3-x}{x}}{2 + \frac{9-6x+x^2}{x^2}} = \frac{3x-x^2}{3(x^2-2x+3)}.$$

Далее после элементарных преобразований получаем:

$$\frac{3a}{2+a^2} = \frac{3x-x^2}{x^2-2x+3} = \frac{x+3}{x^2-2x+3} - 1.$$

Отсюда нужная оценка:

$$\frac{3a}{2+a^2} = \frac{x+3}{(x-1)^2+2} - 1 \leq \frac{x+3}{2} - 1. \tag{2}$$

Аналогично

$$\frac{3b}{2+b^2} \leq \frac{y+3}{2} - 1, \tag{3}$$

$$\frac{3c}{2+c^2} \leq \frac{z+3}{2} - 1. \tag{4}$$

Складывая неравенства (2), (3) и (4), получим

$$\frac{3a}{2+a^2} + \frac{3b}{2+b^2} + \frac{3c}{2+c^2} \leq \left(\frac{x+3}{2} - 1\right) + \left(\frac{y+3}{2} - 1\right) + \left(\frac{z+3}{2} - 1\right) = \frac{x+y+z}{2} + \frac{3}{2}.$$

С учётом (1) отсюда имеем

$$\frac{3a}{2+a^2} + \frac{3b}{2+b^2} + \frac{3c}{2+c^2} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

и окончательно

$$\frac{a}{2+a^2} + \frac{b}{2+b^2} + \frac{c}{2+c^2} \leq 1.$$

Равенство достигается при  $x = y = z = 1$ , то есть при  $a = b = c = 2$ .