Расстановка бельчат

В комбинаторных задачах бывает так, что искомое число хороших вариантов можно посчитать напрямую, а можно окольным путем — как общее число вариантов минус число плохих вариантов.

Смотрим задачу для 8 класса с олимпиады «Бельчонок» 2023 года. Авторское решение (приведенное в самом конце текста) — это прямой подсчет хороших вариантов с разбором случаев. Мы же действуем в обход и показываем, как работает формула включений и исключений.

Задача. (*«Бельчонок», 2023, 8.4*) Пятеро бельчат (рыжий, серый, белый, черный, полосатый) встали в ряд. Рыжий не рядом с серым. Черный не рядом с полосатым. Серый не рядом с белым. Сколькими способами бельчата могли встать в ряд?

Решение. Обозначим рыжего бельчонка буквой R, серого — G, белого — W, черного — B, полосатого — S. Обозначим далее:

- RG — множество расстановок, в которых рыжий стоит рядом с серым,
- BS — множество расстановок, в которых черный стоит рядом с полосатым,
- GW — множество расстановок, в которых серый стоит рядом с белым.

Отрицание обозначаем чертой сверху. Например, $\overline{RG}$ — это множество расстановок, в которых рыжий стоит не рядом с серым.

Также используем стандартное обозначение $|A|$ для мощности множества A, то есть для числа его элементов.

Итак, нас просят найти $|\overline{RG} \cap \overline{BS} \cap \overline{GW}|$. Как и обещано, идем в обход — из общего числа расстановок (равного 5!) вычитаем число запрещенных расстановок (в которых рыжий рядом с серым *или* черный рядом с полосатым *или* серый рядом с белым):

$$|\overline{RG} \cap \overline{BS} \cap \overline{GW}| = 5! - |RG \cup BS \cup GW|.$$

Ну а мощность последнего множества ищем по формуле включений и исключений:

$$\begin{aligned}|RG \cup BS \cup GW| = |RG| + |BS| + |GW| - \\ - |RG \cap BS| - |BS \cap GW| - |RG \cap GW| + |RG \cap BS \cap GW|.\end{aligned}$$

Чему равно $|RG|$? Мысленно склеим рыжего и серого и будем переставлять склеенную пару с тремя оставшимися бельчатами. Перестановок будет 4!. Но нужно еще умножить на два, так как рыжего и серого в склеенной паре можно поменять местами. В итоге

$$|RG| = 4! \cdot 2 = 48 = |BS| = |GW|.$$

Теперь найдем $|RG \cap BS|$. Имеем две склеенных пары: «рыжий-серый» и «черный-полосатый». Переставляем эти две пары с оставшимся белым бельчонком (3! перестановок) и учитываем, что можно менять местами рыжего и серого в первой паре, а также черного и полосатого во второй. Итого

$$|RG \cap BS| = 3! \cdot 2 \cdot 2 = 24 = |BS \cap GW|.$$

Теперь будем искать $|RG \cap GW|$. Сразу ясно, что это равно $24/2 = 12$. Действительно, заменим второе G на B; тогда $|RG \cap BW| = 24$ (уже доказано); ну а обратная замена B на G

уменьшит число вариантов вдвое (поскольку склеятся варианты, отличающиеся лишь перестановкой B и G). Но можно рассуждать и непосредственно. Коль скоро рыжий рядом с серым, а серый рядом с белым, мы имеем склеенную тройку «рыжий-серый-белый» (серый обязательно посередине). Переставляем эту тройку с двумя оставшимися бельчатами (3! перестановок) и учитываем, что рыжего и белого в склеенной тройке можно поменять местами. В итоге получим

$$|RG \cap GW| = 3! \cdot 2 = 12.$$

Осталось посчитать $|RG \cap BS \cap GW|$. Имеем склеенную тройку «рыжий-серый-белый» и склеенную пару «черный-полосатый». Переставляем тройку и пару двумя способами и учитываем, что рыжего и белого в склеенной тройке можно поменять местами, а также черного и полосатого в склеенной паре можно поменять местами. Таким образом,

$$|RG \cap BS \cap GW| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Теперь формула включений и исключений дает

$$|RG \cup BS \cup GW| = 48 + 48 + 48 - 24 - 24 - 12 + 8 = 92,$$

ну а искомое число расстановок

$$|\overline{RG} \cap \overline{BS} \cap \overline{GW}| = 5! - 92 = 28.$$

Авторское решение

4. Пятеро бельчат (рыжий, серый, белый, чёрный, полосатый) встали в ряд. Рыжий не рядом с серым. Чёрный не рядом с полосатым. Серый не рядом с белым. Сколькими способами бельчата могли встать в ряд?

Ответ. 28.

Решение. 1) Пусть серый на первом (крайнем левом) месте. Поскольку серый не рядом с рыжим и белым, то справа от него должен быть чёрный или полосатый. Среднее место должно быть у рыжего или белого (потому что чёрный и полосатый не рядом). Место справа от среднего места может занять тот, кто остался от чёрного и полосатого, или тот, кто остался от рыжего и белого. На последнее место остался только один бельчонок. Есть 2 способа переставить рыжего и белого, 2 способа переставить чёрного и полосатого, а также 2 способа выбрать, кто займет место справа от среднего места. Всего $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ способов.

2) Серый стоит на втором месте. Чёрный и полосатый должны быть по обе стороны от серого, иначе нам пришлось бы посадить рыжего или белого рядом с серым, что запрещено.Затем рыжий и белый занимают оставшиеся два места. Есть 2 способа переставить рыжего и белого, 2 способа переставить чёрного и полосатого. Всего $2 \cdot 2 = 4$ способа.

3) Серый стоит посередине. И снова чёрный и полосатый должны быть по обе стороны от серого, а рыжий и белый занимают оставшиеся два места. Здесь также есть 4 варианта.

4) Серый стоит на четвертом месте. По симметрии это то же самое, что и в случае 2), 4 варианта.

5) Серый стоит на последнем месте (крайнем правом). По симметрии это то же самое, что и в случае 1), 8 вариантов.

Складывая число вариантов, получаем $8 + 4 + 4 + 4 + 8 = 28$.