Олимпиадная математика. 9 класс

Задачник 9.2023

Данное пособие содержит задачи для девятиклассников, которые предлагались в последние годы на следующих олимпиадах:

1. Физтех (2021–2023)
2. Ломоносов (2020–2023)
3. Покори Воробьёвы горы! (2020–2023)
4. Курчатов (2020–2023)
5. Всероссийская олимпиада школьников, школьный этап в Москве (2021–2023)
6. Всероссийская олимпиада школьников, муниципальный этап в Москве (2020–2023)
7. Всероссийская олимпиада школьников, региональный и заключительный этапы (отдельные задачи, 2020–2023)
8. Росатом (2015–2023)
9. Шаг в будущее (2016–2023)
10. САММАТ (2021–2023)
11. Бельчонок (2018–2023)
12. Формула Единства / Третье тысячелетие (2015–2023)
13. Открытая олимпиада (2015–2023)
14. Будущие исследователи — будущее науки (2015–2023)
15. Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист! (2016–2023)
16. Олимпиада КФУ (2019–2023)
17. Надежда энергетики (2015–2023)
18. Всесибирская олимпиада (избранные задачи, 2015–2023)

Годы, являющиеся левой границей промежутка дат для каждой олимпиады, выбраны из следующих соображений.

- Более ранние задачи олимпиад, имеющих номера 1–7 в приведённом списке, можно найти в олимпиадных листках. Кстати, многие пункты оглавления задачника дублируют названия данных листков, и тогда раздел задачника начинается со ссылки на соответствующий листок.

- В остальных случаях нижняя граница определялась либо наличием соответствующих материалов на сайтах олимпиад, либо моими личными возможностями :-)

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее.

Распределение задач по темам зачастую сделано «на глаз»; в дальнейшем (по мере моего осмысления) некоторые задачи могут переместиться в другие темы. Актуальная версия задачника находится по адресу: http://mathus.ru/math/9math2023.pdf.

Оглавление

Глава 1

Целые числа

1.1 Десятичная запись

Дополнительные задачи — в листке Десятичная запись.

1.1.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 9.1*) В пятизначном числе зачеркнули одну цифру и полученное четырехзначное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 54 321. Найдите исходное число.

1.1.2. (*«Бельчонок», 2022, 9.1*) Сумма двух чисел равна 2022. Если у первого числа стереть последнюю цифру 5, а ко второму числу справа приписать цифру 1, то сумма изменённых чисел станет равна 2252. Найдите исходные числа.

1.1.3. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.1*) Найдите наибольшее пятизначное число, произведение цифр которого равно 120.

1.1.4. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.1*) Назовём число *хорошим*, если все его цифры различны и оно делится на 37. Найдите количество хороших трёхзначных чисел.

1.1.5. (*Всесиб., 2022, 9.1*) Назовём четырёхзначное число $\overline{abcd}$ *любопытным*, если сумма двузначных чисел $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равна двузначному числу $\overline{bc}$. Например, число 1978 любопытное, так как $19 + 78 = 97$. Найти количество любопытных чисел.

1.1.6. (*Олимпиада КФУ, 2020, 9.2*) Найдите две последние цифры перед запятой (цифры единиц и десятков) в десятичной записи числа $\frac{10^{120}}{10^5+1}$.

1.1.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.3*) Найдите наименьшее натуральное число n, для которого десятичная запись числа $n!$ оканчивается 500 нулями. $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n)$

1.1.8. (*«Росатом», 2021, 9.3*) При каких натуральных n дробь $\frac{2}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0{,}1(a_1a_2)$ с периодом, содержащим две различные цифры?

1.1.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 9.3*) Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

1.1.10. (*«Курчатов», 2021, 9.3*) В пятизначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

1.1.11. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.4*) Найдите наименьшее положительное целое число, в котором произведение цифр равно 5120.

1.1.12. (*«Бельчонок», 2020, 9.4*) Число, меньшее 100000, больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, на 6363. Найдите все такие числа.

1.1.13. (*«Бельчонок», 2020, 9.4*) Найдите все нечётные четырёхзначные числа, которые кратны, но не равны числам, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

1.1.14. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.7*) При анализе банковских счетов обнаружилось, что остатки средств на каждом из них больше 10 рублей. При этом нашлась группа клиентов, каждый из которых имеет на своем счете одинаковую денежную сумму. Эта сумма является числом, состоящим из одних единиц. Если сложить все денежные средства на счетах данной группы клиентов, то полученная сумма также будет представляться числом, состоящим из одних единиц. Найдите, при каком наименьшем числе клиентов в группе это возможно, если в группе больше одного человека.

1.2 Сумма цифр числа

Дополнительные задачи — в листке Сумма цифр числа.

1.2.1. (*Всесиб., 2016, 9.1*) Известно, что сумма цифр числа A равна 59, а сумма цифр числа B равна 77. Какую минимальную сумму цифр может иметь число $A+B$?

1.2.2. (*Всесиб., 2017, 9.3*) Можно ли представить число 2017 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма цифр одного из которых вдвое больше суммы цифр другого?

1.2.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.5*) Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ раз.

1.3 Делимость

Дополнительные задачи — в листке Делимость. Общие свойства.

1.3.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.4*) Простое число p таково, что число $p+25$ является седьмой степенью простого числа. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты.

1.3.2. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.1*) Для натурального числа a произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot a$ обозначается как $a!$.

1. Найдите наименьшее натуральное число m такое, что $m!$ делится на $23m$.
2. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n!$ делится на $33n$.

1.3.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 9.1*) Докажите, что для любого натурального n число $n^3+6n^2+12n+16$ составное.

1.3.4. (*«Надежда энергетики», 2022, 9.1*) Пусть четырехзначные числа n, k, m обозначают различные годы XXI века, отличающиеся друг от друга на 5 лет, причем хотя бы одно из них оканчивается нулем. Докажите, что произведение nkm делится на 750.

1.3.5. (*«Бельчонок», 2022, 9.1*) Найдите все целые a, при которых модуль числа $|a^2-3a-6|$ равен простому числу.

1.3.6. (*«Физтех», 2023, 9.1*) Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

1.3.7. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.1*) Сумма двух различных натуральных делителей натурального числа n равна 100. Какое наименьшее значение может принимать число n? (Среди указанных делителей могут быть единица и само число.)

1.3.8. (*Всеросс., 2022, ЗЭ, 9.1*) Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a=b$.

1.3.9. (*Олимпиада КФУ, 2023, 9.2*) Чему равно наименьшее натуральное число, которое делится на 2022 и запись которого начинается на 2023?

1.3.10. (*«Росатом», 2022, 9.2*) Доказать, что сумма $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{346}$ представляет собой дробь, числитель которой делится на 347.

1.3.11. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.2*) Найдите знаменатель дроби $\frac{100!}{28^{20}}$ после ее сокращения до несократимой.

(Выражение 100! равно произведению первых 100 натуральных чисел: $100!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot100$.)

1.3.12. (*Всесиб., 2023, 9.2*) Два простых числа называются *последовательными*, если не существует простого числа, которое больше одного из них и меньшего другого. Докажите, что сумму любых двух последовательных простых нечётных чисел всегда можно представить в виде произведения трёх натуральных сомножителей, каждый из которых больше единицы.

1.3.13. (*«Росатом», 2020, 9.2*) Найти девять натуральных чисел, кратных шести, среди которых ни одно число не кратно другому, но куб каждого числа кратен квадрату любого из них.

1.3.14. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.3*) Натуральные числа a и b таковы, что a делится на $b+1$ и 43 делится на $a+b$.

1. Укажите любое возможное значение a.

2. Чему может быть равно b? Укажите все возможные варианты.

1.3.15. (*«Бельчонок», 2022, 9.3*) Сумма m последовательных натуральных чисел равна простому числу p. Чему может равняться m?

1.3.16. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.4*) На доске написано:

$$*1*8*64*8^3*8^4*8^5*8^6*8^7.$$

Боря и Гоша по очереди заменяют звездочки знаками $+$ или $-$ (по одной звездочке за один ход). После восьми ходов вычисляется значение полученного выражения. Докажите, что Гоша может ходить так, что эта сумма будет делиться на 13, если он ходит вторым.

1.3.17. (*«Курчатов», 2022, 9.3*) Назовем *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

1.3.18. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.4*) Подряд в строчку выписана 2018 цифр. Известно, что в этой строчке каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они записаны), делится на 17 или на 23. В этой строчке последняя цифра 5. Какая цифра в строчке первая? Дать обоснованный ответ.

1.3.19. (*«Росатом», 2021, 9.4*) Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-20; 100]$, для которых выражение

$$A = n^3 + n^2 - 14n - 24$$

делится на 7. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них.

1.3.20. (*«Росатом», 2018, 9.4*) Найти наибольшее целое трехзначное число n, для которого число $15n^2 + 13n + 2$ делится на 49.

1.3.21. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 9.4*) Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — все натуральные делители числа x. Назовём число x *n-четверным*, если $k = 4n$ и $a_1+a_2+a_3 = a_4$, $a_5+a_6+a_7 = a_8$, $\ldots$, $a_{k-3}+a_{k-2}+a_{k-1} = a_k$. Докажите, что такое число существует для любого натурального n.

1.3.22. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 9.4*) Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

1.3.23. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.5*) На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

1.3.24. (*«Бельчонок», 2022, 9.5*) Натуральные числа, кратные 3, покрасили в два цвета: красный и синий, так, что сумма синего и красного числа — красная, а произведение синего и красного числа — синее. Сколькими способами можно раскрасить числа, чтобы число 546 было синим?

1.4 НОД и НОК

Дополнительные задачи — в листке НОД и НОК.

1.4.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.2*) Ваня загадал два натуральных числа, произведение которых равняется 7200. Какое наибольшее значение может принимать НОД этих чисел?

1.4.2. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.1*) Пусть x, y, z — попарно взаимно простые трёхзначные натуральные числа. Какое наибольшее значение может принимать НОД $(x+y+z, xyz)$?

1.4.3. (*САММАТ, 2021, 9.3*) На какое максимальное число можно сократить дробь $\frac{20202021}{20212020}$?

1.4.4. (*Олимпиада КФУ, 2019, 9.2*) Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из всех этих цветов *максимально возможное* количество букетов — причём так, чтобы все букеты были одинаковы. Сколько букетов у неё получится?

1.4.5. (*«Физтех», 2023, 9.2*) Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

1.4.6. (*САММАТ, 2021, 9.7*) Найдите пары натуральных чисел m и n, для которых выполняется равенство:

$$\text{НОК}\,(m,n) - 2\cdot\text{НОД}\,(m,n) = \frac{5mn}{7}.$$

1.4.7. (*Всеросс., 2023, РЭ, 9.6*) Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

1.4.8. (*«Росатом», 2016, 9.3*) Найти целые, положительные числа x и y, для которых $x+y=12$ и

$$x\cdot\text{НОД}(x,y) = \text{НОК}(x,y).$$

1.4.9. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.8*) Для каждой пары чисел $\overline{bab}$ и $\overline{abb}$, где a и b — различные цифры, посчитали НОД этих чисел. Найдите наибольший из этих НОД.

$\overline{abb}$ — стандартное обозначение для числа, состоящего из цифр a, b и b именно в таком порядке.

1.5 Остатки и сравнения

Дополнительные задачи — в листке Остатки и сравнения.

1.5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.1*) Найдите последнюю цифру числа $202^{303^{404}}$.

1.5.2. (*«Надежда энергетики», 2016, 9.1*) Мальчики и девочки образовали хоровод таким образом, что число детей, у которых сосед справа — того же пола, равно числу детей, у которых сосед справа — другого пола. Каково может быть число всех детей в хороводе?

1.5.3. (*«Надежда энергетики», 2019, 9.2*) Может ли число $n^2 + n + 8$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

1.5.4. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.2*) Натуральное число n при делении на 12 даёт остаток a и неполное частное b, а при делении на 10, наоборот, остаток b и неполное частное a. Найдите n.

1.5.5. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.2*) В карьере находилась куча из 20160000 песчинок. Грузовик за один рейс увозил из карьера количество песчинок, составляющее какую-то степень числа 8 (в том числе, возможно $8^0 = 1$). Мог ли он увести из карьера всю кучу песка ровно за 1000 рейсов?

1.5.6. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.2*) Найдите все натуральные n, при которых число

$$n^n - 4n + 3$$

простое.

1.5.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 9.2*) Даны два взаимно простых натуральных числа p и q, отличающиеся больше, чем на единицу.

а) Докажите, что существует натуральное n, для которого числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми.

б) Найдите наименьшее такое n при $p = 2$, $q = 2023$.

1.5.8. (*«Надежда энергетики», 2023, 9.3*) Ателье «Тяжкая ноша» закупило большую партию чугунных пуговиц. Если пришивать на каждое пальто по две пуговицы или если пришивать на каждое пальто по три пуговицы, то от всей партии в каждом случае останется 1 штука. Если же пришивать на каждое пальто по четыре пуговицы или если пришивать на каждое пальто по пять пуговиц, то от всей партии в каждом случае останется по 3 штуки. Какое количество пуговиц останется, если пришивать на каждое пальто по двенадцать штук?

1.5.9. (*«Росатом», 2017, 9.3*) Найти a, b и c, для которых $ar_n + br_{n+1} + cr_{n+2} = 6$ для всех натуральных n, где r_k — остаток от деления k на 3.

1.5.10. (*«Курчатов», 2023, 9.3*) Пусть a, b, c и d — наименьшие различные натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 100 = n$. Какие значения может принимать n?

1.5.11. (*«Ломоносов», 2022, 9.3*) Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

1.5.12. (*«Бельчонок», 2022, 9.4*) Найдите наименьшее натуральное $n > 1$, для которого сумма никаких двух натуральных степеней не является точным квадратом натурального числа.

1.5.13. (*«Курчатов», 2020, 9.4*) В вершинах правильного 2019-угольника расставили числа так, что сумма чисел в любых девяти подряд идущих вершинах равна 300. Известно, что в 19-й вершине стоит число 10, а в 20-й — число 20. Какое число стоит в 2019-й вершине?

1.5.14. (*«Физтех», 2022, 9.7*) Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1234.

1.5.15. (*Всеросс., 2020, МЭ, 9.6*) Найдите такое наибольшее n, что сумма четвёртых степеней любых n простых чисел, больших 10, делится на n.

1.5.16. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.8*) Сколько существует чисел вида 5^n, где n — натуральное число, в десятичной записи которых найдутся 2019 подряд идущих нулей?

1.6 Уравнения в целых числах

Дополнительные задачи — в листке Уравнения в целых числах.

1.6.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 9.1*) Найдите все простые числа p, для которых $8p + 1$ представляет собой:

а) точный квадрат;

б) точный куб.

1.6.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 9.1*) Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1*, которые делятся только на* 1 *и на само себя.*

1.6.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 9.1*) Найдите все такие числа k, для которых

$$(k/2)!(k/4) = 2016 + k^2.$$

Знаком $n!$ обозначен факториал числа n, то есть произведение всех целых чисел от 1 до n включительно (определён только для целых неотрицательных чисел; $0! = 1$).

1.6.4. (*САММАТ, 2023, 9.2*) Решить уравнение в целых числах

$$\sqrt{xy^2 - 2022} + 1 = \frac{2023}{xy^2 + 1}.$$

1.6.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 9.3*) Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

1.6.6. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.3*) Решите уравнение $3^x - 2^y = 7$ в целых неотрицательных числах.

1.6.7. (*«Физтех», 2023, 9.3*) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y.$$

1.6.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 9.3*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + y = 2022.$$

1.6.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 9.3*) Решите систему в целых числах:

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1), \\ (x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1). \end{cases}$$

1.6.10. (*САММАТ, 2021, 9.4*) При каких целых k, m, n имеет место равенство

$$k^2 - m^2 - 4n^2 + 4mn = 2021?$$

Выполнить полное исследование задачи и привести несколько примеров.

1.6.11. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.4*) Докажите, что уравнение $15^x + 29^y + 43^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

1.6.12. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.4*) Можно ли число 2873 представить в виде суммы нескольких различных факториалов?

1.6.13. (*«Бельчонок», 2018, 9.4*) Найдите все простые числа $p < q < r$ такие, что числа

$$A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1 \quad \text{и} \quad B = 3p + 5q$$

равны одному и тому же простому числу.

1.6.14. (*«Бельчонок», 2018, 9.4*) Найдите все простые числа $p < q < r$ такие, что числа

$$A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1 \quad \text{и} \quad B = 3p + 5q - 2$$

равны одному и тому же простому числу.

1.6.15. (*«Бельчонок», 2023, 9.4*) Найдите все пары $(p; q)$ простых чисел, при которых графики функций $y = 2x^4 + 2(q-2)x$ и $y = 2p - 8$ имеют хотя бы одну точку пересечения с целочисленными координатами.

1.6.16. (*«Бельчонок», 2023, 9.4*) Найдите все такие простые p, что число $5^p + 4p^4$ является точным квадратом.

1.6.17. (*«Росатом», 2015, 9.4*) Найти целые x и y, для которых $x^4 - 3x^2y + 2y^2 = 35$.

1.6.18. (*«Росатом», 2023, 9.4*) Доказать, что существует более 2024 различных троек целых чисел $(x; y; z)$, для которых
$$x^{2022} + y^{2022} = z^{2023}.$$

1.6.19. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 9.4*) Дано уравнение
$$x^3 + 2^n \cdot y = y^3 + 2^n \cdot x.$$

Докажите, что

а) если натуральные числа x, y n удовлетворяют этому уравнению, то $x = y$;

б) если ненулевые целые x, y и неотрицательные целые n удовлетворяют этому уравнению, то $|x| = |y|$.

1.6.20. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.5*) Решите уравнение $x^2 + 3y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

1.6.21. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.5*) Докажите, что уравнение $53^x - 16^y = 91$ не имеет решения в натуральных числах.

1.6.22. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 9.5*) Найдите все пары натуральных чисел m, n:, для которых $n! + 4! = m^2$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$).

1.6.23. (*«Надежда энергетики», 2019, 9.5*) Имеет ли уравнение
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2} = 1$$
решение в натуральных числах, больших единицы?

1.7 Задачи с целыми числами

Дополнительные задачи — в листке Задачи с целыми числами.

1.7.1. (*Олимпиада КФУ, 2022, 9.1*) Алиса купила открытку в книжном магазине, потратив менее 100 рублей. Цена открытки — целое число рублей. Через месяц она вернулась в магазин, чтобы купить такую же открытку, и обнаружила, что она подорожала в 1,2 раза, при этом продавец лишь переставил цифры на ценнике. Сколько стоила открытка первоначально?

1.7.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.1*) Каждый из 2017 учащихся средней школы изучает английский или немецкий язык. Английский язык изучают от 70% до 85% от общего числа учащихся, а оба языка изучают от 5% до 8%. Какое наибольшее число школьников может изучать немецкий язык?

1.7.3. (*Всесиб., 2015, 9.1*) В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие хотя бы в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовало 10% всех явившихся и что участвовавших в соревновании по подсказке было в полтора раза больше, чем участвовавших в соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.

1.7.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.1*) Пчелы продают гречишный мёд и дикий мёд в одинаковых стеклянных банках. Цена дикого мёда вдвое больше цены гречишного мёда (без учета стоимости банки). Пчёлы могут взять пустые банки, обменяв их на мёд. Винни Пух принёс 20 пустых банок, зная, что этого хватит на несколько банок с мёдом. Сколько банок и с каким именно мёдом он может получить от пчёл, если стоимость 12 банок с гречишным мёдом равна стоимости 7 банок с диким мёдом?

1.7.5. (*«Курчатов», 2023, 9.1*) Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

1.7.6. (*«Надежда энергетики», 2019, 9.1*) Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый головастик саблезубой лягушки, если все пятиногие головастики имеют один хвост, а все многохвостые — четыре ноги?

1.7.7. (*«Шаг в будущее», 2017, 9.1*) Железнодорожная компания получила заказ на перевозку определённого количества груза. В компании подсчитали, что если для перевозки выделить вагоны вместимостью 62 тонны, то один вагон останется недогруженным, а если выделить вагоны вместимостью 53 тонны, то понадобится на один вагон больше, чем если бы вагоны были по 62 тонны, но и при этом последний вагон опять будет недогружен. А вот если взять вагоны вместимостью 45 тонн, то все задействованные вагоны будут загружены полностью, но придётся увеличить число вагонов ещё на два. Определите массу груза.

1.7.8. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.1*) Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом

1. среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
2. среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Может ли число линий быть меньше 5? Если оно не меньше 5, то найдутся ли среди любых 5 линии, не ведущие ни в М, ни в П?

1.7.9. (*«Росатом», 2020, 9.1*) В 9а классе есть ученики, увлеченные кино, но есть и такие, которые увлечены чтением книг. Шестая часть любителей просмотра кинофильмов читает книги, а 20% книголюбов с удовольствием смотрят кино. В классе есть только три ученика, которые не смотрят фильмов и не читают книг. Сколько учеников в 9а классе, если их не менее 25, но не более 35?

1.7.10. (*«Физтех», 2023, 9.1*) Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N-1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

1.7.11. (*«Росатом», 2021, 9.1*) Команда из трех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на три равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала одну монету, а потом треть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий пират повторил то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 110 и не более 200 монет?

1.7.12. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.1*) 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников — сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

1.7.13. (*Всесиб., 2020, 9.2*) Если Петя отдаст две свои тетрадки Васе, то у Васи станет в n раз больше тетрадок, чем у Пети, а если Вася отдаст n своих тетрадок Пете, то у Пети станет в два раза больше тетрадок, чем у Васи. Найти все натуральные значения n, при которых это возможно.

1.7.14. (*«Бельчонок», 2022, 9.2*) У двоих бельчат было одинаковое количество сосновых шишек и одинаковое количество кедровых шишек. Всего шишек у каждого бельчонка было меньше 25. Первый бельчонок набрал ещё столько же сосновых шишек, сколько у него было, и 26 кедровых шишек. У него оказалось больше сосновых, чем кедровых. Второй бельчонок набрал ещё столько же кедровых шишек, сколько у него было, а 4 сосновые съел. У него оказалось больше кедровых, чем сосновых. Сколько сосновых и кедровых шишек было у каждого бельчонка изначально?

1.7.15. (*«Физтех», 2021, 9.2*) На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 477. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 477. Какие числа могли быть написаны на доске?

1.7.16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.2*) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

1.7.17. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.3*) Сумма четырех целых чисел $a > b > c > d$ равна 44. Аня посчитала для всевозможных пар этих чисел их положительные разности и получила числа 1, 3, 4, 5, 6 и 9. Найдите числа a, b, c и d.

1.7.18. (*«Бельчонок», 2022, 9.3*) Алиса написала несколько положительных целых чисел. Саша переписал эти числа и добавил одно целое число, меньше всех чисел Алисы. Каждый из них нашёл сумму и произведение своих чисел и поделил сумму на произведение. У Саши получилось число в 5 раз меньше, чем у Алисы. Какое число он мог добавить?

1.7.19. (*САММАТ, 2021, 9.6*) Куб размером $n \times n \times n$, где n — натуральное число, разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину отличную от единицы (у каждого из остальных ребро равно 1). Найти объем исходного куба.

1.7.20. (*Всесиб., 2018, 9.3*) Пусть двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ таковы, что отношение четырёхзначного числа $\overline{abcd}$ к сумме $\overline{ab} + \overline{cd}$ является целым числом. Найти все возможные значения, которые может принимать это число.

1.7.21. (*«Росатом», 2023, 9.3*) Петя написал на доске 8 последовательных натуральных чисел, а Вася стер два из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 2022. Какое наименьшее возможное число мог написать Петя?

1.7.22. (*«Росатом», 2022, 9.3*) Петя написал на доске четыре числа: 5, 4, 4, 3 и сказал Васе, что это записанные в произвольном порядке сумма, разность, произведение и частное двух положительных придуманных им чисел. Вася подумал и назвал эти числа. А вы можете это сделать?

1.7.23. (*«Ломоносов», 2023, 9.3*) Для укладки пола в квадратной комнате купили одинаковые квадратные плитки. 15 плиток оказались разбитыми. Оставшимися плитками выложили пол в другой комнате прямоугольной формы, в длину которой укладывается на 11 плиток больше, чем в ширину. Сколько плиток было куплено?

1.7.24. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.4*) Ваня в вершинах квадрата записал четыре натуральных числа, затем он возле каждой стороны записал произведение чисел в её концах. Проходящей мимо Ксюше Ваня сообщил, что сумма этих произведений равна 143. Ксюша, не смотря на рисунок Вани, немного подумала и назвала сумму чисел в вершинах, с чем Ваня согласился. Какое число назвала Ксюша? Дать обоснованный ответ.

1.7.25. (*«Росатом», 2019, 9.4*) Мастер работал с плиткой в форме прямоугольника $a \times b$, длины сторон которого a и b — целые числа, причем $1 < \frac{b}{a} < 2$. Ему удалось, не разрезая плиток, уложить ею две прямоугольные стены размерами 70×66 и 102×39. Найти a и b. Сколько плиток при этом было использовано?

1.7.26. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 9.5*) Натуральное число n назовём *кубоватым*, если $n^3 + 13n - 273$ является кубом натурального числа. Найдите сумму всех кубоватых чисел.

1.7.27. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.6*) Вася решал пример на доске в классе. Пока он стирал с доски, он случайно стёр две цифры из условия. Оставшийся на доске текст такой: $117 \cdot (24 + x) = 20{*}{*}21$, где символ $*$ означает стертую цифру. Покажите, что Вася, тем не менее, может решить этот пример, зная, что x — целое число.

1.7.28. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.8*) Целые числа n и m удовлетворяют неравенствам $3n - m < 5$, $n + m > 26$, $3m - 2n < 46$. Чему может равняться $2n + m$? Укажите все возможные варианты.

Глава 2

Алгебра и анализ

2.1 Алгебраические преобразования и вычисления

Дополнительные задачи — в листке Алгебраические преобразования.

2.1.1. (*САММАТ, 2022, 9.2*) Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение числового выражения:

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{20}-4}+\sqrt{\sqrt{20}+4}\right)^2}{\sqrt{\left(4-\sqrt{20}\right)^2}}-3\sqrt{20}.$$

2.1.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 9.1*) Найдите значение выражения

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)^2-c^2-4a^2b^2}{a^2+c-b^2}$$

при $a=2017$, $b=2016$, $c=2015$. Результат обоснуйте.

2.1.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 9.1*) Существуют ли такие нецелые числа x, y, что оба числа $5x+7y$ и $7x+10y$ целые?

2.1.4. (*«Бельчонок», 2021, 9.1*) Числа a, b, c удовлетворяют равенствам

$$a(a+1)=b(b+1)=c(c+1).$$

Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a)=0$.

2.1.5. (*«Надежда энергетики», 2017, 9.1*) Число x неизвестно, но известно число $A=x+\frac{1}{x}$.

1. Выразите через A числа $B_k=x^k+\frac{1}{x^k}$ для $k=2,3,4,8$.
2. Выясните, при каких A и x выполняются равенства
$$B_2=B_4=B_8.$$
3. При каких значениях x (и, соответственно, A) количество арифметических операций для вычисления B_2 минимально? Вычислите при найденных значениях x величину
$$C=\left(\left(x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}.$$

2.1.6. (*«Ломоносов», 2020, 9.1*) Вычислите

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2017\sqrt{1+2018\cdot 2020}}}}.$$

2.1.7. (*САММАТ, 2021, 9.8*) Решите уравнение: $\left(\frac{3}{25}x\right)^3 = b$, где b — среднее арифметическое чисел

$$m=\frac{276^2+276\cdot 253+253^2}{529}, \quad n=\frac{276^2-276\cdot 253+253^2}{23}.$$

2.1.8. (*Всесиб., 2020, 9.1*) Для неотрицательных чисел a, b, c, d выполнены равенства:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{c+d}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+d}=\sqrt{a+d}+\sqrt{b+c}.$$

Какое максимальное количество различных может быть среди чисел a, b, c, d?

2.1.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 9.2*) Существует ли такая точка с целыми координатами на координатной плоскости, расстояние от которой до начала координат равно $\sqrt{2\cdot 2017^2+2\cdot 2018^2}$?

2.1.10. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.2*) На электронных часах Вася увидел время: $\overline{ab}:\overline{cd}$ (если часов меньше 10, то $a=0$). Оказалось, что

$$a+bd+c=(a+d)(b+c).$$

Верно ли, что Вася точно увидел на часах цифру ноль, если время на часах показывается в 24-часовом формате?

2.1.11. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 9.2*) Даны четыре действительных числа a, b, c, d, которые удовлетворяют двум соотношениям: $a+b=c+d$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$.

а) Докажите, что $a^5+b^5=c^5+d^5$;

б) Можно ли сделать вывод, что $a^4+b^4=c^4+d^4$?

2.1.12. (*«Бельчонок», 2023, 9.2*) Числа a и b таковы, что одновременно выполнены равенства

$$a^4+3a^3b=3a^2+5 \quad \text{и} \quad a^3b+4ab+1=a^4+a^2.$$

Какие значения может принимать ab?

2.1.13. (*«Бельчонок», 2023, 9.2*) Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a+bc=(a+b)(a+c).$$

Докажите, что $b+ca=(b+c)(b+a)$.

2.1.14. (*«Росатом», 2015, 9.2*) Доказать формулу «сложного корня»

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

и с ее помощью вычислить величину $\left(\frac{\sqrt{13+\sqrt{48}}-1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}\right)^2$.

2.1.15. (*Всесиб., 2022, 9.2*) Даны натуральные числа a, b, c. Доказать, что, как минимум одно из трёх чисел $a^2 + b + c$, $b^2 + a + c$, $c^2 + a + b$ не является точным квадратом, то есть квадратом натурального числа.

2.1.16. (*«Шаг в будущее», 2016, 9.3*) Докажите, что число $\sqrt{2013 \cdot 2016 \cdot 2019 \cdot 2022 + 81}$ является целым.

2.1.17. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.3*) Незнайка предложил складывать дроби по такому правилу:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc + ad}.$$

Существуют ли ненулевые дроби, для которых сложение по правилу Незнайки даёт верный результат как при обычном сложении?

2.1.18. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.3*) Известно, что

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 3abc = 30 \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 13.$$

Найдите $a + b + c$.

2.1.19. (*Всесиб., 2016, 9.3*) Найти величину выражения $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$, если известно, что $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} = 5$ и $x + y + z = 2$.

2.1.20. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.4*) Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{a+b+c}{a+b-c} = 7, \qquad \frac{a+b+c}{a+c-b} = 1{,}75.$$

Чему равняется $\frac{a+b+c}{b+c-a}$?

2.1.21. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.4*) Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz = 1$, $x + \frac{1}{z} = 5$, $y + \frac{1}{x} = 29$. Найдите значение $z + \frac{1}{y}$.

2.1.22. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.5*) Про действительные ненулевые числа a, b, c известно, что

$$a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab.$$

1. Какие положительные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}?$$

Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать положительные значения, то в качестве ответа напишите 0.

2. Какие отрицательные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{4c}{a+b}?$$

Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать отрицательные значения, то в качестве ответа напишите 0.

2.1.23. (*«Физтех», 2023, 9.5*) Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

2.1.24. (*САММАТ, 2021, 9.10*) Для любой пары чисел определена некоторая операция «$*$», удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$, где операция «$\cdot$» — операция умножения. Найдите корень x уравнения: $x*2=2021$.

2.1.25. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.5*) Произведение двух различных целых чисел a и b является квадратом натурального числа. Существует ли такое целое число x, что $n=\frac{(a-x)(b-x)}{a-b}$?

2.1.26. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.4*) Пусть для чисел x и y запись $x*y$ обозначает число $xy+5x-3y-12$. Найдите значение выражения

$$0*(1*(2*(3*(4*(\ldots*(2019*2020)\ldots))))).$$

2.1.27. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.8*) Для действительных чисел x и y определим операцию $\star$ следующим образом:

$$x\star y=xy+4y-3x.$$

Вычислите значение выражения

$$\Bigg(\bigg(\ldots\Big(\big((2022\star 2021)\star 2020\big)\star 2019\Big)\star\ldots\bigg)\star 2\Bigg)\star 1.$$

2.2 Числовые неравенства

Дополнительные задачи — в листке Числовые неравенства.

2.2.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.2*) Сравните числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $2+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

2.2.2. (*САММАТ, 2023, 9.6*) Установить, какое из чисел больше

$$\frac{2023^{2023}+2020^{2020}}{2023^{2020}+2020^{2023}} \quad \text{или} \quad 1.$$

2.2.3. (*Всеросс., 2021, РЭ, 9.2*) Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^2-x>y^2$ и $y^2-y>x^2$. Какой знак может иметь произведение xy?

2.2.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.3*) Сравните числа $\frac{100}{101}\times\frac{102}{103}\times\ldots\times\frac{1020}{1021}\times\frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$.

2.2.5. (*«Бельчонок», 2022, 9.3*) На доске были записаны два неравенства, каждое из которых выполняется для некоторых чисел $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$:

$$\begin{aligned} &(1) \quad a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ac),\\ &(2) \quad a^4+b^4+c^4\leqslant 2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right). \end{aligned}$$

Настя считает, что неравенства (1) и (2) равносильны, Петя — что из (1) следует (2), Нина — что из (2) следует (1), Даня — что они все не правы. Чьи высказывания истинны?

2.2.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.4*) Целые числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} a+b+c<48,\\ b+c-d>20,\\ a+c+d>36. \end{cases}$$

Какое наименьшее значение может принимать число c?

2.2.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 9.4*) За круглым столом сидят 20 акционеров. Какое минимальное значение может иметь суммарное количество их акций, если известно, что

а) у любых трех из них в сумме больше 1000 акций,

б) у любых трех подряд сидящих акционеров в сумме больше 1000 акций?

2.2.8. (*«Надежда энергетики», 2023, 9.5*) Выясните, больше или меньше двух число

$$\sqrt[2023]{3+\sqrt{8}}+\sqrt[2023]{3-\sqrt{8}}.$$

2.3 Квадратный трёхчлен

Дополнительные задачи — в листке Квадратный трёхчлен.

2.3.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.7*) Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, старший коэффициент которого равен 1. На графике $y = = P(x)$ отметили две точки с абсциссами 10 и 30. Оказалось, что биссектриса первой четверти координатной плоскости пересекает отрезок между ними в его середине. Найдите $P(20)$.

2.3.2. (*САММАТ, 2022, 9.8*) Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполняются условия:

$$f(0) + f(1) = 0; \quad f(2) + f(3) = 0.$$

Найти корни уравнения $f(x) = 0$.

2.3.3. (*Олимпиада КФУ, 2019, 9.1*) Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1, 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$

2.3.4. (*Олимпиада КФУ, 2020, 9.1*) График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает оси координат в трех различных точках. Докажите, что треугольник с вершинами в этих точках является прямоугольным тогда и только тогда, когда $ac = -1$.

2.3.5. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.1*) Два приведённых квадратных трёхчлена отличаются перестановкой свободного члена и второго коэффициента. Сумма этих трёхчленов имеет единственный корень. А какое значение эта сумма принимает в единице?

2.3.6. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.1*) Графики квадратных трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются в точке $(3; 8)$. Трёхчлен $f(x) + g(x)$ имеет единственный корень 5. Найдите старший коэффициент трёхчлена $f(x) + g(x)$.

2.3.7. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.1*) Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может не иметь корней?

2.3.8. (*Всеросс., 2023, ЗЭ, 9.1*) Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) + g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x) + g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.)

2.3.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.2*) Известно, что график функции $f(x) = x^2 - 2016x + 2015$ проходит через две различные точки с координатами (a, c) и (b, c). Найдите сумму $a + b$.

2.3.10. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 9.2*) Даны две квадратичные функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = cx^2 + bx + a$. Оказалось, что функция $f(x) + g(x)$ имеет единственный корень. Докажите, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень.

2.3.11. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 9.2*) Петя говорит Коле: «Если ты задумаешь квадратный трехчлен, имеющий корни, и назовешь мне только старший коэффициент и расстояние между корнями, то я угадаю ординату вершины на его графике». Коля считает, что Петя ошибается: ведь для задания квадратного трехчлена нужно знать три числа. Кто из мальчиков прав?

2.3.12. (*«Курчатов», 2021, 9.2*) Числа d и e — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c. Могло ли так получиться, что a, b, c, d, e — это подряд идущие целые числа в некотором порядке?

2.3.13. (*«Бельчонок», 2018, 9.3*) Даны квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$. Известно, что

$$f(1) = g(2) = h(3), \quad f(2) = g(3) = h(1), \quad f(3) = g(1) = h(2).$$

Докажите, что многочлен $f(x) + g(x) + h(x)$ является константой.

2.3.14. (*«Бельчонок», 2018, 9.3*) Даны квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$. Известно, что

$$f(2) = g(3) = h(4), \quad f(3) = g(4) = h(2), \quad f(4) = g(2) = h(3).$$

Докажите, что многочлен $f(x) + g(x) + h(x)$ является константой.

2.3.15. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.3*) Пусть $f(x)$ — квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. При этом $f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = 4$. Найдите $f(\sqrt{10}) - f(\sqrt{7})$.

2.3.16. (*Всеросс., 2022, РЭ, 9.3*) Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел (c, d), что разность $P(c) - P(d)$ также является квадратом натурального числа.

2.3.17. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.4*) Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что график трёхчлена $-f(x + 2)$ касается графиков трёхчленов $f(x)$ и $f(-x)$. Найдите произведение корней трёхчлена $f(x)$.

2.3.18. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.4*) Даны три приведённых квадратных трёхчлена с неотрицательными дискриминантами. Корень из дискриминанта каждого из них является корнем двух оставшихся трёхчленов. Докажите, что какие-то два из этих трёхчленов равны.

2.3.19. (*Всесиб., 2018, 9.4*) Известно, что значения квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ на интервале $[-1, 1]$ не превосходят по модулю 1. Найти максимальное возможное значение суммы $|a| + |b| + |c|$.

2.3.20. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.5*) Даны сто квадратных трёхчленов, все старшие коэффициенты которых различны. Оказалось, что графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите что графики всех трёхчленов имеют общую точку.

2.3.21. (*Олимпиада КФУ, 2023, 9.5*) Квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + px + q$ удовлетворяет условию $P(q) < 0$. Доказать, что ровно один из его корней лежит в промежутке от 0 до 1.

2.3.22. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.7*) Стороны квадрата $ABCD$ параллельны осям координат, причём AB лежит на оси ординат, а сам квадрат расположен так, как показано на рисунке. Парабола, задаваемая уравнением

$$y = \frac{1}{5}x^2 + ax + b,$$

проходит через точки B и C. Кроме этого, вершина этой параболы (точка E) лежит на отрезке AD. Найдите сумму корней квадратного трёхчлена, графиком которого является парабола.

2.3.23. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.7*) Квадратные трёхчлены $g(x)$ и $h(x)$ имеют одинаковые старшие коэффициенты, а их графики касаются графика квадратного трёхчлена $f(x)$. Докажите, что абсцисса точки пересечения графиков $g(x)$ и $h(x)$ лежит точно между абсциссами упомянутых точек касания.

2.4 Средние величины

Дополнительные задачи — в листке Среднее арифметическое и среднее геометрическое.

2.4.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 9.3*) На доске записано несколько (более двух) последовательных целых чисел.

а) Докажите, что можно стереть одно число так, чтобы среднее арифметическое оставшихся чисел было целым.

б) Какое число k (удовлетворяющее свойству п. а)) можно стереть, если записано сто чисел: 1, 2, …, 100? Укажите все возможные значения k.

2.4.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.4*) Турнир по стрельбе предполагает несколько серий по 10 выстрелов каждая. В одной серии Иван выбил 82 очка, в результате чего среднее количество очков, выбиваемых им за серию, увеличилось с 75 до 76 очков. Сколько очков должен выбить Иван в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбитых за серию, стало равно 77?

2.4.3. (*«Ломоносов», 2022, 9.5*) Найдите все значения x, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = x^3 - 100x, \quad b = x^4 - 16, \quad c = x + 20 - x^2$$

положительно (*средним* из трёх данных чисел a, b, c называется число v в тройке $u \leqslant v \leqslant \omega$, получаемой в результате упорядочения данных чисел по нестрогому возрастанию).

2.4.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.6*) Среднее арифметическое $\frac{x+y}{2}$ и среднее геометрическое $\sqrt{xy}$ двух положительных целых чисел x и y являются двузначными числами. Одно из этих двузначных чисел получается из второго перестановкой цифр. Найдите разность $x - y$, если $x > y$.

2.5 Последовательности

Дополнительные задачи — в листке Последовательности.

2.5.1. (*«Надежда энергетики», 2021, 9.2*) Решите задачу из VIII книги «Начал» Евклида. Пусть числа $x_1, \ldots, x_{2021}$ связаны равенствами (по Евклиду — непрерывной пропорцией)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_{2020}}{x_{2021}},$$

Причем $x_1 = 2^{2022}, x_{2021} = 4$. Найдите $x_2, \ldots, x_{2020}$.

2.5.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.3*) Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$, а $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$. Найдите a_1, если $a_{2018} = 2$.

2.5.3. (*Всесиб., 2019, 9.3*) Последовательность чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$ такова, что $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}}$ для всех натуральных n. Найти a_n, $n = 1, 2, \ldots$

2.5.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.4*) Рассматривается последовательность чисел x_1, x_2, …, x_{2015}. При этом

$$x_n = \begin{cases} 7, & \text{если } n \text{ делится на 9 и 32;} \\ 9, & \text{если } n \text{ делится на 7 и 32;} \\ 32, & \text{если } n \text{ делится на 7 и 9;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите сумму всех членов данной последовательности.

2.5.5. (*«Бельчонок», 2021, 9.4*) В последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ известно, что $x_1 = 17$, $x_2 = 83$, и все члены при $n \geqslant 3$ удовлетворяют соотношению $x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{1}{x_n}$. Какое максимальное количество членов может быть в этой последовательности?

2.5.6. (*«Росатом», 2020, 9.4*) В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > \ldots a_n$ и имеющих сумму 120. Известно, что k-ое по порядку написанное число a_k, кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

2.5.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 9.4*) Дана последовательность чисел, члены которой удовлетворяют соотношению:

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

при всех $n = 4, 5, 6 \ldots$ Найдите b_{2023}, если известно, что $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$.

2.5.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.4*) Дан набор из n гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньший, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите все n, $9 < n < 16$, для которых все гири можно расположить на двух чашах весов так, чтобы весы пришли в равновесие.

2.5.9. (*«Бельчонок», 2021, 9.5*) В последовательности $\{x_n\}$ $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{5}$, и все члены при $n \geqslant 3$ удовлетворяют соотношению $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$. Найдите x_{100}.

2.5.10. (*Всеросс., 2022, РЭ, 9.6*) Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что

$$a_n - a_k \geqslant n^3 - k^3$$

для любых n и k таких, что $1 \leqslant n \leqslant 2022$ и $1 \leqslant k \leqslant 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}?

2.5.11. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.7*) а) Имеют ли общие члены две последовательности: 3; 16; 29; 42; …и 2; 19; 36; 53; …? (если да — привести пример, если нет — объяснить почему)

б) Имеют ли общие члены две последовательности: 5; 16; 27; 38 …и 8; 19; 30; 41; …? (если да — привести пример, если нет — объяснить почему)

в) Определите, какое наибольшее количество общих членов может быть у арифметических прогрессий 1; …; 1000 и 9; …; 999 если известно, что у каждой из них разность является целым числом, отличным от 1.

2.6 Прогрессии

Дополнительные задачи — в листке Последовательности.

2.6.1. (*«Росатом», 2023, 9.2*) Петя написал пять последующих членов арифметической прогрессии и зашифровал их по принципу: каждую цифру заменил на букву, разным цифрам — разные буквы и наоборот. Вот что получилось: Д, БЕ, АФ, СС, ФА. Какие числа написал Петя?

2.6.2. (*«Ломоносов», 2022, 9.2*) Найдите количество натуральных чисел, не превышающих 2022 и не входящих ни в арифметическую прогрессию 1, 3, 5, …, ни в арифметическую прогрессию 1, 4, 7, …

2.6.3. (*«Росатом», 2015, 9.3*) $\{a_k\}$ — арифметическая прогрессия, S_n — сумма первых n ее членов. Известно, что

$$S_m : S_n = m(m+2) : n(n+2)$$

при любых целых положительных m и n. Найти отношение $a_{2015} : a_{2014}$.

2.6.4. (*«Росатом», 2020, 9.4*) Сумма $b_5+b_6+\ldots+b_{2019}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 18, а их произведение $b_5 \cdot b_6 \cdot \ldots \cdot b_{2019}$ равно 3^{2015}. Найти сумму обратных величин $\frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_6} + \ldots + \frac{1}{b_{2019}}$.

2.6.5. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.7*) Пусть S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$. Известно, что

$$S_{n+1} = 2n^2 - 21n - 23.$$

1. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.
2. Найдите наименьшую по модулю сумму S_n.
3. Найдите наименьшее n, при котором S_n будет квадратом целого числа

2.7 Суммирование

Дополнительные задачи — в листке Суммирование.

2.7.1. (*«Надежда энергетики», 2016, 9.3*) Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

2.8 Целая и дробная части

Дополнительные задачи — в листке Целая и дробная части.

2.8.1. (*Олимпиада КФУ, 2022, 9.2*) Найдите целую часть числа

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}.$$

2.8.2. (*САММАТ, 2021, 9.2*) Решите уравнение:

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = \left[x - \frac{1}{2}\right].$$

Здесь квадратные скобки $[x]$ означают целую часть числа x, т. е. наибольшее целое, не превосходящее x.

2.8.3. (*«Надежда энергетики», 2022, 9.2*) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \cdots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = x^{2023}.$$

2.8.4. (*«Надежда энергетики», 2020, 9.2*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x_1] + x_2 = 3/2, \\ 3[x_1] - 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a.

2.8.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 9.2*) Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$?

Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a.

2.8.6. (*САММАТ, 2023, 9.4*) Найти наименьшее положительное решение неравенства

$$[x]^2 - x \cdot [x] + 3 \leqslant 0.$$

2.8.7. (*«Росатом», 2018, 9.3*) Найти x и y, если

$$\begin{cases} 2x - 3\{y\} = 0{,}5, \\ x + y = 3{,}5, \end{cases}$$

где $\{y\}$ — дробная часть числа y.

2.8.8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 9.3*) Решите уравнение:

$$[20x + 23] = 20 + 23x.$$

Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a.

2.8.9. (*«Надежда энергетики», 2018, 9.4*) Целой частью $[x]$ вещественного числа x называется наибольшее целое M такое, что $M \leqslant x$. Например, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[\pi] = 3$. Найдите все положительные вещественные числа x, для которых

$$x[x[x[x]]] < 2018.$$

2.8.10. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.6*) Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Найдите все натуральные значения n, при которых разрешимо уравнение $[x^n - 1] = \frac{x}{2}$. Для каждого найденного значения n укажите все решения x.

2.9 Доказательство неравенств

Дополнительные задачи — в листках

- Доказательство неравенств
- Доказательство неравенств (new)

2.9.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 9.1*) Даны три положительных числа, не обязательно различных. Известно, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится одно и то же число a. Докажите, что $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

2.9.2. (*САММАТ, 2021, 9.2*) Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{2021^2} < 1.$$

2.9.3. (*Всесиб., 2019, 9.2*) Для положительных чисел a и b выполняется неравенство $a + b > 4$. Доказать, что тогда $\frac{a}{b} > 3 - b$.

2.9.4. (*САММАТ, 2022, 9.4*) Докажите, что для последовательности чисел

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{25}$$

выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{23} + a_{24} + a_{25}}{a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{25}} < 5.$$

2.9.5. (*«Бельчонок», 2020, 9.3*) Юра взял три положительных числа, попарно перемножил их, сложил полученные произведения и получил число $N \geqslant 75$. Докажите, что сумма исходных чисел больше 14,5.

2.9.6. (*«Бельчонок», 2020, 9.3*) Числа a, b, c положительны и $abc(a+2b+3c) = \frac{1}{6}$. Докажите, что $(a+2b)(a+3c) \geqslant 2$.

2.9.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 9.3*) Произведение положительных чисел x, y, z, t равно 1. Докажите, что если

$$x+y+z+y > \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}, \quad \text{то} \quad x+y+z+t < \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}.$$

2.9.8. (*Олимпиада КФУ, 2021, 9.4*) Вещественные числа x и y таковы, что $x > 2$, $y > 3$. Докажите, что

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} \geqslant 10.$$

2.9.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.4*) Даны положительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} с суммой 2. Положительные числа b_1, b_2, $\ldots$, b_{100} таковы, что все выражения $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\ldots$, $\frac{a_{100}}{b_{100}}$ меньше 1000. Докажите, что сумма

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_{100}^2}{b_{100}}$$

меньше 2000.

2.9.10. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.5*) Докажите следующее неравенство для положительных чисел a, b, c:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

2.9.11. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.7*) Известно, что x, y, z, t неотрицательные числа, такие что $xyz = 1$, $y+z+t = 2$. Докажите, что $x^2+y^2+z^2+t^2 \geqslant 3$.

2.10 Наибольшие и наименьшие значения

Дополнительные задачи — в листке Наибольшее и наименьшее значения.

2.10.1. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.3*) В стране Налогии каждый платит со своей зарплаты столько процентов налога, сколько тысяч тугриков составляет эта зарплата. Какую зарплату иметь выгоднее всего?

(Зарплата измеряется положительным, не обязательно целым числом тугриков.)

2.10.2. (*«Надежда энергетики», 2022, 9.5*) Удовольствие, получаемое от каникул, пропорционально квадрату их продолжительности. Что выгоднее для увеличения удовольствия: устроить неразрывные каникулы или разделить их на две части? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменится удовольствие при разделении на две части?

2.10.3. (*САММАТ, 2023, 9.1*) Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, оказалось, что $a^2+b^2 = (a+b)q+r$ и $r < (a+b)$, $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Найти максимальную сумму $a+b$, если $q^2+r+10 = 2023$.

2.10.4. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.6*) Положительные числа x, y, z таковы, что

$$xy + yz + xz = 12.$$

Найдите наименьшее возможное значение $x + y + z$.

2.10.5. (*САММАТ, 2023, 9.5*) Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$

где x, y — произвольные вещественные числа.

2.10.6. (*САММАТ, 2022, 9.6*) Четыре положительных числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + cd = ac + bd = 4 \quad \text{и} \quad ad + bc = 5.$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b + c + d$.

2.10.7. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.2*) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{|x-1| + |x-2| + |x-4| + \ldots + |x-2^{19}|}.$$

2.10.8. (*«Ломоносов», 2021, 9.5*) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$ при $x > 0$.

2.10.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 9.3, 10.2, 11.2*) Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

2.10.10. (*«Ломоносов», 2020, 9.4, 10.4*) На графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, где $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

2.11 Целочисленная оптимизация

Дополнительные задачи — в листке Целочисленная оптимизация.

2.11.1. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.1*) Согласно нормативам Международной Федерации Рофлинга, поле для рофлинга состоит из двух площадок, одна из которых квадратная, а вторая имеет ту же ширину, а длину — от 20 до 25 метров включительно. При этом все размеры должны составлять целое число метров, а общая площадь поля должна находиться в диапазоне от 200 до 240 квадратных метров (включительно). Найдите наибольший и наименьший возможные размеры квадратной площадки.

2.11.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.1*) Павел поймал 32 рака и решил их продать на рынке. Когда у него купили часть улова, то оказалось, что покупатель заплатил за каждого на 4,5 рубля меньше, чем то количество раков, которое осталось лежать на прилавке. При этом мальчик заработал наибольшую сумму денег из всех возможных. Сколько денег заработал Павел? Сколько раков он продал?

2.11.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.2*) Мимо бассейна объёмом 400 м^3 литров воды шли 37 слонов. Часть из них решило освежиться. После их водных процедур выяснилось, что в среднем каждый слон использовал столько кубометров воды, сколько слонов не участвовали в купании. Известно, что в бассейне остался наименьший из возможных объём воды. Определите, какой объём воды остался в бассейне, сколько воды было израсходовано. Какое наибольшее количество слонов при таких условиях могло участвовать в купании?

2.11.4. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.6*) Квадрат разбит двумя прямыми на 4 прямоугольника. Площади двух из них, имеющих только одну общую точку, равны 45. Площади остальных двух также целые и различные. Какое наименьшее значение может принимать площадь всего квадрата?

2.12 Функциональные вычисления и уравнения

Дополнительные задачи — в листках

- Функциональные вычисления
- Функциональные уравнения и неравенства

2.12.1. (*«Надежда энергетики», 2018, 9.3*) Найдите все функции $f(x)$, определенные на всей числовой оси и удовлетворяющие условию

$$f(x-y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{при всех } x, y.$$

2.12.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.6*) Функция $f(x)$ определена и положительна при всех $x > 0$. Известно, что $f(1)+f(2) = 20$ и $f(a+b) = f(a)+f(b)+2\sqrt{f(a)f(b)}$ при всех $a, b > 0$. Найдите $f(2020)$.

2.12.3. (*«Физтех», 2022, 9.7*) Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y) < 0$.

2.13 Многочлены

Дополнительные задачи — в листке Многочлены.

2.13.1. (*«Надежда энергетики», 2016, 9.4*) Дан квадратный трехчлен $g(x)$, имеющий ровно один корень. Найдите этот корень, если известно, что и многочлен $g(ax + b) + g(cx + d)$ $(a \neq c)$ имеет ровно один корень.

2.13.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.7*) Дан многочлен $P(x)$, не равный нулю тождественно. Известно, что при всех x выполняется тождество $(x-2020)\cdot P(x+1) = (x+2021)\cdot P(x)$. Сколько корней имеет уравнение $P(x) = 0$?

Глава 3

Уравнения и неравенства

3.1 Квадратные уравнения

Дополнительные задачи — в листке Квадратные уравнения.

3.1.1. (*«Курчатов», 2022, 9.1*) Положительные числа a и b таковы, что уравнения

$$x^2 + ax - 100 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 200x + b = 0$$

имеют общий положительный корень, больший 1. Докажите, что $b - a > 100$.

3.1.2. (*«Надежда энергетики», 2023, 9.1*) Найдите все корни уравнения

$$a^2 \cdot \frac{x-b}{a-b} \cdot \frac{x-c}{a-c} + b^2 \cdot \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x-c}{b-c} + c^2 \cdot \frac{x-a}{c-a} \cdot \frac{x-b}{c-b} = x^2,$$

в котором $a \neq b \neq c$ — произвольные заданные значения.

3.1.3. (*САММАТ, 2021, 9.5*) Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни. Имеет ли квадратный трехчлен $a^5x^2 + b^5x + c$ действительные корни? Ответ объясните.

3.1.4. (*САММАТ, 2022, 9.7*) Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^{2021}x^2 + b^{2021}x + c^{2021}$? Ответ обоснуйте.

3.1.5. (*Олимпиада КФУ, 2021, 9.2*) Каждый из приведенных квадратных трехчленов x^2+ax+b и $x^2 + ax + c$ имеет два ненулевых целых корня. Один из корней второго трехчлена в 87 раз больше, чем первый корень первого трехчлена, а другой — в 95 раз больше, чем второй корень первого трехчлена. Найдите минимально возможное значение $|b|$. Обоснуйте свой ответ.

3.1.6. (*«Будущие исследователи – будущее науки», 2016, 9.2*) а) Дано квадратное уравнение $x^2 - 9x - 10 = 0$. Пусть a — его наименьший корень. Найдите $a^4 - 909a$.

б) Для квадратного уравнения $x^2 - 9x + 10 = 0$, у которого b — наименьший корень, найдите $b^4 - 549b$.

3.1.7. (*«Росатом», 2017, 9.2*) Найти целые, положительные n, при которых уравнение

$$x^2 - a_n x - a_{n+1} = 0$$

имеет рациональные корни, где $a_n = \text{НОД}\,(6, n)$.

3.1.8. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.3*) Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет ровно один корень. Положим $T(x)=x^2+px+q$. Известно, что уравнение $T(T(T(x)))=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите их.

3.1.9. (*«Росатом», 2019, 9.3*) Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ имеет корень $x=1$. Если его коэффициенты увеличить на единицу, то он будет иметь корень $x=2$. Если еще раз увеличить коэффициенты на единицу, то среди его корней будет $x=3$. Найти квадратный трехчлен.

3.1.10. (*«Росатом», 2020, 9.3*) Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа a, b, c, взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа a, b, c.

3.1.11. (*«Ломоносов», 2021, 9.4*) Сколько существует троек чисел a, b, c, каждое из которых служит корнем соответствующего уравнения $ax^2+bx+c=0$?

3.1.12. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.5*) Уравнение

$$x^2+ax+b+1=0$$

имеет два различных ненулевых целочисленных корня. Докажите, что число a^2+b^2 не является простым, если числа a и b целые.

3.1.13. (*«Надежда энергетики», 2017, 9.5*) Квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет дискриминант, равный 100. Сколько корней имеет уравнение $f(x)+f(x-10)=0$?

3.1.14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 9.5*) Учитель выписал на доске квадратное уравнение

$$x^2+ax+2022=0.$$

Андрей подставил вместо a по очереди все целые числа от 0 до 99 и решил все из получившихся 100 уравнений. Найдите сумму всех получившихся у Андрея действительных корней этих уравнений. При необходимости округлите ответ до сотых.

3.1.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.6*) Известно, что

$$2016+a^2+ac<ab.$$

Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня.

3.2 Уравнения высших порядков

Дополнительные задачи — в листке Уравнения высших порядков.

3.2.1. (*САММАТ, 2022, 9.1*) Решить уравнение $x^4-8\sqrt{3}x^3+66x^2-72\sqrt{3}x+81=0$.

3.2.2. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.1*) Решите уравнение

$$\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x+3\right)\left(x^2+3x+4\right)\left(x^2+3x+5\right)=15.$$

3.2.3. (*«Надежда энергетики», 2018, 9.1*) При проектировании электростанции возникла необходимость решить уравнение

$$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p,$$

где p — целочисленный параметр, задаваемый разработчиком. Для быстрого и надежного решения требуется, чтобы корни уравнения были рациональными числами. При каких p это верно?

3.2.4. (*«Надежда энергетики», 2017, 9.3*) Решите уравнение

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0.$$

3.3 Системы уравнений и неравенств

Дополнительные задачи — в листке Системы алгебраических уравнений.

3.3.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.1*) Если сложить произведение и сумму двух чисел, то получится 95. Если вычесть из произведения этих чисел их сумму, то получится 59. Найдите эти числа.

3.3.2. (*Всеросс., 2020, МЭ, 9.1*) Парабола $y=20x^2+19x$ и прямая $y=20x+19$ пересекаются в двух точках. Верно ли, что график функции $y=20x^3+19x^2$ проходит через эти же две точки?

3.3.3. (*«Физтех», 2022, 9.2*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50, \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1. \end{cases}$$

3.3.4. (*«Курчатов», 2023, 9.2*) Найдите все тройки действительных чисел (a,b,c), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a+b=b^2+c^2+2bc, \\ b+c=c^2+a^2+2ac, \\ c+a=a^2+b^2+2ab. \end{cases}$$

3.3.5. (*«Физтех», 2022, 9.3*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

3.3.6. (*«Физтех», 2021, 9.4*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \dfrac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

3.3.7. (*«Ломоносов», 2021, 9.3*) Решите систему

$$\begin{cases} \left|x^4 - 625x^2\right| \neq x^4 - 625x^2, \\ \left|6x^2 - 257x + 251\right| + 6x^2 - 257x + 251 = 0. \end{cases}$$

3.3.8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 9.6*) Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{32}{y^5} + \dfrac{48}{y^3} + \dfrac{17}{y} - 15, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{32}{z^5} + \dfrac{48}{z^3} + \dfrac{17}{z} - 15, \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{32}{x^5} + \dfrac{48}{x^3} + \dfrac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

3.4 Неравенства с модулем

Дополнительные задачи — в листке Неравенства с модулем.

3.4.1. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.1*) Решить неравенство:

$$\frac{|3x^2 + 8x - 3| + |3x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 30x - 9|}{|x-2| - 2x - 1} \leqslant 0.$$

3.4.2. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.1*) Решите неравенство:

$$3|3x-2| - |x-1| - 2|x| \leqslant 2\sqrt{9x^2 - 12x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 1.$$

3.4.3. (*«Физтех», 2022, 9.1*) Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leqslant 0.$$

3.4.4. (*«Физтех», 2022, 9.1*) Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-5)^2 + 4}{|x-5|} - 4\right)(|x-4| + |x-6| - 2) \leqslant 0.$$

3.5 Иррациональные уравнения

Дополнительные задачи — в листке Иррациональные уравнения и системы.

3.5.1. (*«Физтех», 2023, 9.3*) Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

3.6 Иррациональные неравенства

Дополнительные задачи — в листке Иррациональные неравенства.

3.6.1. (*САММАТ, 2021, 9.4*) Найти все целые решения неравенства

$$\sqrt{\frac{16x-39-x^2}{18}}\leqslant\frac{16x-36-x^2}{18}.$$

3.6.2. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.1*) Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}-\sqrt{3}}{x^2-16}\leqslant 0.$$

3.6.3. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.1*) Решите неравенство:

$$3\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}-x^3+3x-2}\leqslant 9-6x.$$

3.6.4. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.1*) Решите неравенство:

$$2\sqrt{(4x-9)^2}+\sqrt[4]{\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}+x^2+2x-4}\leqslant 18-8x.$$

3.6.5. (*«Шаг в будущее», 2023, 9.1*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1+x}-2}{1-\sqrt{x+2}}\geqslant 1+\sqrt{x+2}.$$

3.6.6. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.5*) Решите неравенство

$$\sqrt{x}\left(\frac{-x^2+81+(x-9)\sqrt{x^2+6x-27}}{9-x^2+(x+3)\sqrt{x^2+6x-27}}\right)\sqrt{\frac{x-3}{x+9}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3.6.7. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.5*) Решите неравенство

$$\left(2+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right):\left(-2+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}\right)\geqslant\sqrt{x-8}.$$

3.7 Комбинированные уравнения и неравенства

Дополнительные задачи — в листке Комбинированные уравнения и неравенства. 1.

3.7.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.1*) Решите уравнение

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11-\cos\frac{x^2-4+x\sqrt{2}}{18}=0.$$

3.7.2. (*САММАТ, 2023, 9.9*) Сколько действительных корней имеет уравнение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{7}x\right)\left(x^{2023}+2022x^3-2021\right)=0$$

на отрезке $x\in[-36,34]$?

3.7.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.6*) Решите неравенство:

$$\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\geqslant\left|\left|\sqrt{\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{9x^2+6x+1}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right|.$$

3.8 Минимаксные задачи

Дополнительные задачи — в листке Минимаксные задачи в алгебре.

3.8.1. (*«Шаг в будущее», 2016, 9.2*) Найдите все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{(3x^2+2xy-y^2)^{2016}+(x^2-4x+3)^{1580}}{\sqrt{28-3y-y^2}\cdot(y^3+y^2+9y+9)}=0.$$

3.8.2. (*«Физтех», 2023, 9.2*) Решите неравенство

$$\left|x^2+7x+12\right|+\left|x^2+2x-8\right|\leqslant|5x+20|.$$

3.8.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.1*) Решите неравенство:

$$\left|x^3+5x^2-3x+8\right|\geqslant\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^3+4x^2+3x\right|.$$

3.8.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.1*) Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{|x+2|}\right)\left(x^2+2x+2+|x+2|\right)\leqslant\sqrt{15-2x-x^2}.$$

3.8.5. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.3*) Решите неравенство:

$$\frac{2|2x-1|+2}{3}+\frac{6}{1+|2x-1|}\leqslant 4-\sqrt{16x^4-8x^2+1}.$$

3.8.6. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.5*) Решите неравенство:

$$\frac{2x^2-x+7}{\sqrt{2x^2-x+3}}\leqslant 7-\sqrt{9+\sqrt{16x^4-8x^2+1}}.$$

3.8.7. (*САММАТ, 2022, 9.9*) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=48,\\ xy-2z^2-4u^2=576. \end{cases}$$

3.9 Функции в уравнениях и неравенствах

Дополнительные задачи — в листке Функции в уравнениях и неравенствах. 1.

3.9.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.7*) Известно, что a, b, c — три попарно различных действительных числа. Найдите наибольшее возможное при этом условии значение x, являющегося корнем уравнения

$$a^2(x-b)(b-c)(c-x)+b^2(a-x)(x-c)(c-a)+c^2(a-b)(b-x)(x-a)=100(a-b)(b-c)(c-a).$$

3.10 Плоские множества

Дополнительные задачи — в листке Плоские множества.

3.10.1. (*«Росатом», 2017, 9.1*) Числа a и b таковы, что $a\in[-4;3]$ и парабола $y=x^2+ax+b$ пересекает отрезок с концами в точках $P(1;2)$ и $Q(-1;4)$. Нарисовать на координатной плоскости область D, содержащую все точки $M(a;b)$, и найти ее площадь.

3.10.2. (*САММАТ, 2023, 9.7*) Постройте кривую, все точки которой определяются уравнением $y^2-2|y|=1-x^2$. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

3.10.3. (*САММАТ, 2021, 9.9*) На некоторой планете при изучении геометрии на плоскости расстояние ρ между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в декартовой ортогональной системе координат определяют по формуле $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Построить в этой геометрии окружность с центром в точке $(-2, -1)$ и радиусом $R = 4$ и найти длину этой окружности.

3.10.4. (*«Ломоносов», 2023, 9.2*) Найдите площадь плоской фигуры, границы которой описываются уравнением

$$\Big||y| + \big||x| - 4\big| - 4\Big| = 1.$$

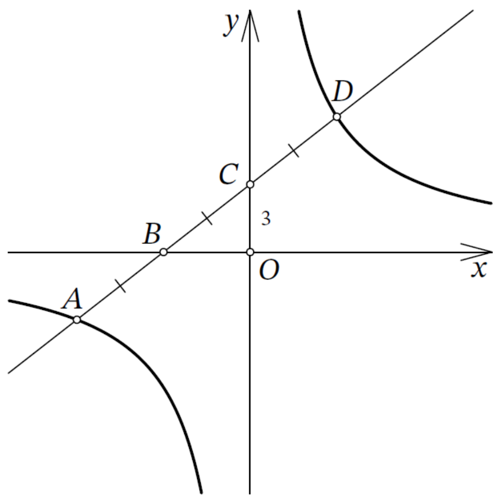
3.10.5. (*«Шаг в будущее», 2017, 9.3*) Найдите наименьшую длину отрезка AB, если точка A принадлежит множеству, задаваемому уравнением $y^2 - 3x^2 - 2xy - 9 - 12x = 0$, а точка B — множеству, задаваемому уравнением $x^2 - 8y + 23 + 6x + y^2 = 0$.

3.10.6. (*«Росатом», 2020, 9.3*) Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 2 : 1$. Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 8.

3.10.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 9.3*) Вычислите площадь множества точек на координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$\left(y + \sqrt{x}\right)\left(y - x^2\right)\sqrt{1 - x} \leqslant 0.$$

3.10.8. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.6*) График прямой $y = kx + l$ пересекает ось Ox в точке B, ось Oy — в точке C, график функции $y = 1/x$ — в точках A и D, как изображено на рисунке.



Оказалось, что $AB = BC = CD$. Найдите k, если известно, что $OC = 3$.

3.10.9. (*«Физтех», 2022, 9.6*) Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

3.10.10. (*«Физтех», 2022, 9.6*) Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$ удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y + 3x \geqslant |2y - 3x|, \\ y \leqslant -2x + 16, \\ x^2 - 12y + y^2 + 16 \geqslant 0. \end{cases}$$

3.10.11. (*«Ломоносов», 2022, 9.6*) Точка A на плоскости находится на одинаковом расстоянии от всех точек пересечения двух парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = -3x^2 + 2$ и $x = -4y^2 + 2$. Найдите это расстояние.

Глава 4

Текстовые задачи

4.1 Движение

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.1.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.1*) Когда часы показывали 18:00 на фитнес-браслете Вани, количество шагов, пройденных с утра, оказалось равным числу 19791, которое является палиндромом (читается одинаково как слева направо, так и справа налево). Еще через полчаса количество шагов, пройденных Иваном с утра, вновь оказалось палиндромом. Какое наибольшее число шагов на фитнес-браслете мог увидеть Ваня в 18:30, если его средняя скорость за последние полчаса была не более 1 м/с, а его шаг не менее 75 см?

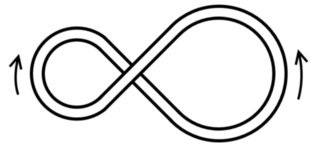
4.1.2. (*«Росатом», 2015, 9.1*) Саша ехал в автобусе по улице и увидел через окно своего друга Колю, идущего по другой стороне улицы в противоположном направлении. Через две минуты автобус остановился на остановке. Саша быстро вышел из автобуса, перебежал улицу и побежал догонять Колю. Через сколько минут он догонит Колю, если он бежит в три раза быстрее, чем идет Коля и в пять раз медленнее, чем едет автобус? Время выхода из автобуса и перехода улицы не учитывать.

4.1.3. (*«Росатом», 2018, 9.1*) Петя сбежал по эскалатору метро, двигающемуся вниз, от верха до низа, развернулся и побежал в обратном направлении. Добежав до верха, измерил затраченное время. В этот момент эскалатор был переключен на движение в обратном направлении. Петя решил повторить эксперимент: пробежать по эскалатору туда и обратно и измерить затраченное время. Какое из времен оказалось большим и во сколько раз, если скорость движения Пети относительно лестницы при подъеме в 1,5 раза больше скорости движения лестницы, а скорость на спуске — в 2 раза больше скорости движения лестницы?

4.1.4. (*«Росатом», 2020, 9.1*) Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 160, 60 и 20 км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 400 м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

4.1.5. (*«Ломоносов», 2021, 9.1*) Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью еще четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т. д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

4.1.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 9.1*) Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рис.). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. Сколько времени Том гнался за Джерри?



4.1.7. (*Всеросс., 2023, РЭ, 9.1*) Велодорожка состоит из двух участков: сначала идет асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени?

4.1.8. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 9.2*) Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они ехали с постоянными скоростями. С момента встречи первый велосипедист ехал до пункта B 40 минут, а второй до пункта A — полтора часа. Найдите время от начала движения до встречи и отношение скоростей велосипедистов.

4.1.9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.2*) Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

4.1.10. (*«Курчатов», 2020, 9.2*) Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Боливаре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

4.1.11. (*САММАТ, 2023, 9.3*) По двум взаимно перпендикулярным дорогам движутся в направлении перекрестка велосипедист и пешеход. В некоторый момент времени велосипедист находится на расстоянии 32 км, а пешеход — на расстоянии 14 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между ними будет равно 10 км и на каком расстоянии будут находиться велосипедист и пешеход от перекрестка, если скорость пешехода 4 км/час, а велосипедиста 12 км/час?

4.1.12. (*«Шаг в будущее», 2023, 9.3*) На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начали забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежал со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен пришел на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько раз первый спортсмен обогнал второго на дистанции после старта?

4.1.13. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.3*) Школьник Иванов проплывает на плоту путь между городами A и B за 15 часов. На моторной лодке вместе с папой он проплывает весь путь от A до B и обратно не менее чем за 8 часов. Точно такое же путешествие, но вместе с дедушкой (от A до B и обратно) занимает по времени не более 20 часов, при этом собственная скорость лодки при управлении дедушкой на 50% меньше, чем у папы. Сколько часов школьник вместе с дедушкой плывут на моторной лодке от города A до города B?

4.1.14. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.4*) Фома и Ерёма ехали по прямой дороге в Москву на повозке с постоянной скоростью.

- В 12:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «82».
- В 13:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «71».
- В 15:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы»»
- Ерёма ответил: «46».

Известно, что Ерёма каждый раз округлял расстояние до ближайшего целого, а если таких было два — то до любого на свой выбор.

В 16:00 Фома снова спросил: «Сколько вёрст до Москвы?» В этот раз Ерёма уже дал точный ответ, не округляя его. Что ответил Ерёма?

4.1.15. (*«Ломоносов», 2023, 9.5*) Пловец решил переплыть реку. Сначала он взял направление перпендикулярно течению — и течение снесло его на 12 метров. Оттуда он решил вернуться туда, откуда начал — он взял направление на точку, из которой началось плавание, и теперь течение снесло его на 20 метров от желаемой точки. Найдите ширину реки.

4.1.16. (*«Шаг в будущее», 2017, 9.5*) *Как устроить полустанок? (старинная задача)* В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение B. Где надо устроить полустанок C, чтобы суммарно проезд от A до B по железной дороге AC и по шоссе CB отнимал возможно меньше времени? Скорость движения по железной дороге 0,8, а по шоссе 0,2 км в минуту.

4.1.17. (*«Физтех», 2023, 9.6*) Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист — в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже мотоциклиста. Найдите расстояние между A и B.

4.2 Работа

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.2.1. (*«Надежда энергетики», 2021, 9.1*) На прокладке линии электропередачи работают три бригады с постоянной интенсивностью. Первая и третья бригады, работая вместе, за месяц прокладывают 15 км линии. Все три бригады вместе могут проложить за месяц линию в два раза длиннее, чем вторая и первая бригады вместе. Сколько километров линии в месяц может проложить третья бригада, если известно, что вторая бригада вместе с третьей прокладывают участок пути в четыре раза быстрее, чем его проложила бы одна вторая бригада?

4.2.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 9.1*) Работники должны были вскопать несколько одинаковых грядок. В первый день работники вскопали 10 грядок, причем каждый вскопал одинаковое количество (не обязательно целое число грядок). На следующий день некоторые работники заболели COVID-19 и на работу вышло только 7 человек. Пришедшие работали половину рабочего дня с такой же производительностью, как и в первый день, и доделали оставшуюся работу.

Сколько всего грядок было на подсобном участке?

4.2.3. (*САММАТ, 2021, 9.3*) Пятеро преподавателей проверяют олимпиадные работы. Первый, четвертый и пятый преподаватели, работая вместе, могут проверить все работы за 20 часов. Второй, третий и пятый — за 15 часов. Если эти работы проверяют все преподаватели, кроме пятого, то все работы будут проверены на 10 часов. Во сколько раз быстрее будут проверены все работы, если в проверке участвуют все пять преподавателей по сравнению с тем, когда проверяет все работы только пятый преподаватель?

4.2.4. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.3*) Ученики девятого, десятого и одиннадцатого классов надували шарики к празднику. Каждый девятиклассник работал 6 часов, десятиклассник — 12 часов, одиннадцатиклассник — 18 часов. При этом каждый девятиклассник надул 45 шариков, десятиклассник — 100 шариков, одиннадцатиклассник — 120 шариков. Все ученики вместе отработали 108 часов. Сколько шариков было приготовлено к празднику, если их общее количество оказалось максимально возможным?

4.2.5. (*«Надежда энергетики», 2019, 9.4*) В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» — заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» — ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек? (Не забудьте указать единицы измерения.)

4.2.6. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.6*) Первый рабочий красит стандартный номер в гостинице за 1 день, а выкладывает плиткой ванную комнату за 5 дней. Второй рабочий красит стандартный номер в гостинице за 2 дня, а выкладывает плиткой ванную комнату за 8 дней. За какое минимальное количество дней они отремонтируют 30 стандартных номеров и 20 ванных комнат, если они начинают и заканчивают работать вдвоем одновременно.

4.3 Стоимость

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.3.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.3*) Торговцы Андрей и Борис купили по 60 мешков картошки у одного и того же фермера. Все мешки стоили одинаково.

Андрей продал все свои мешки, увеличив их цену на 100%. Борис же сначала увеличил цену на 60%, а когда продал 15 мешков, увеличил цену ещё на 40% и продал остальные 45 мешков.

Оказалось, что Борис заработал на 1200 рублей больше Андрея. Сколько рублей стоил один мешок картошки у фермера?

4.3.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.3*) Катя хочет купить корм для кошек. В прошлый раз вся покупка обошлась ей в 48 рублей. В магазине выяснилось, что стоимость одной упаковки выросла на столько рублей, на сколько число 5,5 больше числа купленных упаковок товара. Известно, что за всю покупку Катя заплатила наибольшую из возможных сумму денег. Определите эту сумму. Сколько упаковок корма было куплено? Определите стоимость одной упаковки.

4.3.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.3*) ООО «Ромашка» выделил 100 тыс. рублей на обновление формы для вахтёров, причём они рассчитывали потратить не более 13,7 тыс. рублей за один комплект. Когда они обратились к производителю, то оказалось, что стоимость одного комплекта меньше предполагаемой на столько рублей, сколько комплектов одежды нужно приобрести, при этом, при покупке нужного количества комплектов формы предприятие получает наименьший остаток от общей суммы выделенных денег. Определите количество комплектов при таких условиях. Какова цена одного комплекта?

4.3.4. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.5*) У Буратино есть много монет по 5 и по 6 сольдо, каждого вида более 10 монет. Придя в магазин и купив книгу за N сольдо, он понял, что не сможет за неё рассчитаться без сдачи. Какое наибольшее значение может принимать натуральное N, если оно не больше 50?

4.4 Части, отношения, проценты

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.4.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.2*) Антон, Вася, Саша и Дима ехали на машине из города А в город Б, каждый из них по очереди был за рулём. Весь путь машина ехала с постоянной скоростью.

Антон вёл машину в два раза меньше, чем Вася, а Саша вёл машину столько же, сколько Антон и Дима вместе взятые. Дима был за рулём лишь десятую часть пути. Какую часть пути за рулём был Вася? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

4.4.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.1*) Состоятельный Крот сообщил Дюймовочке, что если разделить ее рост в сантиметрах на три и найденное число уменьшить на 10%, то получится ее рост в дюймах. Дюймовочка решила, что если ее рост в дюймах умножить на 3 и увеличить найденное число на 10%, то получится ее рост в сантиметрах. Крот указал на ошибку и назвал число, равное количеству процентов, на которые следует увеличить удвоенный рост Дюймовочки в дюймах чтобы получить верный рост в сантиметрах. Какое число назвал Крот? На сколько процентов от верного значения ошиблась Дюймовочка?

4.4.3. (*«Шаг в будущее», 2016, 9.1*) Во время зимних каникул компания друзей решила воспользоваться услугами железной дороги и посетить исторический город N. В результате проведенных маркетинговых исследований они выяснили, что расходы на поездку будут состоять из «транспортных», «проживания-питания» и «экскурсионных», соотношение между которыми $3 : 2 : 1$, соответственно. Однако, один из друзей предложил заменить поезд автобусом и проехать в город N через не менее исторический город K. Предложение было принято. В результате расходы на «транспорт» уменьшились на 20%, а «проживание-питание» и «экскурсии» подорожали на 20% каждая составная часть.

Каким стало соотношение между расходными частями поездки «транспортной», «проживание-питание» и «экскурсионной»?

4.4.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.1*) На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что никакими языками не владеют. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем $1/6$ из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила $5/12$. Сколько всего участников кружка?

4.4.5. (*«Надежда энергетики», 2023, 9.2*) На пункте питания четыре легкоатлета выпили весь запас кола-локового лимонада. Если бы только атлет Быстров пил в два раза меньше, то осталась бы десятая часть лимонада. Если бы, дополнительно, еще атлет Шустров тоже пил в два раза меньше, то осталась бы восьмая часть лимонада. Если бы, дополнительно к ним обоим, еще атлет Востров тоже пил в два раза меньше, то осталась бы треть лимонада. Какая часть лимонада осталась бы, если бы в два раза меньше пил один только атлет Перескочизаборов?

4.4.6. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.3*) В коробке 22 красных и 25 синих шарика. Их распределили по двум коробкам: в первой должно получиться 24 шарика, а во второй — 23. После распределения посчитали процент синих шариков в каждой коробке и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение синих шариков по коробкам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

4.4.7. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.3*) Два повара для приготовления вишнёвого варенья смешали вишню и сахар, первый положил на две части вишни одну часть сахара, второй — на три части вишни две части сахара. Сколько килограммов каждой смеси нужно взять, чтобы получить 1,9 килограммов смеси, в которой на двенадцать частей вишни приходится семь частей сахара?

4.4.8. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.3*) Мешок Деда Мороза вмещает ровно 160 подарков для мальчиков или ровно 120 подарков для девочек. Подарки состоят из конфет. Если мешок заполнить таким образом, что суммарное число конфет в подарках для мальчиков было равно общему числу конфет в подарках для девочек, то всего в мешке будет 140 подарков и в них 4320 конфет. На сколько больше конфет было в подарке для девочек, чем в подарке для мальчиков?

4.4.9. (*«Росатом», 2022, 9.4*) Заемщик и кредитор договорились, что беспроцентный кредит в 615 т. р. будет выплачиваться ежемесячно в последний день месяца. В первый месяц возвращается некоторая сумма (целое число т. р.), а в каждый последующий месяц возвращается сумма на 1 т. р. большая, чем в предыдущем месяце. На какое максимальное число месяцев мог быть выдан такой кредит и какую сумму при этом выплатил заемщик в первый месяц?

4.5 Смеси и концентрации

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.5.1. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.3*) Сотрудник химической лаборатории взял бутыль, содержащую чистый спирт, отлил из неё четверть жидкости, добавил такой же объём воды, затем опять отлил четверть жидкости и опять добавил четверть объема воды. Эту операцию он повторил n раз. При каком наименьшем значении n процентное содержание спирта в бутыли станет меньше 24%?

4.6 Часы, время, календарь

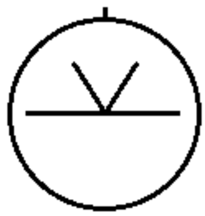
Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

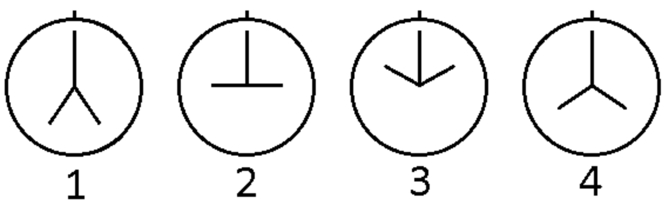
4.6.1. (*Олимпиада КФУ, 2023, 9.1*) Сегодня Вовочка начал смотреть аниме. Если он будет смотреть по 2 серии в день, то к 1 апреля 2023 (не включительно) у него останется непросмотренными 215 серий. Если же он начнет смотреть по 5 серий в день — то только 50. Какое сегодня число и сколько серий в сериале?

4.6.2. (*«Росатом», 2023, 9.1*) Петя считал для себя счастливыми моменты жизни, когда его электронные часы показывали количество часов в три раза большее, чем минут или наоборот. Петя заснул и проснулся в счастливые момент своей жизни, при этом ни одного такого момента не проспал. Какое максимальное целое число минут мог длиться сон Пети?

4.6.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.4*) После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 2 градуса. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

4.6.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 9.5*) У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).





Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*. Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).

Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Какое минимальное количество неопределённых фотографий может быть среди них?

4.7 Неравенства

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.7.1. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.1*) Ученики 9 «А», 9 «Б», 9 «В» собрались на линейку. Марья Ивановна решила посчитать количество присутствующих из каждого класса. У неё получилось, что на линейке было 27 учеников из 9 «А», 29 учеников из 9 «Б» и 30 учеников из 9 «В». А Илья Григорьевич решил посчитать сразу общее количество присутствующих из всех трёх классов — у него получилось 96 учеников.

Оказалось, что при подсчёте численности каждого класса Марья Ивановна ошиблась не более чем на 2. А при подсчёте общей численности Илья Григорьевич ошибся не более чем на 4.

Сколько учеников из 9 «А» присутствовало на линейке?

4.8 Различные текстовые задачи

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.8.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.3*) В школе учатся 1200 школьников, у каждого из которых каждый день по пять уроков. Любой учитель этой школы проводит в день 4 урока. Сколько учителей работает в школе, если в каждом классе ровно 30 учеников?

4.8.2. (*«Надежда энергетики», 2020, 9.4*) За два дня 100 банкиров собрали средства для борьбы с новым вирусом. Каждый из них внес однократно целое количество тысяч рублей, не превосходящее 200. При этом каждый взнос в первый день не превосходил 100 тысяч, а во второй был больше этой величины; и никакая пара из всех 100 взносов не отличалась ровно на 100 тысяч. Какую сумму собрали?

4.8.3. (*«Надежда энергетики», 2016, 9.5*) Имеется 4 числа, не все из которых одинаковы. Если взять любые два из них, то отношение суммы этих двух чисел к сумме двух других чисел будет равно одному и тому же значению k. Найдите значение k. Укажите хотя бы одну четверку чисел, удовлетворяющих условию. Опишите все возможные четверки таких чисел и выясните, сколько их.

Глава 5

Параметры

5.1 Линейные уравнения и неравенства с параметрами

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Линейные уравнения и неравенства.

5.1.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 9.1*) При каких значениях параметра a уравнения $ax + a = 7$ и $3x - a = 17$ имеют общий целый корень?

5.1.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 9.1*) При каких значениях числа a три графика $y = ax + a$, $y = x$ и $y = 2 - 2ax$ пересекаются в одной точке?

5.1.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.4*) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 3, \\ (a+2)x + 2ay = 6a - 2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

5.2 Параметры и квадратный трёхчлен

Дополнительные задачи — в листках

- Параметры и квадратный трёхчлен. 1
- Параметры и квадратный трёхчлен. 2

5.2.1. (*«Росатом», 2016, 9.2*) При каких a уравнение $P(x^2) = P(x)$, где $P(x) = ax^2 - 3x + 5$ имеет ровно три различных решения?

5.2.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.3*) Найдите все пары (a, b) действительных чисел a и b таких, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

5.2.3. (*«Надежда энергетики», 2021, 9.3*) На координатной плоскости каждая из N прямых l_j параллельна прямой $y = x+2021$ и пересекает кривую $y = 1/x$ ровно в двух точках $(x_1(j), y_1(j))$ и $(x_2(j), y_2(j))$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Рассмотрим два произведения

$$P_1 = y_1(1)y_1(2)\cdots y_1(N) \quad \text{и} \quad P_2 = y_2(1)y_2(2)\cdots y_2(N).$$

Выясните, какие значения может принимать величина P_1P_2 и как это значение зависит от N.

5.2.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.4*) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\bigl(x^2 + (2a-1)x - 4a - 2\bigr) \cdot \bigl(x^2 + x + a\bigr) = 0$$

имеет три различных корня.

5.2.5. (*«Росатом», 2016, 9.4*) Найти наименьшее возможное значение выражения $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $4x^2 + 4(a+2)x + 6a + 7 = 0$.

5.2.6. (*САММАТ, 2021, 9.9*) Из всех решений уравнения $y^2x - y^2 + 4xy + 6x - 2y = 3$ найдите те решения, для которых x принимает наименьшее значение.

5.2.7. (*«Физтех», 2023, 9.5*) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение

$$5x^2 + (2a+9)x + 7a - 10b = 0$$

имеет два корня x_1 и x_2 таких, что $5 \leqslant x_1 \leqslant 10$ и $14 \leqslant x_2 \leqslant 15$.

5.2.8. (*«Физтех», 2021, 9.3*) На плоскости Oxy даны точка A, координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B, заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y = 1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

5.2.9. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2020, 9.6*) Найдите наименьшее возможное значение $x - y$ при условии $x^2 - 2xy - x + y^2 + y \leqslant 0$.

5.2.10. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2020, 9.7*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^4 + ax^2 + a^2 - 4 = 0$ имеет ровно два действительных корня.

5.3 Параметры и уравнения высших порядков

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Уравнения высших порядков.

5.3.1. (*САММАТ, 2021, 9.1*) При каких значениях параметра a корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$$

составляют геометрическую прогрессию?

5.3.2. (*САММАТ, 2023, 9.10*) Найти наибольшее значение параметра a, при котором многочлены

$$P(x) = 2x^3 + x^2 + x + a \quad \text{и} \quad Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2a$$

имеют хотя бы один общий корень.

5.4 Параметры и графики

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Графики.

5.4.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.3*) Определить количество решений системы

$$\begin{cases} (3-x)\cdot|x+1| = y, \\ y - 6 = a\cdot(x-3) \end{cases}$$

в зависимости от параметра a.

5.4.2. (*«Шаг в будущее», 2017, 9.4*) При каких a неравенство $x^2 + |x+a| < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

5.4.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.4*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 7, \\ y = |x-a| - 2 \end{cases}$$

имеет четыре различных решения. Найдите эти решения при каждом значении a.

5.4.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.4*) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (a-3)^2 \leqslant 9, \\ 6 - a \geqslant (x+2)^2, \\ a + x \leqslant 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого значения a.

5.4.5. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.4*) Определите количество решений уравнения

$$a\,(x + |x| - 2) = x^2 + 4x - 5$$

в зависимости от значений параметра a.

5.4.6. (*«Шаг в будущее», 2016, 9.5*) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (y-3)^2 - (x-1)^2 = 0, \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 = a \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений?

5.4.7. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.6*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет только одно решение

$$\left|x - a^5 + a\right| + |x + a + 32| = a^3 + a^2 - a + 2.$$

5.5 Параметр как переменная

Дополнительные задачи — в листке Параметр как переменная.

5.5.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.6*) На плоскости xOy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых, заданных уравнением

$$ax^2 + (1 - 6a)x + 2 - a - 2y + ay^2 = 0.$$

5.6 Различные уравнения и системы с параметрами

5.6.1. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.4*) При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 1)\left(|x - 2{,}3| - 1\right)^2 - 2(a - 3)\left(|x - 2{,}3| - 1\right) + a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных решения?

5.6.2. (*«Шаг в будущее», 2023, 9.4*) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a + 3)x^2 + (3a + 2)x - 2a \geqslant 0, \\ x^3 - (a + 3)x^2 + 3ax \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5.6.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.4*) Числа x и y таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a + 2, \\ xy = a^2 - a + 2. \end{cases}$$

При каком значении a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

5.6.4. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.4*) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(a + x^2 - x + 2\right)^2 = 4a\left(ax^2 + x^2 - x + 2\right)$$

имеет единственное решение.

5.7 Минимаксные задачи с параметрами

Дополнительные задачи — в листке Минимаксные задачи с параметрами.

5.7.1. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.4*) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left|\frac{x^2-2ax+a^2+1}{x-a}\right|+x^2-6x+7=0$$

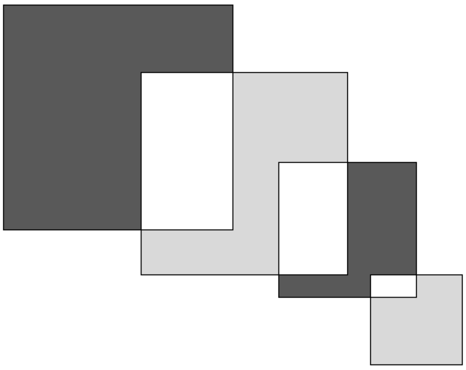
имеет хотя бы одно решение?

Глава 6

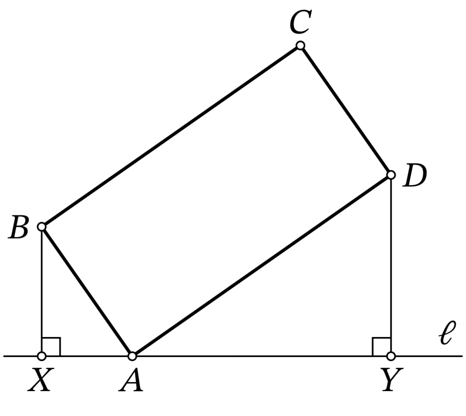
Геометрия

6.1 Прямоугольники и квадраты

6.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.4*) На рисунке слева направо изображены пересекающиеся квадраты со сторонами 12, 9, 7, 3 соответственно. На сколько сумма чёрных площадей больше, чем сумма серых площадей?



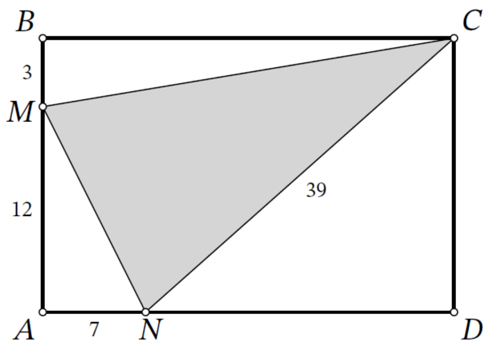
6.1.2. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.4*) Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая ℓ, как изображено на рисунке. Из точек B и D опущены перпендикуляры BX и DY на прямую ℓ. Найдите длину отрезка XY, если известно, что $BX = 4$, $DY = 10$, $BC = 2AB$.



6.1.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 9.1*) Квадрат со стороной 12 см разрезали на три прямоугольника одинакового периметра. Чему же равен этот периметр?

6.1.4. (*Всесиб., 2017, 9.1*) На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ внутрь него построены равносторонние треугольники ABK и ADM соответственно. Докажите, что треугольник CKM тоже равносторонний.

6.1.5. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.2*) На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно. Известно, что $AN = 7$, $NC = 39$, $AM = 12$, $MB = 3$.

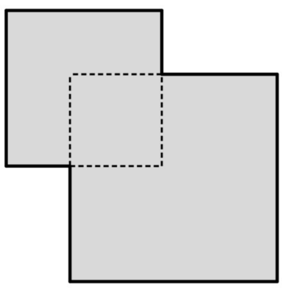


1. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.

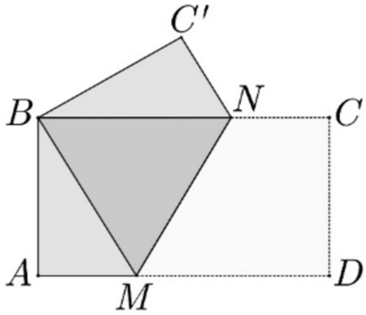
2. Найдите площадь треугольника MNC.

6.1.6. (*«Надежда энергетики», 2018, 9.2*) В Царстве Колдовской Энергии на плоской равнине стоит заколдованная трансформаторная будка: наблюдателю, смотрящему параллельно земле, она видна только под углом 90°. В поперечном сечении будка квадратная со стороной L локтей. Опишите геометрическое место точек на равнине, из которых будка видна, и определите минимальное и максимальное расстояние, с которого видна заколдованная будка. Углом, под которым фигура F видна из точки P, называется наименьший угол с вершиной P, содержащей фигуру F. В данном случае этот угол расположен в плоскости поперечного сечения будки.

6.1.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.2*) Два квадрата, стороны которых относятся как 3 : 4, наложены друг на друга так, что их общая часть также образует квадрат. Длины сторон всех трех квадратов являются натуральными числами, а площадь закрашенной фигуры равна 525. Найдите стороны всех квадратов.



6.1.8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 9.2*) Прямоугольник $ABCD$ сложили вдоль линии MN так, что точки B и D совпали. Оказалось, что $AD = AC'$. Найдите соотношение сторон прямоугольника.



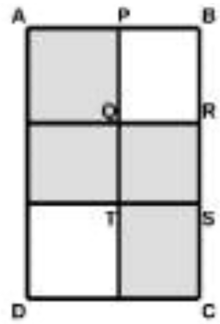
6.1.9. (*«Бельчонок», 2018, 9.2*) В квадрате $ABCD$ на стороне AB выбрана точка M, на стороне BC выбрана точка N так, что угол $MDN = 45°$, а длина MN равна 2. Отрезки DM и DN пересекают диагональ AC в точках E и F. Найдите длину EF.

6.1.10. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.2*) Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O. Найти AO, если сторона квадрата равна 1.

6.1.11. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.2*) Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O. Докажите, что вокруг четырехугольника $ABOK$ можно описать окружность. Найти радиус этой окружности, если сторона квадрата равна 1.

6.1.12. (*«Бельчонок», 2022, 9.2*) Внутри прямоугольника выбрана точка M и через неё проведены прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Оказалось, что площади серых прямоугольников равны (см. рис.). Найдите геометрическое место точек M.

6.1.13. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.2*) На плоскости по клеточкам нарисовали три прямоугольника (не являющихся квадратами) и один квадрат $QRSC$ так, что в итоге получилась фигура, схематически изображённая на рисунке.



Известно, что площадь прямоугольника $ABCD$ равна 35 клеткам. Найдите, чему равна площадь закрашенной фигуры, если известно, что $AP < QR$.

6.1.14. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.3*) Прямоугольник разделили на непересекающиеся квадраты со стороной 1 см. Будем говорить, что квадрат расположен вдоль стороны прямоугольника, если хотя бы одна из сторон квадрата лежит на стороне прямоугольника. Половину квадратов, расположенных вдоль сторон прямоугольника, покрасили в зеленый цвет, а все остальные квадраты оставили незакрашенными. В итоге незакрашенных квадратов оказалось в 4 раза больше, чем зеленых. Найдите все возможные прямоугольники, указав длины их сторон.

6.1.15. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 9.3*) Докажите, что прямоугольник 1×10 можно разрезать на 5 частей и составить из них квадрат.

6.1.16. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 9.4*) На сторонах CD и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно. Оказалось, что $CM + AN = BN$. Докажите, что $\angle CBM = \angle MBN$.

6.1.17. (*«Надежда энергетики», 2021, 9.4*) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены две точки, соответственно, M и K так, что периметр треугольника MKC равен удвоенной стороне квадрата. Найдите угол MAK.

6.1.18. (*«Бельчонок», 2022, 9.4*) В прямоугольнике $ABCD$ сторона $BC = 3$. На середине стороны AB отмечена точка P. Из точки C опущен перпендикуляр CQ на DP. Найдите длину BQ.

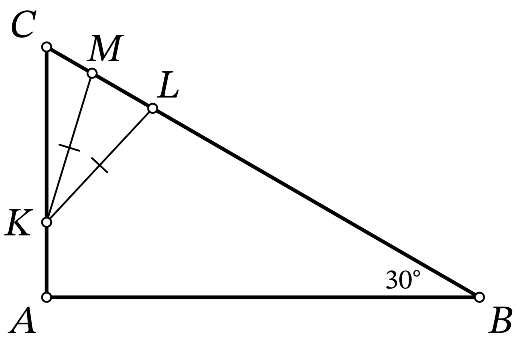
6.1.19. (*«Бельчонок», 2019, 9.4*) В квадрате $ABCD$ через точку E, лежащую на стороне AB, проведена прямая, параллельная стороне AD. Точка пересечения этой прямой и стороны CD обозначена F. Из точки A на BF опущен перпендикуляр AM. Найдите величину угла EMD.

6.1.20. (*«Росатом», 2016, 9.5*) Точка M расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$ так, что $CM : MD = 1 : 2$. На отрезке AM выбрана точка N так, что $AN : NM = 3 : 1$. Прямая DN пересекает отрезок MB в точке P. Найти отношение $MP : PB$.

6.2 Прямоугольный треугольник

Дополнительные задачи — в листке Прямоугольный треугольник.

6.2.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.6*) В треугольнике ABC известны углы $\angle B = 30^\circ$ и $\angle A = 90^\circ$. На стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC — точки L и M так, что $KL = KM$ (точка L лежит на отрезке BM).



Найдите длину отрезка LM, если известно, что $AK = 4$, $BL = 31$, $MC = 3$.

6.2.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 9.1*) Может ли длина одной из медиан прямоугольного треугольника составлять

а) 51% от длины гипотенузы?

б) 49% от длины гипотенузы?

6.2.3. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.2*) Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.

6.2.4. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.3*) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки E и F такие, что $AF = AC$ и $BE = BC$. Найдите угол ECF.

6.2.5. (*Всесиб., 2021, 9.3*) Пусть P — основание высоты, опущенной из вершины A прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузу BC, а M — середина отрезка CP. Обозначим за E точку на продолжении стороны AB за точку B такую, что $AB = BE$. Доказать, что прямые EP и AM перпендикулярны.

6.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 9.4*) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. На катете AC отмечена точка D такая, что $AD : DC = 1 : 3$, после чего построены окружности Γ_1 и Γ_2 с центрами A и C соответственно, проходящие через точку D. Γ_2 пересекает гипотенузу в точке E. Окружность Γ_3 с центром B и радиусом BE пересекает Γ_1 внутри треугольника в такой точке F, что угол AFB прямой. Найдите BC, если $AB = 5$.

6.2.7. (*Всесиб., 2016, 9.4*) В прямоугольном треугольнике ABC отмечены: точка K — середина гипотенузы AB и на катете BC точка M такая, что $BM : MC = 2$. Пусть отрезки AM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что прямая KM касается описанной окружности треугольника AKP.

6.2.8. (*«Физтех», 2022, 9.5*) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30°$.

6.2.9. (*«Росатом», 2019, 9.5*) Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC с катетами 3 и 4 является стороной расположенного во вне прямоугольника $ABDE$, вторая сторона которого равна 2. Биссектриса прямого угла треугольника ABC пересекает сторону DE в точке M. В каком отношении точка M делит отрезок DE?

6.2.10. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.6*) Господин Сыр Жуй, большой поклонник Фэн-шуй, владеет парком, представляющим собой прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha = \frac{11}{24}\pi$ и гипотенузой длины 640 м и желает устроить в нем лабиринт аллей. Для этого прокладываются аллеи, идущие вдоль медианы и высоты, опущенных из прямого угла. Эти аллеи вместе с отсекаемой частью гипотенузы образуют новый прямоугольный треугольник. В нем из прямого угла снова прокладываются аллея-высота и аллея-медиана и т. д.

1. Найдите длину аллеи-гипотенузы 5-го треугольника.

2. Найдите площадь 5-го треугольника.

6.2.11. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.8*) В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 2$ проведены медиана CM и биссектриса CL.

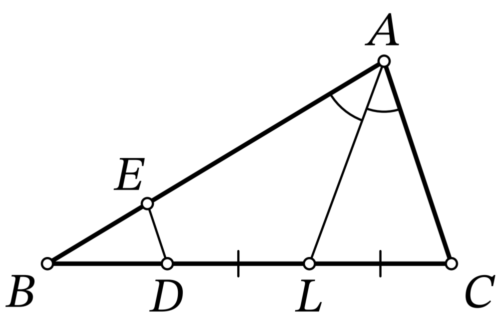
1. Найдите отношение площадей треугольников CML и ABC.

2. Найдите тангенс угла MCL.

6.3 Биссектрисы, медианы, высоты

Дополнительные задачи — в листке Медианы, высоты, биссектрисы.

6.3.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.7*) В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точки E и D отмечены на отрезках AB и BL соответственно так, что $DL = LC$, $ED \parallel AC$. Найдите длину отрезка ED, если известно, что $AE = 15$, $AC = 12$.



6.3.2. (*«Физтех», 2021, 9.1*) Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 5$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

6.3.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 9.2*) В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше биссектрисы AN. Известно, что угол CBM в три раза больше угла CAN. Найдите углы треугольника ABC.

6.3.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 9.2*) В треугольнике ABC угол A наибольший. Точки M и N симметричны вершине A относительно биссектрис углов B и C соответственно. Найдите $\angle A$, если $\angle MAN = 50°$.

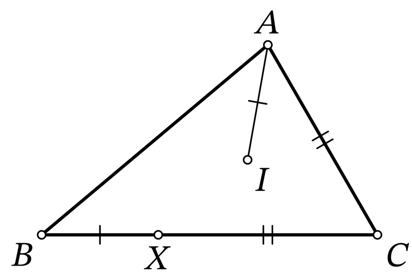
6.3.5. (*«Бельчонок», 2018, 9.2*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BK и CE, пересекающиеся в точке F. Угол ABF равен $30°$, $FE = 3$. Найдите FD.

6.3.6. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.2*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CL. Известно, что $LK = 12$ и $\angle ABC = 60°$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

6.3.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 9.2*) Какова максимально возможная площадь треугольника, две медианы которого равны m?

6.3.8. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.3*) Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. На стороне BC отметили точку X. Оказалось, что $AI = BX$, $AC = CX$, $\angle ABC = 42°$.

1. Сколько градусов составляет угол BIX?
2. Сколько градусов составляет угол BCA?



6.3.9. (*Олимпиада КФУ, 2023, 9.4*) Может ли ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника а) делить одну из его высот пополам? б) делить две высоты пополам?

6.3.10. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 9.4*) Петя говорит Васе: «Я построил неравнобедренный треугольник ABC и провел биссектрисы AM и CN. Оказалось, что $OM = ON$, где O — точка пересечения биссектрис. Сможешь ли ты определить, чему равен угол B?» Вася отвечает: «Да такого не может быть, чтобы в неравнобедренном треугольнике отрезки OM и ON оказались равными». Кто из мальчиков прав?

6.3.11. (*Всесиб., 2019, 9.4*) На продолжении медианы AM равнобедренного треугольника ABC с основанием AC за точку M взята точка P такая, что угол CBP равен углу BAP. Найти величину угла ACP.

6.3.12. (*«Надежда энергетики», 2022, 9.4*) В треугольнике ABC сторона AB вдвое короче стороны BC. Биссектриса BD пересекается со средней линией KM (точка K лежит на BC, а M на AB) в точке F. Докажите, что четырехугольник $AFKD$ — ромб.

6.3.13. (*Олимпиада КФУ, 2022, 9.4*) В треугольнике ABC стороны AB и AC равны, и биссектриса угла B пересекает AC в точке E такой, что $BC = BE + EA$. Найдите угол A.

6.3.14. (*Олимпиада КФУ, 2019, 9.4*) Точка K на медиане BM треугольника ABC такова, что углы AKM и MBC равны. Найдите отношение отрезков AK и BC.

6.3.15. (*«Бельчонок», 2019, 9.4*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CK и AM. Через вершину A проведена прямая, параллельная высоте KC, а через вершину C проведена прямая, перпендикулярная KC, точка пересечения этих прямых обозначена D. Найдите величину угла KMD.

6.3.16. (*«Бельчонок», 2019, 9.4*) В остроугольном треугольнике ABC сторона $AC = 10$. Из вершин A и C проведены высоты треугольника CL и AN. Через вершину A проведена прямая, параллельная высоте LC, а через вершину C проведена прямая, параллельная стороне AB, точка пересечения этих прямых обозначена E. Известно, что $LN = 6$. Найдите длину отрезка NE.

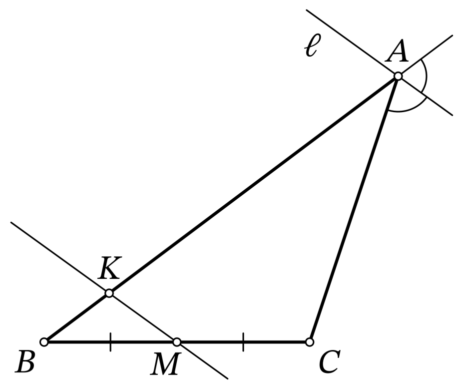
6.3.17. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.4*) В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике ABM — медиана BN, в треугольнике BNC — медиана NK. Оказалось, что $NK \perp BM$. Найдите $AB : AC$.

6.3.18. (*Всесиб., 2022, 9.4*) В треугольнике ABC с большей стороной BC биссектрисы пересекаются в точке I. Прямые AI, BI, CI пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. На отрезках BD и CD выбраны точки G и H соответственно такие, что угол GID равен углу ABC, а угол HID — углу ACB. Докажите, что углы BHE и CGF равны.

6.3.19. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.5*) В остроугольном треугольнике ABC на медиане AM выбирается точка K так, что $AK = CM$. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Величина угла BEC в два раза больше величины угла CAM. Найдите величину угла AMB в градусах.

6.3.20. (*«Росатом», 2021, 9.5*) AM и BN — биссектрисы треугольника ABC. На прямой MN расположена точка P, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 4 и 1 соответственно. Найти расстояние от точки P до прямой AC.

6.3.21. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.6*) Дан треугольник ABC, точка M — середина стороны BC. Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла A треугольника ABC. Прямая, проходящая через M и параллельная ℓ, пересекает сторону AB в точке K. Найдите длину отрезка AK, если $AB = 23$ и $AC = 8$.



6.3.22. (*«Ломоносов», 2021, 9.6*) В остроугольном треугольнике ABC со стороной $AC = 1$ провели высоту BH, в треугольнике BHC — биссектрису CL, в треугольнике BLC — медиану BM. Прямая AL пересекает сторону BC в точке K, причём $\angle BHK \angle MHC = 15°$. Найдите площадь четырёхугольника $KLHM$.

6.3.23. (*«Ломоносов», 2020, 9.7*) На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CNM.

6.4 Параллелограмм

Дополнительные задачи — в листке Параллелограмм.

6.4.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.1*) Внутри ромба $ABCD$ построен равносторонний треугольник AMB. Найдите угол CMD.

6.4.2. (*Всесиб., 2015, 9.2*) В параллелограмме $ABCD$ на стороне A взята произвольная точка M и через M проведены прямые параллельно диагоналям, пересекающие стороны AB и CD соответственно в точках P и Q. Доказать, что площади треугольников MPB и MQC равны.

6.4.3. (*«Шаг в будущее», 2023, 9.2*) В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE. Найдите площадь четырёхугольника $OBCE$, зная, что $AD = 12$, $DE = 4$, $\angle ABO = 60°$.

6.4.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 9.2*) В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка P такова, что $PA = PF$, $PE = PC$. Докажите, что точка P лежит на прямой BD.

6.4.5. (*«Бельчонок», 2021, 9.3*) На стороне KN параллелограмма $KLMN$ выбрана точка P, а на продолжении этой стороны за точку N выбрана точка Q, причем $KP = PQ$. Прямые LP и MN пересекаются в точке T, а прямые LQ и MN — в точке R. Докажите, что $MR = RT$.

6.4.6. (*Олимпиада КФУ, 2020, 9.3*) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $PC = BC$. Точка E — середина отрезка AP, а точка F — середина отрезка CD. Докажите, что прямые BP и EF перпендикулярны.

6.4.7. (*«Росатом», 2023, 9.5*) Точка M делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношении $BM : MC = 2$. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке K. Найти площадь четырехугольника $CMKD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

6.4.8. (*«Росатом», 2015, 9.5*) Длины сторон параллелограмма равны 3 и 2. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

6.5 Трапеция

Дополнительные задачи — в листке Трапеция.

6.5.1. (*Всеросс., 2020, МЭ, 9.2*) Дана равнобокая трапеция с основаниями 4 и 12 и высотой 4. Можно ли разрезать её на три части и сложить из этих частей квадрат?

6.5.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.2*) В трапеции $ABCD$ точки K, N, M принадлежат отрезку BC, $BK = KN = MC = 1$, а точки L, O, P, Q принадлежат отрезку AD, $AL = LO = PO = QP = QD = 3$. Прямые BC и AD параллельны. Точка K соединена с точками A, L, O, P, Q, D. Точка L соединена с точками B, K, N, M, C. Докажите, что точки пересечения прямых BL и AK, KO и LN, KQ и LC лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции.

6.5.3. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.2*) Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 12 см, а длины биссектрис — 15 см и 13 см.

6.5.4. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.3*) В равнобедренной трапеции $ABCD$ точка H на основании AD такова, что BH — высота. Оказалось, что $\angle bHC = \angle A$. Известно, что $AH = 5$, $CH = 6$. Найдите DH.

6.5.5. (*Олимпиада КФУ, 2021, 9.3*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD такая, что $AB + CD = AD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая, параллельная основаниям трапеции и проходящая через точку O, пересекает боковую сторону AD в точке K. Докажите, что $\angle BKC = 90°$.

6.5.6. (*«Бельчонок», 2021, 9.3*) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B пересекает отрезок AD в точке M. Известно, что $AB = 4$, $BC = 9$ и $CD = 3$. В каком отношении точка M делит отрезок AD?

6.5.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.3*) В трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше основания BC. Через точку A провели прямую, делящую площадь трапеции пополам. В каком отношении она делит сторону CD?

6.5.8. (*«Ломоносов», 2020, 9.3*) В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна 1 и является одновременно её высотой. Из точек A и C к сторонам CD и AB соответственно проведены перпендикулярны AE и CF. Найдите AD, если $AD = CF$ и $BC = CE$.

6.5.9. (*«Бельчонок», 2022, 9.4*) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $AD : BC = 3 : 2$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. На стороне AB выбрана точка K так, что $KA : AB = 3 : 5$. Из точки K проведён перпендикуляр к CD, пересекающий отрезок CD в точке P. Докажите, что $\angle KPA = \angle KPB$.

6.5.10. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.5*) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол A равен $60°$. На стороне CD выбирается точка K так, что $\angle BKC = 30°$, при этом $AD = CD$. Прямая BN пересекает сторону CD в точке N, а отрезки AK и BN пересекаются в точке P. Найдите величину угла DPB в градусах, если $KN : ND = 2\sin\angle BDC$.

6.5.11. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.5*) В трапеции $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла $\angle B$, а её длина равна длине основания BC. Биссектриса угла $\angle CBD$ пересекает прямую AD в точке K. Точка L на продолжении отрезка BD за точку D такова, что $AB = DL$.

Докажите, что $AK = BL$.

6.5.12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.5*) В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 4$ и $AD = 12$, угол ADC равен 67,5°. Найдите площадь трапеции, если известно, что биссектриса угла CAD делит отрезок CD пополам.

6.5.13. (*«Росатом», 2020, 9.5*) Известно, что в трапецию с углом 30° при основании можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение площади трапеции к площади, вписанного в нее круга. Найти отношение площади трапеции к площади, описанного около нее круга.

6.5.14. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.7*) $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$. Точка K лежит на продолжении луча BC за точку C, $KL \parallel CD$, $\angle CDL = \angle BAD$. Кроме того, $CD = \sqrt{CK \cdot AD}$. O и M — точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $CKLD$ соответственно. Докажите, что $OM \parallel BC$.

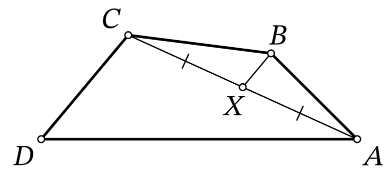
6.5.15. (*Всеросс., 2022, РЭ, 9.8*) В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD. Диагонали AC иBD пересекаются в точке E. Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

6.5.16. (*Всеросс., 2021, РЭ, 9.8*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на биссектрисе угла BCD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на биссектрисе угла ADC.

6.6 Общие четырёхугольники

6.6.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 9.3*) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, отличный от дельтоида (дельтоид — это четырехугольник, симметричный относительно одной из своих диагоналей). Известно, что биссектрисы углов A и C пересекаются в точке на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

6.6.2. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.3*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, X — середина диагонали AC. Оказалось, что $CD \parallel BX$. Найдите AD, если известно, что $BX = 3$, $BC = 7$, $CD = 6$.



6.6.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 9.3*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины сторон AB и CD. Оказалось, что прямая PQ делит диагональ AC пополам. Докажите, что PQ делит и диагональ BD пополам.

6.6.4. (*САММАТ, 2021, 9.6*) В четырехугольнике $ABCD$ серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются на стороне AD и $\angle BAD = \angle ADC$. Может ли одна диагональ четырехугольника быть больше другой? Ответ объясните.

6.6.5. (*«Курчатов», 2023, 9.4*) Точка M — середина стороны CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BAM = \angle MAD$, $\angle ABC = \angle BCM + \angle MDA$. Найдите угол CBD.

6.6.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 9.4*) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = AD = 1$, $\angle A = 80°$, $\angle C = 140°$. Найдите длину диагонали AC.

6.6.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 9.4*) На плоскости даны такие четыре точки A, B, C, D, что $AB = BC = CD$, $BD = DA = AC$. Найдите углы четырёхугольника с вершинами в этих точках.

6.6.8. (*Всесиб., 2020, 9.4*) На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно такие, что отрезки BQ и DP делят площадь четырёхугольника пополам. Доказать, что отрезок PQ проходит через середину диагонали AC.

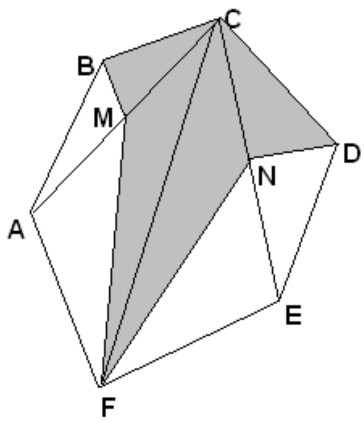
6.6.9. (*«Физтех», 2021, 9.6*) Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD — правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT — правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 3$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

6.7 Многоугольники

6.7.1. (*«Бельчонок», 2022, 9.1*) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ точка M — середина отрезка AC, точка N — середина отрезка CE. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$.



6.7.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 9.2*) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60°$, а остальные углы равны между собой. Известно, что $AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$. Найдите расстояние от точки A до прямой CD.

6.7.3. (*«Шаг в будущее», 2016, 9.4*) $A_1A_2\ldots A_{2015}$ — правильный 2015-угольник. O — его центр. Найдите сумму векторов

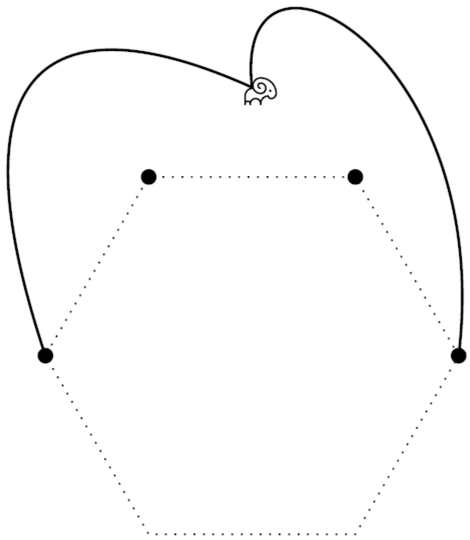
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2015}}.$$

Ответ обоснуйте.

6.7.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 9.4*) Все углы выпуклого восьмиугольника равны, а все стороны имеют рациональную длину. Докажите, что у него есть центр симметрии.

6.7.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 9.5*) В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6.7.6. (*«Ломоносов», 2023, 9.6*) Баран на пастбище привязан сразу к двум деревьям, верёвками по 5 метров длиной. На пастбище есть ещё два дерева. Вместе эти деревья образуют 4 соседние вершины правильного шестиугольника со стороной в 2 метра (см. рисунок)



Насколько близко он сможет подойти к дереву, к которому привязан?

6.8 Площадь

6.8.1. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.2*) Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, имеющего равные диагонали, если длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны 13 и 7.

6.8.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.2*) Площадь ромба равна 8 кв. см. Каждую его сторону продлили на четверть своей длины в обе стороны. Концы всех этих отрезков соединили. Найдите площадь полученной фигуры.

6.8.3. (*САММАТ, 2022, 9.3*) В треугольнике ABC на сторонах BC, AC, AB отметили точки D, E, F соответственно так, что $AF : FB = BD : DC = CE : EA = 2 : 3$. Отрезки AD, BE, CF попарно пересекаются в точках P, Q, R. Площадь треугольника ABC равна 19. Найдите площадь треугольника PQR.

6.8.4. (*САММАТ, 2021, 9.8*) В треугольнике ABC известны длины всех его сторон: $AB = 13$, $BC = 5$, $AC = 12$. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$ и проведена биссектриса угла $\angle B$ треугольника ABC, пересекающая сторону AC в точке E. Найти площадь четырехугольника $CDBE$.

6.8.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 9.3*) На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Может ли жёлтая площадь равняться 100, зелёная 10, а синяя — 1?

6.8.6. (*«Надежда энергетики», 2023, 9.4*) Через точку, лежащую внутри треугольника, параллельно его сторонам проведены три прямые, которые разбивают треугольник на шесть частей: три треугольника и три четырехугольника. Площади трех внутренних треугольников относятся друг к другу как $1:4:9$. Определите, в каком диапазоне может лежать отношение площади большего из них к площади исходного треугольника.

6.8.7. (*«Надежда энергетики», 2017, 9.4*) Дан произвольный треугольник ABC. Найдите такую точку O внутри треугольника, чтобы площади треугольников AOB, BOC, AOC относились как $1:2:3$.

6.8.8. (*«Росатом», 2017, 9.5*) Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D и делящая площадь треугольника в отношении $1:7$. Другая прямая, параллельная AD, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно и делит площадь треугольника ABC пополам. В каком отношении точки M и N делят стороны AB и BC?

6.8.9. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.6*) Внутри выпуклого четырехугольника пять прямых делят его на шесть четырехугольников, а две его противоположные стороны — на шесть одинаковых частей каждую. Найдите площадь четвертого из полученных четырехугольников, если сумма площадей первого, пятого и шестого равна 60.

6.8.10. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.8*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB и COD равны. Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что $AB = 13$, $BC = 10$, $CD = 15$, $DA = 24$.

6.9 Касательные, секущие, хорды

6.9.1. (*«Бельчонок», 2020, 9.2*) Окружность радиуса 2 с центром в точке O проходит через точку K. В окружности радиуса 5 с центром в точке O проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K. На продолжении отрезка AB за точку A отложен отрезок $AF = BK$, а на продолжении отрезка CD за точку D отложен отрезок $DE = CK$. Найдите длину отрезка FE.

6.9.2. (*«Бельчонок», 2020, 9.2*) В окружности проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K. Известно, что $AK = 7$, $KB = 1$, $CK = 5$. Найдите радиус окружности.

6.9.3. (*«Надежда энергетики», 2020, 9.3*) Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ, которая повторно пересекает окружности в точках A и B (причем точка Q лежит между A и B), а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

6.9.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 9.3*) На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ выбраны соответственно такие точки M и P, что $AM = CP$. Окружность на диаметре DP пересекает отрезок CM в точке K. Докажите, что MK и BK перпендикулярны.

6.9.5. (*Всеросс., 2020, МЭ, 9.4*) На полуокружности с диаметром AD отмечены точки B и C. Точка M — середина отрезка BC. Точка N такова, что M — середина отрезка AN. Докажите, что прямые BC и DN перпендикулярны.

6.9.6. (*«Физтех», 2023, 9.4*) Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

6.9.7. (*«Физтех», 2022, 9.4*) Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

6.9.8. (*«Бельчонок», 2022, 9.4*) Окружность, проходящая через вершины L и M трапеции $KLMN$, пересекает боковые стороны KL и MN в точках P и Q соответственно и касается основания KN в точке S. Оказалось, что $\angle LSM = 50°$, а $\angle KLS = \angle SNM$. Найдите $\angle PSQ$.

6.9.9. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.5*) Окружность проходит через вершины A и C равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и пересекает стороны AB и BC в точках M и N, соответственно. MK, хорда этой окружности, равная по длине $2\sqrt{5}$, содержит точку H, лежащую на AC и являющуюся основанием высоты треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку C и перпендикулярная BC, пересекает прямую MN в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника MKL, если $\cos\angle ABK = \frac{2}{3}$.

6.9.10. (*«Бельчонок», 2023, 9.5*) Вокруг треугольника PQR описана окружность ω. Касательные к окружности, проведенные в точках P и R, пересекаются в точке K. Точка M — середина стороны PQ. Прямая, проходящая через точку K параллельно PQ, пересекает сторону RQ в точке N. Докажите, что $\angle PMN = 90°$.

6.9.11. (*«Бельчонок», 2023, 9.5*) Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. В точке M к этой окружности проведена касательная ℓ. Окружность ω проходит через точки K и L и касается прямой ℓ в точке D. Прямая DL пересекает отрезок MN в точке E. Докажите, что $LM = ME$, если известно, что LN — касательная к окружности ω.

6.9.12. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.6*) На хорде AB окружности отмечена точка P так, что $AP = 2PB$. Хорда DE перпендикулярна AB и проходит через точку P. Докажите, что середина отрезка AP является точкой пересечения высот треугольника AED.

6.9.13. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.6*) Окружность пересекает стороны треугольника ABC в шести точках: AB в точках C_1 и C_2, AC в точках B_1 и B_2, BC в точках A_1 и A_2, причём $AC_1 = BC_2 = \frac{1}{4}AB$, $CA_2 = BA_1 = \frac{1}{4}BC$, $AB_2 = CB_1 = \frac{1}{4}AC$. Докажите, что треугольник равносторонний.

6.9.14. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.6*) Точки X, Y, Z лежат на одной прямой, причем именно в таком порядке ω_1, ω_2, ω_3 — окружности с диаметрами XZ, XY, YZ соответственно. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точке A, потом окружность ω_2 в точке B, потом она проходит через Y, дальше она пересекает окружность ω_3 в точке C, и наконец, снова пересекает ω_1 в точке D. Докажите, что $AB = CD$.

6.10 Касающиеся окружности

Дополнительные задачи — в листке Касающиеся окружности.

6.10.1. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.4*) Окружности O_1 и O_2 касаются окружности O_3 радиуса 13 в точках A и B соответственно и проходят через её центр O. Вторично эти окружности пересекаются в точке C. Известно, что $OC = 12$. Найдите AB.

6.10.2. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.6*) Даны три окружности радиусов 3, 4 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

6.10.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.7*) Три окружности с центрами в точках A, B и C и радиусами 7, 5 и 4 соответственно касаются друг друга внешним образом в точках D, E и F. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания D, E и F.

6.11 Вписанные и описанные окружности

Дополнительные задачи — в листке Вписанные и описанные окружности.

6.11.1. (*«Шаг в будущее», 2017, 9.2*) Точка M лежит на описанной около правильного треугольника ABC окружности и не совпадает с его вершинами. Докажите, что сумма расстояний от точки M до прилегающих вершин треугольника равна расстоянию от точки M до третьей его вершины: $AM + CM = BM$.

6.11.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 9.3*) Вписанная окружность треугольника ABC с центром O касается сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Оказалось, что угол AOC в четыре раза больше угла MKN. Найдите угол B.

6.11.3. (*«Курчатов», 2020, 9.3*) В треугольнике ABC с углами $\angle A = 35°$, $\angle B = 20°$ и $\angle C = 125°$ отмечен центр описанной окружности — точка O. Докажите, что точки O, A, B, C являются вершинами трапеции.

6.11.4. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.3*) Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 10 вписаны в одну и ту же окружность так, что точка A_1 лежит на дуге BC, а точка B_1 лежит на дуге AC. Найдите $AA_1^2 + BC_1^2 + CB_1^2$.

6.11.5. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.3*) Дан треугольник ABC, где $BA = 5$, $BC = 8$. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке P. Известно, что $BP = 3$. Найдите площадь треугольника BMP, где M — точка касания окружности со стороной AC.

6.11.6. (*«Физтех», 2022, 9.3*) Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB = 3$, $BM = 1$.

6.11.7. (*«Физтех», 2022, 9.4*) Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X — вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD = 6EY$.

6.11.8. (*«Физтех», 2023, 9.4*) Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω. Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC, пересекает повторно Ω в точке E. Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

6.11.9. (*«Курчатов», 2021, 9.4*) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AM = AB + MC$. Докажите, что перпендикуляр к AC, проходящий через M, делит дугу BC описанной окружности ABC пополам.

6.11.10. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.5*) В треугольнике ABC отмечены середины сторон $AB = 40$ и $BC = 26$ — точки K и L соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $AKLC$ — описанный. Найдите площадь треугольника ABC.

6.11.11. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.5*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи DA и CB — в точке F. Луч BA пересекает описанную вокруг треугольника DEF окружность в точке L, а луч BC пересекает ту же окружность в точке K. Длина отрезка LK равна 5, $\angle EBC = 15^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника EFK .

6.11.12. (*«Шаг в будущее», 2023, 9.5*) В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) на стороне BC выбирается точка N так, что окружность, вписанная в треугольник ACN, касается стороны AN в точке K и $\angle CDK = 18^\circ$, где точка D — середина AB. Найдите величину $\angle CAN$.

6.11.13. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.5*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, а стороны AC — в точке K. На стороне AB выбирается точка N так, что отрезок MK делит отрезок CN пополам. Найдите длину отрезка AN, если $AB = 8$, $AC = 7$, $BC = 6$.

6.11.14. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.5*) В острый угол вписали 1-ю окружность радиуса 2020 мм, затем вписали 2-ю окружность меньшего радиуса так, что она касается предыдущей, после вписали в угол третью окружность так, что она касается второй, и т. д. Укажите номер окружности наибольшего радиуса среди тех, у которых радиус меньше 1 мм, если косинус данного угла равен 7/9.

6.11.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.6*) Четырехугольник $ABCD$ ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. Известно, что $AD = CD$. Пусть биссектриса угла ADB пересекает AC в точке M, а AB — в точке N. Докажите, что треугольник MAN равнобедренный.

6.11.16. (*«Шаг в будущее», 2016, 9.6*) В угол 60° вписана окружность радиуса 1. Вторая окружность касается сторон угла и первой окружности. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и одной из сторон угла.

6.11.17. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.6*) Точки A, B и C лежат на окружности с центром в точке O. Луч OB вторично пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке D, причём точка B оказалась внутри этой окружности. Докажите, что AB — биссектриса угла DAC.

6.11.18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 9.6*) Через концы дуги $\overset{\frown}{AB}$, угловая величина которой равна $60°$, проведены параллельные хорды BC и AD, причём длина BC в четыре раза меньше длины AD. Хорды AB и CD продолжены до пересечения в точке E. Найдите площадь треугольника AED, если известно, что $|AC| = 30$.

6.11.19. (*«Физтех», 2023, 9.7*) Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X — вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

6.11.20. (*«Физтех», 2023, 9.7*) Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 7{,}5$, $XY = 15$.

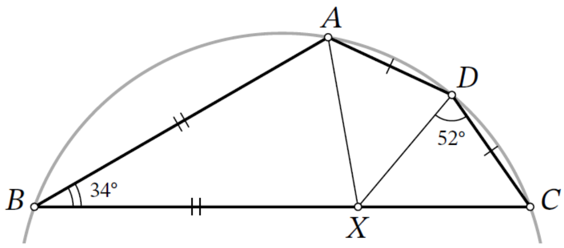
6.11.21. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.7*) Дан треугольник ABC, в котором $AB = 2$, $BC = 8$, $AC = 8$. Из точки B провели биссектрису, которая пересекла описанную окружность этого треугольника в точке D. Найдите, чему равно DI, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

6.11.22. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.8*) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 4. На серединном перпендикуляре к стороне BC внутри треугольника отметили такую точку K, что $\angle KBC = \frac{\angle A}{2}$. Найдите расстояние между точкой K и точкой пересечения высот треугольника, если $\cos(\angle B - \angle C) = \frac{31}{32}$.

6.12 Четыре точки на окружности

Дополнительные задачи — в листке Четыре точки на окружности.

6.12.1. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.5*) Стороны AD и DC вписанного четырёхугольника $ABCD$ равны. На стороне BC отмечена точка X так, что $AB = BX$. Известно, что $\angle B = 34°$, $\angle XDC = 52°$.



1. Сколько градусов составляет угол AXC?

2. Сколько градусов составляет угол ACB?

6.12.2. (*«Курчатов», 2022, 9.5*) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки P и Q — середины отрезков AC и BD соответственно. На отрезках OA, OB, OC, OD отмечены точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно так, что $AA_1 = CC_1$, $BB_1 = DD_1$.

- Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точках K и O.

- Описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 пересекаются в точках M и O.

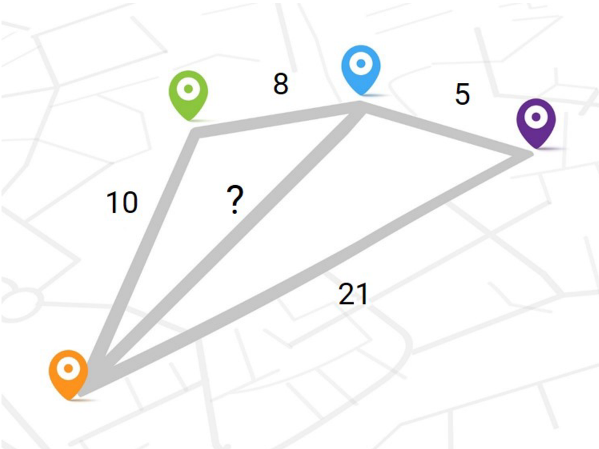
Докажите, что точки K, M, P, Q лежат на одной окружности.

6.12.3. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.8*) Дан треугольник ABC, точка I — центр вписанной окружности, точка A_1 взята таким образом, что точка A является серединой отрезка AI. Докажите, что точка A_1 и центры вневписанных окружностей треугольника ABC лежат на одной окружности.

6.13 Неравенство треугольника

Дополнительные задачи — в листке Неравенство треугольника.

6.13.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.3*) Четыре города и пять дорог расположены так, как изображено на рисунке. Длины всех дорог равны целому числу километров. Длины четырёх дорог указаны на рисунке. Сколько километров составляет длина оставшейся?



6.13.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.1*) Длины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны соответственно 5, 17, 5 и 9. Найдите длину диагонали DB, если известно, что она является целым числом.

6.13.3. (*Всеросс., 2021, РЭ, 9.1*) Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в жёлтый цвет, а три остальных — в зелёный. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трёх жёлтых палочек, а другой — из трёх зелёных?

6.13.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.2*) Найдите промежуток изменения коэффициента подобия треугольников с длинами сторон x, y, z и y, z, p. В ответе укажите ближайшие друг к другу целые числа, между которыми находится найденный промежуток.

6.13.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.3*) На продолжении биссектрисы CL треугольника ABC за точку L взята точка M, так что $LM = AC$, $CM = BC$. Докажите, что BM меньше периметра треугольника ACL.

6.13.6. (*Олимпиада КФУ, 2023, 9.3*) Из шести отрезков составлены два треугольника с периметром 2 каждый. Один отрезок из первой тройки поменяли местами с отрезком из второй тройки. Теперь из отрезков первой тройки нельзя сложить треугольник. Можем ли мы быть уверены, что из отрезков второй тройки по-прежнему можно сложить треугольник?

6.13.7. (*«Надежда энергетики», 2019, 9.3*) Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении 2018 : 2019. Он проплывает по четырехугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого? Какое минимальное значение может иметь отношение длины большего пути к меньшему?

6.13.8. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.4*) На стороне AC правильного треугольника ABC отмечена её середина M, на стороне BC отметили точку L, а на стороне AB — точку K, так что сумма длин $ML + LK + KC$ минимальна. Найдите отношение $KB : KA$.

6.13.9. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.6*) Шесть положительных чисел, не превосходящих 3, удовлетворяют равенствам $a + b + c + d = 6$ и $e + f = 2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\left(\sqrt{a^2+4} + \sqrt{b^2+e^2} + \sqrt{c^2+f^2} + \sqrt{d^2+4}\right)^2?$$

6.14 Геометрические неравенства

Дополнительные задачи — в листке Неравенства в геометрии.

6.14.1. (*«Бельчонок», 2022, 9.2*) Периметр треугольника равен 4. Докажите, что сумма квадратов длин сторон больше 5.

6.14.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.2*) На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $\angle KCL \leqslant \frac{1}{2}\angle ACB$. Докажите, что $KL \leqslant \frac{1}{2}AB$.

6.14.3. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.4*) Докажите, что в прямоугольном треугольнике площадь не превосходит квадрата периметра, разделённого на 23.

6.14.4. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.4*) Вася нашёл треугольник со сторонами a, b, c и составил квадратный трёхчлен $ax^2 - bx + c$. У этого трёхчлена нашлись два корня. Докажите, что они одновременно не могут быть меньше, чем $1/3$.

6.14.5. (*САММАТ, 2021, 9.5*) Доказать неравенство

$$\frac{x}{-x+y+z} + \frac{y}{x-y+z} + \frac{z}{x+y-z} \geqslant 3,$$

где x, y, z — стороны произвольного треугольника.

6.14.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.7*) Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором стороны AB, BC, CD и AD таковы, что

$$AB \cdot BC = 2AD \cdot DC.$$

Докажите, что $8BD^2 \leqslant 9AC^2$.

6.14.7. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.7*) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD перпендикулярны. Сравните величины $BC \cdot AD$ и $AB \cdot CD$.

6.15 Геометрические задачи на экстремум

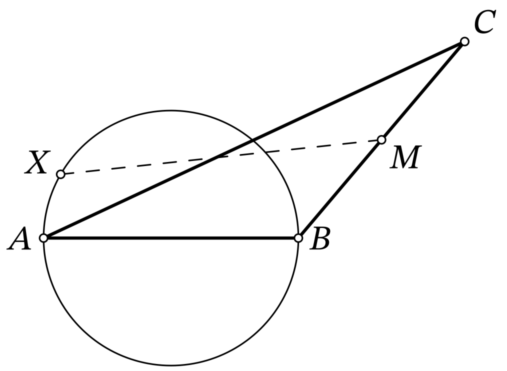
Дополнительные задачи — в листке Геометрические задачи на экстремум.

6.15.1. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.2*) Треугольник вращается в своей плоскости. Через какую точку должна проходить ось вращения, чтобы заметалась наименьшая площадь?

6.15.2. (*«Бельчонок», 2022, 9.3*) Два бельчонка находятся в точках A и B, и начинают одновременно скакать по прямым AO и BO по направлению к точке O (пройдя точку O, каждый продолжает движение по своей прямой). Расстояние $AO = 120$ метров, $BO = 80$ метров, угол $AOB = 60°$. У бельчат постоянная одинаковая скорость. Каково наименьшее расстояние между бельчатами во время движения?

6.15.3. (*«Ломоносов», 2022, 9.4*) Семейство Дурслей скрывает Гарри Поттера на острове, который находится на расстоянии 9 км от берега. Берег прямолинейный. На берегу, в 15 километрах от той точки берега, которая ближе всего к острову, находится Хагрид на волшебном мотоцикле, и он хочет добраться до Гарри как можно быстрее. По побережью мотоцикл едет со скоростью 50 км/час, а над морем летит со скоростью 40 км/час. План у Хагрида такой: сначала проехать X километров по побережью, а потом взять курс напрямик на остров. Какое значение X наилучшим образом подходит для целей Хагрида?

6.15.4. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.5*) Точка M — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $AB = 17$, $AC = 30$, $BC = 19$. На стороне AB как на диаметре построена окружность. На этой окружности выбирается произвольная точка X. Какое минимальное значение может принимать длина отрезка MX?



6.15.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 9.5*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = a$ и $CB = b$. Найдите

а) сторону квадрата (с вершиной C) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC;

б) размеры прямоугольника (с вершиной C) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC.

6.15.6. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.5*) От прямой линии, проходящей через точки пересечения медиан и биссектрис тупоугольного треугольника, двумя его сторонами отсекается отрезок длиной на 1 см меньше, чем одна из длин сторон данного треугольника. Найдите наименьшую из возможных длин сторон этого треугольника, если их длины выражаются натуральными числами (в см) и образуют арифметическую прогрессию.

6.15.7. (*«Росатом», 2018, 9.5*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC проведена прямая L параллельная AD и пересекающая стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что четырехугольники $AMND$ и $MBSN$ подобные, а сумма длин сторон AD и BC не больше 4. Найти наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN.

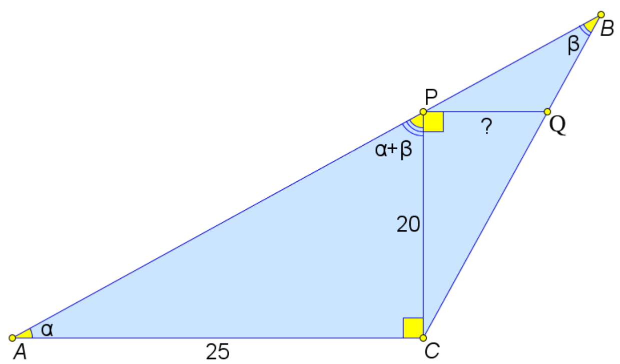
6.16 Построения

6.16.1. (*САММАТ, 2023, 9.8*) Зная заданный отрезок a, с помощью циркуля и линейки (без шкалы деления) построить отрезок $b = a \cdot \frac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{11}}$.

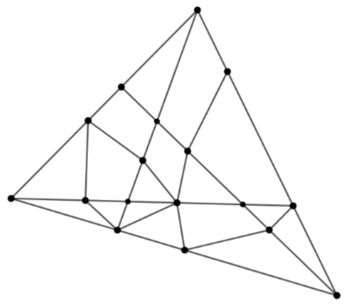
6.16.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.8*) Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что можно построить три квадрата с центрами в точках A, B и C такие, что какие бы два из них не выбрали, существуют две прямые, на каждой из которых лежит по одной стороне каждого выбранного квадрата.

6.17 Разные планиметрические задачи

6.17.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.6*) Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом C. На его сторонах AB и BC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle ACP = \angle CPQ = 90°$. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $AC = 25$, $CP = 20$, $\angle APC = \angle A + \angle B$.



6.17.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.1*) Треугольник с периметром 40 был разбит отрезками, как показано на рисунке, на 11 треугольников, сумма периметров которых равна 147, и 6 четырехугольников, сумма периметров которых равна 63. Какова сумма длин отрезков, проведенных внутри треугольника?



6.17.3. (*«Ломоносов», 2023, 9.1*) В бескрайних калмыцких степях мама отправила маленькую дочку навестить бабушку. У девочки не было ни навигатора, ни компаса, а только часы, которыми она еще не умела пользоваться, но у которых был ежечасный звуковой сигнал. Зная обычную скорость их любимого верблюда, мама рассчитала маршрут для дочки. Отправляя ее в путь при звуковом сигнале часов в направлении, соответствующем положению солнца в этот момент, велела через час (по очередному сигналу часов) изменить направление движения в соответствии с новым положением солнца. Так в конце концов девочка и доехала бы до бабушки. Но, когда пришло время менять направление, девочка заметила далеко впереди юрту своей подружки, она продолжила движение, не меняя направления, доехала до подружки и проговорила с ней 21 минуту, пока не прозвучал следующий сигнал часов. Тогда она вспомнила наставление матери и продолжила путь в направлении, соответствующем новому положению солнца. Как ни странно, до бабушки она доехала. Сколько всего времени (в минутах) она на это потратила?

6.17.4. (*«Надежда энергетики», 2016, 9.2*) На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Каждая сторона треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярна какой-либо стороне исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника? Каково отношение площадей исходного и образованного треугольников?

6.17.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 9.2*) На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O, причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.

6.17.6. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.4*) Дан треугольник ABC с углом $C = 120°$. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на сторону AB; точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AC и BC соответственно. Найдите, чему равен периметр треугольника ABC, если известно, что треугольник EFC равнобедренный и его площадь равна $\sqrt{3}$.

6.17.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 9.4*) На плоскости отмечены $2n + 1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n - 1$ точек и снаружи — тоже $n - 1$.

6.17.8. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.5*) В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбирается точка D так, что $CD : DB = = 2 : 1$, а на отрезке AD — точка K, при этом $AK = CD + DK$. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Треугольник AEK — равнобедренный ($AE = EK$). Найдите величину угла ADC в градусах.

6.17.9. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.5*) На боковых сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC наружу построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABD и BCF с катетами, равными соответствующим сторонам AB и BC треугольника ABC. Прямые FB и DC пересекаются в точке M, а FA и BC — в точке N. Найдите градусную меру $\angle BMN$.

6.17.10. (*«Росатом», 2022, 9.5*) Угол при вершине A остроугольного треугольника ABC равен $60°$. Через вершины B и C проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC соответственно, пересекающиеся в точке D. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная прямой AD и пересекающая сторону AC в точке M. Длины отрезков MA и MC равны 3 и 1 соответственно. Найти длину стороны BC.

6.17.11. (*«Росатом», 2020, 9.5*) В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и AC, пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника. Найти угол при вершине A треугольника.

6.17.12. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.7*) Весной 1945 года контрразведчики гестапо с 4 радиостанций, расположенных в вершинах квадрата на территории Берлина, зафиксировали в некоторый момент работу советского радиопередатчика. Штирлиц проявил инициативу и доложил Мюллеру, что расстояния от точек прослушивания до передатчика составили 1, 9, 4 и 5 км. Должен ли Мюллер верить такому сообщению?

6.17.13. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.7*) Из точки K на стороне AC треугольника ABC опустили перпендикуляры KL_1 и KM_1 на стороны AB и BC соответственно. Из точки L_1 опустили перпендикуляр L_1L_2 на BC, а из точки M_1 — перпендикуляр M_1M_2 на AB. Оказалось, что треугольники BL_1M_1 и BL_2M_2 подобны (точка L_1 в первом треугольнике соответствует точке M_2 во втором). Кроме того, $BL_2 = 6$ и $L_2M_1 = 4$. Найдите L_1L_2.

6.17.14. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.8*) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC — точка L, на стороне AC — точка N. Известно, что $BK = \frac{14}{13}$, $AN = 10$, $BL = 1$. Через точку N провели прямую, параллельную KL, она пересекла сторону BC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

6.18 Метод координат

Дополнительные задачи — в листке Формула расстояния между точками.

6.18.1. (*«Надежда энергетики», 2020, 9.5*) Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП.

А) Введите систему координат так, чтобы кирпичный завод имел координаты $(0, 0)$, а ЛЭП проходила через точку $(0, d)$ параллельно одной из координатных осей, и найдите координаты точки на дороге, удаленной от завода на расстояние $5d$.

Б) Для каких натуральных n на такой дороге существует точка, удаленная от завода на расстояние nd?

6.18.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.6*) Космический зонд, двигаясь прямолинейно с постоянной скоростью, пролетает мимо Марса и каждый день ровно в 12:00 замеряет расстояние до этой планеты. Известно, что 1-го февраля расстояние было 5 млн. км, 10-го февраля — 2 млн. км и 13-го февраля — 3 млн. км. Определите, когда зонд пройдет на минимальном расстоянии от Марса. *В этой задаче Марс можно считать точкой.*

Глава 7

Комбинаторика и вероятность

7.1 Перебор вариантов

Дополнительные задачи — в листке Перебор вариантов.

7.1.1. (*«Бельчонок», 2022, 9.1*) Сколько существует правильных несократимых дробей, у которых сумма числителя и знаменателя равна 100?

7.1.2. (*САММАТ, 2022, 9.5*) В кошельке в достаточном количестве купюры достоинством 100 и 200 рублей. Сколькими различными способами, извлекая купюры по одной, можно расплатиться за покупку стоимостью 1800 рублей?

7.1.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.4*) Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

7.1.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.5*) Найдите количество пар (m, n) натуральных чисел, таких что каждый из корней уравнения $x^2 - mx - n = 0$ не превосходит 10.

7.1.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 9.6*) На координатной плоскости отметили точки $A(0, 0)$ и $B(1000, 0)$, а также точки $C_1(1, 1)$, $C_2(2, 1)$, ..., $C_{999}(999, 1)$. Потом провели всевозможные прямые AC_i и BC_i ($1 \leqslant\leqslant 999$). Сколько целочисленных точек пересечения у всех этих прямых? (Целочисленная точка — это та, у которой обе координаты целые.)

7.1.6. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.7*) Докажите, что если выпуклый 102-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины выходило либо ровно три диагонали, либо ни одной, то количество получившихся треугольников, у которых все три стороны являются диагоналями исходного многоугольника, составит ровно 34.

7.1.7. (*«Ломоносов», 2022, 9.7*) Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. *Обозначим скобочками пакет.*
Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: ().
Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: (()).
Три пакета можно сложить двумя разными способами: (()()) и ((())), и т. д.
Порядок пакетов внутри не важен. Например, вариант ((())()) не отличается от (()(())).

7.2 Правила суммы и произведения

Дополнительные задачи — в листке Правила суммы и произведения.

7.2.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.2*) У Дениса есть карточки с числами от 1 до 50. Сколько существует способов выбрать две карточки так, чтобы разность чисел на карточках равнялась 11, а произведение делилось на 5? Порядок выбранных карточек не важен: например, способ выбора карточек с числами 5 и 16, а также способ выбора карточек с числами 16 и 5 — это один и тот же способ.

7.2.2. (*«Бельчонок», 2018, 9.1*) Найдите количество пар натуральных чисел (m, n), $m < n < 2018$, таких, что число $\frac{\frac{m+n}{2}+\sqrt{mn}}{2}$ является квадратом целого числа.

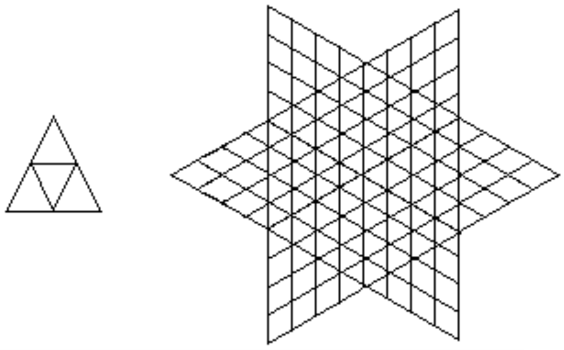
7.2.3. (*«Бельчонок», 2018, 9.1*) Найдите количество пар натуральных чисел (m, n), $m < n < 2118$, таких, что число $\frac{\sqrt{mn}+\frac{m+n}{2}}{2}$ является квадратом целого числа.

7.2.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 9.1*) В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

1)	$\boxed{T}$	I	G	E	R
2)	$\boxed{L}$	I	F	$\boxed{T}$	S
3)	H	$\boxed{O}$	$\boxed{T}$	E	$\boxed{L}$

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв.

7.2.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 9.1*) На левом рисунке изображены пять треугольников (четыре маленьких и один большой). А сколько треугольников на правом рисунке?



7.2.6. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.1*) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 3×8 на уголки из трёх клеток?

7.2.7. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.2*) Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

7.2.8. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.2*) Сколькими способами можно покрасить буквы слова КОЛОБОК в синий, красный и зелёный цвета так, чтобы во-первых одинаковые буквы были разного цвета, а во-вторых буквы, стоящие рядом, тоже были бы разного цвета?

7.2.9. (*«Ломоносов», 2020, 9.2*) Сколькими способами можно прочитать слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

Р О Т О Р
О Т О Р
Т О Р
О Р
Р

7.2.10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 9.2*) Будем обозначать $\overline{abc}$ трехзначные числа, записанные цифрами a, b, c. Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

7.2.11. (*«Бельчонок», 2021, 9.4*) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^2y^3 = 3^{15} \cdot 20^{20} \cdot 5^{15}?$$

7.2.12. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.5*) Сколькими способами можно в таблице 2×7 расставить натуральные числа от 1 до 14 (каждое по одному разу), чтобы сумма чисел в каждом из семи столбцов была нечётна?

7.2.13. (*«Бельчонок», 2020, 9.5*) $2n$ точек, являющихся вершинами правильного $2n$-угольника, соединены попарно непересекающимися отрезками. Оказалось, что это можно сделать 14-ю способами. Сколькими способами можно соединить попарно непересекающимися отрезками вершины правильного $(2n+2)$-угольника?

7.2.14. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 9.5*) Даны шесть карточек, на которых написаны цифры 1, 2, 4, 5, 8 и запятая. Из них составляются всевозможные числа (каждую карточку нужно использовать ровно один раз, запятая не может стоять в начале или в конце числа). Чему равно среднее арифметическое всех таких чисел?

7.2.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.5*) Ася учится писать и умеет писать три буквы А, С и Я. Мама предложила ей написать семь букв подряд. В полученном «слове» три подряд идущих буквы образовали имя «АСЯ». Сколько существует таких различных семибуквенных «слов»?

7.2.16. (*«Надежда энергетики», 2018, 9.5*) Найдите количество всех упорядоченных троек (x, y, z) чисел множества $\{1, 2, \ldots, 70\}$ для которых сумма $x^2 + y^2 + z^2$ кратна 7.

7.2.17. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.6*) За круглым столом разместились 18 человек. Сколькими способами можно выбрать из этих людей троих, чтобы между любыми двумя из выбранных людей находилось бы еще по меньшей мере два человека?

7.2.18. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 9.6*) Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

7.2.19. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.8*) На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 3×3, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более трех общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?

7.3 Количество делителей числа

Дополнительные задачи — в листке Функции делителей.

7.3.1. (*«Росатом», 2021, 9.2*) Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\frac{2k+3}{2k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 100 знаками после запятой?

7.3.2. (*«Ломоносов», 2021, 9.2*) Сколько существует делителей числа 2021^{2021}, кубический корень из которых является натуральным числом?

7.3.3. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.8*) Сколько существует пар натуральных чисел a и b таких, что $a \geqslant b$ и выполнено

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}\,?$$

7.3.4. (*«Бельчонок», 2019, 9.5*) Сколько пар натуральных чисел (x, y), в которых x и y имеют одинаковую четность, удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$?

7.3.5. (*«Бельчонок», 2019, 9.5*) Сколько пар натуральных чисел (x, y), хотя бы одно из которых нечетно, удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3528}$?

7.3.6. (*«Бельчонок», 2019, 9.5*) Сколько пар различных четных натуральных чисел (x, y) удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1404}\,?$$

7.3.7. (*«Ломоносов», 2020, 9.6*) Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.

7.3.8. (*САММАТ, 2021, 9.7*) Сколько решений в натуральных числах (m, n) имеет уравнение

$$\text{НОК}\,(m, n)=2020^3?$$

7.4 Функции делителей

Дополнительные задачи — в листке Функции делителей.

7.4.1. (*«Росатом», 2019, 9.2*) Натуральное число a раскладывается в произведение трех различных простых делителей. Сумма всех его делителей, включая единицу и a, равно 72. Найти число a.

7.4.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 9.3*) Для натурального числа n обозначим через $T(n)$ произведение всех его натуральных делителей (включая n).

а) Вычислите $T(2022)$.

б) Существует ли простое число p и натуральное число n такие, что $T(n)=p^{2022}$?

7.4.3. (*«Росатом», 2017, 9.4*) Найти сумму всех целых положительных делителей числа

$$a=2^8\cdot 3^3\cdot 5^6.$$

7.4.4. (*«Бельчонок», 2021, 9.5*) Найдите сумму всех натуральных делителей числа

$$N=3^3\cdot 4^4\cdot 25^3.$$

7.5 Перестановки с повторениями

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

7.5.1. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.3*) Из карточек с буквами можно составить слово КАРАКАТИЦА. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), в которых буквы Р и Ц соседние?

7.6 Сочетания

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

7.6.1. (*САММАТ, 2021, 9.1*) В некотором выпуклом 2021-угольнике провели все диагонали. Оказалось, что если какие-то две диагонали пересекаются в некоторой точке, отличной от вершин многоугольника, то никакая другая диагональ не проходит через эту точку. Найти число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин многоугольника.

7.6.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.3*) Есть 7 красных, 6 белых, 8 желтых и 5 черных шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

7.6.3. (*«Физтех», 2022, 9.5*) На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n\mathbb{N}$. Из них выбираются три попарно различных чисел, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5112 таких троек. Чему равно n?

7.6.4. (*«Физтех», 2021, 9.5*) У фокусника есть набор из 12^2 *различных* карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая — синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 12. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

7.6.5. (*«Курчатов», 2021, 9.5*) На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

7.6.6. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.6*) *Игра в кости.* При броске шести попарно различных разноцветных кубиков выпадает сумма в 28 очков. Сколько возможно различных вариантов с такой суммой?

7.6.7. (*«Шаг в будущее», 2021, 9.6*) Игра в кости. При броске пяти попарно различных разноцветных кубиков выпадает сумма в 21 очко. Сколько возможно различных вариантов с такой суммой?

7.6.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 8–9.8*) На дне рождения Пети проводится лотерея с определенным количеством призов, причем каждый гость может получить не более одного приза. Известно, что если бы было на один приз меньше, чем в действительности, то количество всех возможных комбинаций распределения призов среди гостей было бы на 50% меньше. А если бы было на один приз больше, чем в действительности, то количество различных комбинаций распределения выигрышей среди гостей увеличилось бы на 50%. Сколько гостей пришло поздравить Петю и скольким из них повезет в лотерею?

7.7 Количество маршрутов

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

7.7.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.5*) Миша и Вася играли в некоторую игру. Победителю партии начисляется одно очко, а проигравшему — ноль очков, в случае ничьей оба игрока получают по одному очку. После каждой партии ребята записывали текущий счёт в таблицу. В конце он был $4:3$ в пользу Миши. Сколько существует различных способов получить такой результат?

7.7.2. (*«Физтех», 2023, 9.6*) Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути — соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $A(3;5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A, кузнечик останавливается.)

7.7.3. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.8*) Хромой король может ходить вправо, вниз, вправо вниз или влево вниз на одну клетку. Сколько у него способов добраться из левой верхней клетки доски 3×100 в правую нижнюю?

Размер таблицы 3×100 означает, что в таблице 3 строки и 100 столбцов.

7.8 Рекуррентные соотношения в комбинаторике

Дополнительные задачи — в листке Рекуррентные соотношения в комбинаторике.

7.8.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.8*) Вова играл старыми костяшками от домино, на которых стерлись все точки, так что они стали не отличимыми. Каждая костяшка представляет собой прямоугольник 2×1, а их число равно 24. Вова решил каждый день по-новому раскладывать костяшки в виде дорожки 2×12, так чтобы рисунок раскладки никогда не повторялся. Сколько дней Вова сможет так раскладывать костяшки, пока все возможные раскладки не будут исчерпаны, если в день он делает одну раскладку?

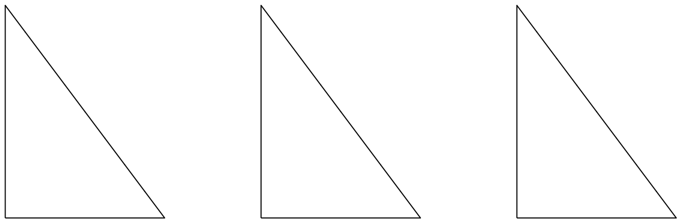
7.9 Геометрическая комбинаторика

Дополнительные задачи — в листке Геометрическая комбинаторика.

7.9.1. (*«Физтех», 2022, 9.2*) Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

7.9.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 9.4*) На координатной плоскости нарисовали равнобедренный треугольник ABC: $AB = 2016$, $BC = AC = 1533$, причём вершины A и B лежат в узлах на одной горизонтали. Определите, сколько узлов лежит в треугольнике ABC (включая узлы, лежащие на сторонах). Узлом называется точка координатной плоскости, у которой обе координаты целые.

7.9.3. (*«Ломоносов», 2023, 9.7*) На плоскости есть три одинаковых прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4, 5 (см. рис.). Они одинаково ориентированы, их можно двигать и вращать, но нельзя накладывать друг на друга (касаться сторонами можно) и нельзя класть обратной стороной вверх (то есть, как бы вы ни двигали треугольник, стороны 3 - 4 - 5 будут расположены по ходу часовой стрелки).



Посчитайте, сколько различных «жёстких» фигур можно собрать, используя все эти треугольники. Фигура считается «жёсткой», если у каждого её треугольника есть с каким-нибудь другим треугольником общая вершина и общий граничный отрезок с концом в этой вершине (необязательно целая сторона).

7.10 Принцип Дирихле

Дополнительные задачи — в листке Принцип Дирихле.

7.10.1. (*«Росатом», 2018, 9.2*) В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет одного цвета и не менее четырех — другого?

7.10.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.2*) На карточках написаны числа от 1 до 2019. Какое количество карточек нужно взять не глядя, чтобы среди написанных на них чисел гарантированно было число кратное 3 и число кратное 5?

7.10.3. (*«Бельчонок», 2023, 9.3*) Маша записала в каждую клетку квадрата 10×10 в некотором порядке по одному натуральному числу от 103 до 202 (числа не повторяются). Она вычислила произведение чисел в каждом столбце таблицы и получила набор из десяти чисел. Затем Маша вычислила произведения чисел в каждой строке таблицы и также получила набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

7.10.4. (*«Бельчонок», 2023, 9.3*) В клетчатом квадрате 30×30 клеток отмечено 33 узла сетки (отмеченные узлы могут быть на сторонах квадрата). Верно ли, что найдутся два отрезка равной длины с вершинами в отмеченных узлах.

7.10.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.8*) В классе 14 девочек. Каждая из них узнала, скольких девочек в классе зовут также как ее, и у скольких такая же фамилия, и выписала два числа на доску. Оказалось, что среди чисел на доске встречаются все числа от 0 до 6. Докажите, что найдутся две девочки в классе, у которых совпадают и имя, и фамилия.

7.11 Круги Эйлера

7.11.1. (*«Росатом», 2016, 9.1*) В летнем лагере в первую смену отдыхали 57 школьников. За время отдыха 27 ребят читали книги, 25 — ловили рыбу, 26 — собирали грибы, при этом каждый школьник принял участие хотя бы в одном из этих дел. Известно, что 9 из читающих ребят собирали грибы, 8 грибников успели сходить на рыбалку. Сколько ребят читали книги, ходили на рыбалку, но не собирали грибы? Какое максимальное число ребят могли, при этих условиях, собирать грибы, но не читать книг и не ловить рыбу.

7.12 Взаимно-однозначные соответствия

Дополнительные задачи — в листке Биекции.

7.12.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 9.5*) На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а S — количество способов положить так 16 доминошек. Что больше — N или S? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

7.12.2. (*«Надежда энергетики», 2021, 9.5*) В конце XIX в. немецкий математик (он родился и вырос в Санкт-Петербурге) Георг Кантор доказал, казалось бы, парадоксальный факт: между множеством и его подмножеством можно установить взаимно однозначное соответствие. Так, в частности, можно каждому целому числу k поставить в соответствие натуральное число $N(k)$, которое будет номером числа k, причем все номера (натуральные числа) будут использованы. Укажем первые пары такого соответствия:

$$N(0)=1, N(1)=2, N(-1)=3, N(2)=4, N(-2)=5, N(3)=6, N(-3)=7, \ldots$$

Решите следующие уравнения

А) $N(x)=2021$,

Б) $N(x)-N(y)=2021$.

7.13 Знакомства

7.13.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 9.1*) В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 10 раз меньше, чем тюльпанов?

7.13.2. (*«Бельчонок», 2019, 9.2*) Ученики 9А и 9Б писали поздравления. Каждая девочка поздравила каждого своего одноклассника, а каждый мальчик поздравил каждую девочку из другого класса. Всего было написано 437 поздравлений. Сколько вместе учеников в этих двух классах?

7.13.3. (*«Бельчонок», 2019, 9.2*) Ученики 9В и 9Г решили сделать фотогалерею. Каждая девочка один раз сфотографировала каждого своего одноклассника, а каждый мальчик сфотографировал каждую девочку из другого класса. Всего было сделано 323 фотографии. Сколько всего учеников в этих двух классах?

7.13.4. (*«Бельчонок», 2019, 9.2*) На дереве резвились две стаи мартышек. Каждая стая состояла из зеленых и коричневых мартышек. Каждая зеленая мартышка бросила по одному ореху в каждую коричневую мартышку из своей стаи, а каждая коричневая мартышка бросила по одному ореху в каждую зеленую мартышку из другой стаи. Всего было брошено 247 орехов. Сколько всего мартышек в этих двух стаях, если известно, что вместе их меньше 100?

7.13.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.4*) Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т. е. если A знает B, то и B знает A). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов. Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

7.13.6. (*«Курчатов», 2023, 9.5*) В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.

7.13.7. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.6*) На бал пришли 29 мальчиков и 15 девочек. Некоторые мальчики потанцевали с некоторыми девочками (не более одного раза в каждой паре). После бала каждый человек рассказал родителям, сколько раз он танцевал. Какое наибольшее количество различных чисел дети могли назвать?

7.13.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.7*) В школе любые два ребёнка либо дружат друг с другом, либо нет. Назовём ребёнка общительным, если он дружит хотя бы с тремя другими детьми. Известно, что в школе есть n общительных детей, а также ровно 11 детей, у которых всего один друг. При каком наименьшем n заведомо найдётся несколько детей, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих своих соседей?

7.13.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.7*) В компании работает 168 человек. Среди любых четырех человек можно выбрать хотя бы одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

7.13.10. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.8*) На конференцию приехали несколько человек. Докажите, что их можно разместить в двух конференц-залах так, чтобы у каждого из них в своем зале имелось четное число знакомых. (Один из залов можно оставить пустым.)

7.14 Графы

Дополнительные задачи — в листке Графы.

7.14.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 9.2*) Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены несколько городов, соединённых между собой дорогами так, что случайный турист может попасть из любого города в любой другой. Оказалось, что если закрыть любые два города на карантин и перекрыть все ведущие в них дороги, то всё ещё можно проехать из любого из оставшихся городов в любой другой.

Турист случайным образом выбрал три дороги, никакие две из которых не ведут в один город, и хочет проехать по ним, начав и закончив свой маршрут в одном и том же городе, по пути не заезжая ни в какой из городов дважды. Всегда ли он сможет это сделать?

7.14.2. (*Всеросс., 2022, РЭ, 9.4*) В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

7.15 Классическая вероятность

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

7.15.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.1*) В классе меньше 30 человек. Учитель заметил, что вероятность выбора отличницы среди девочек равна $\frac{3}{13}$, а вероятность выбора отличника среди мальчиков равна $\frac{4}{11}$. Сколько в классе отличников?

7.15.2. (*«Ломоносов», 2022, 9.1*) На гранях шестигранного игрального кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Кубик бросают, и он падает на стол. После этого видны числа на всех гранях, кроме одной. Числа на пяти видимых гранях перемножаются. Найдите вероятность того, что это произведение делится на 16.

7.15.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.1*) Монету бросили 2021 раз. Какова вероятность, что выпадет четное количество «орлов»?

7.15.4. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.2*) Ваня и Дима пошли на рынок. У Вани было 1000 рублей, а у Димы — 2000 рублей. Они покупали что-то независимо друг от друга, а в какой-то момент они встретились и решили купить модель танка за 1800 рублей. Найдите вероятность того, что оставшейся у них суммы хватит на это.

7.15.5. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.4*) Имеется 20 шаров с числами $1, 2, \ldots, 10$, каждое число встречается по два раза. Эти шары случайным образом раскладываются по два в 10 корзин. Из каждой корзины извлекается один шар. Какова вероятность того, что на извлеченных шарах все числа различны?

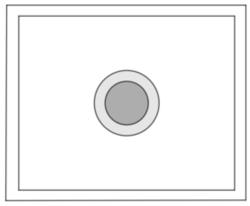
7.15.6. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.6*) Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 25. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

7.15.7. (*САММАТ, 2022, 9.10*) На доске выписаны целые числа от 1 до 10. Игорь и Матвей на листках выписывают некоторые из написанных на доске чисел (хотя бы по одному числу). Какова вероятность того, что найдется хотя бы одно число, которое назовут оба мальчика, когда будут зачитывать выбранные числа?

7.16 Геометрическая вероятность

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

7.16.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.2*) Дима посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 15 см на 20 см круглую кляксу радиусом 2 см. Сразу после этого Дима посадил ещё одну такую кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы пересекаются.



7.16.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.6*) Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 14.00 до 15.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 20 минут, и если никого не дождётся, то пойдет в кино один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 15.00. Определить вероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

Глава 8

Алгоритмы, процессы, игры

8.1 Алгоритмы и операции

Дополнительные задачи — в листке Процессы и операции.

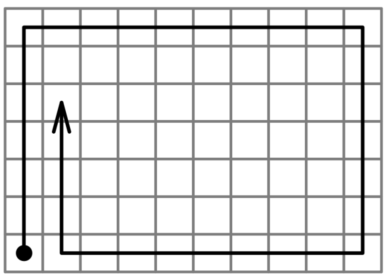
8.1.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.1*) На острове живут красные, жёлтые, зелёные и синие хамелеоны.

- В пасмурный день либо один красный хамелеон меняет окрас на жёлтый цвет, либо один зелёный хамелеон — на синий цвет.
- В солнечный день либо один красный хамелеон меняет окрас на зелёный цвет, либо один жёлтый хамелеон — на синий цвет.

В сентябре было 18 солнечных и 12 пасмурных дней. При этом количество жёлтых хамелеонов увеличилось на 5. На сколько увеличилось количество зелёных хамелеонов?

8.1.2. (*«Курчатов», 2021, 9.1*) Дана клетчатая таблица шириной 300 и высотой 50 клеток. Пластмассовую улитку ставят в левый нижний угол так, чтобы она смотрела по таблице вверх, и начинают передвигать по одной клетке в направлении взгляда. Если следующей клетки нет, то есть улитка стоит у края доски, либо если в следующей клетке она уже побывала, то её поворачивают направо и продолжают двигать по прямой в направлении взгляда. (Получается, что улитка двигается по спирали по часовой стрелке.)

Улитка останавливается, когда пройдены все клетки. Укажите номер строки и номер столбца клетки, в которой она остановится. Столбцы пронумерованы слева направо числами от 1 до 300, а строки — снизу вверх числами от 1 до 50.



8.1.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 9.1*) Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). После 12 игр Паша стал на 2023 рубля богаче, чем был изначально. Сколько из этих игр он выиграл?

8.1.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.2*) Иван-царевич сражается с Змеем Горынычем на Калиновом мосту. У Змея 198 голов. Одним взмахом меча Иван-царевич может отрубить пять голов, но после этого у Змея моментально отрастают новые головы в количестве, равном остатку при делении на 9 от числа оставшихся после удара Ивана-царевича голов. Если число оставшихся голов делится на 9, то новые головы не вырастают. Если голов перед взмахом у Змея Горыныча было пять или меньшее, то Иван царевич одним взмахом убивает поганого Змея. Сколько взмахов мечом должен сделать Иван-царевич, чтобы победить Змея Горыныча?

8.1.5. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.2*) На клетчатой доске 10×10 расположены 400 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

8.1.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 9.3*) n фишек с номерами 1, 2, …, n расставлены в ряд по возрастанию. За один ход разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно две фишки. Существует ли такое n, для которого удастся за несколько ходов расставить все фишки в обратном порядке?

8.1.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 9.3*) На доске вначале было записано n чисел: 1, 2, …, n. Разрешается стереть любые два числа на доске, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может оказаться на доске после $(n-1)$ таких операций

а) при $n = 111$;

б) при $n = 110$?

8.1.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 9.3*) На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

8.1.9. (*«Ломоносов», 2023, 9.4*) На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на центральном квадратике одной из его граней, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

1. При 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на

этот квадратик попал.

2. При 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

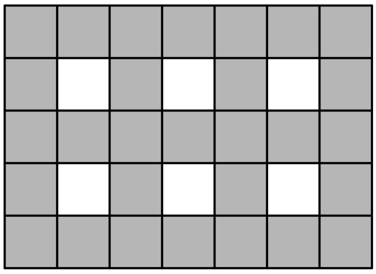
Завершил жучок свое движение через 2023 с после его начала. Через сколько секунд после начала движения жучок впервые оказался на том квадратике, на котором он в конце остановился?

8.1.10. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 9.4*) Встретились N детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Получилось, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил). При каких $N > 1$ это возможно?

8.1.11. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.5*) У Леонида есть белый клетчатый прямоугольник. Сначала он покрасил в серый цвет все столбцы через один, начиная с самого левого, а затем все строки через одну, начиная с самой верхней. Все клетки, примыкающие к границе прямоугольника, оказались закрашены.

Сколько закрашенных клеток могло получиться в прямоугольнике, если белых клеток осталось 74? Укажите все возможные варианты.

Пример раскраски прямоугольника 5×7 изображён ниже.



8.1.12. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 9.5*) Дано 10 чисел: 10, 20, 30, ..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т. д. Можно ли в результате нескольких операций получить:

а) все одинаковые числа?

б) все числа, равные 200?

8.1.13. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.5*) Несколько Дедов Морозов участвуют в игре «Тайный Санта». Каждый Новый Год каждый Дед Мороз дарит подарок одному из своих коллег, причём одному и тому же каждый год, поскольку новую жеребьёвку им проводить лень. Кроме того, придумывать новые подарки Деды Морозы тоже ленятся, поэтому каждый год они просто передаривают подарок, полученный ими в прошлом Году.

Первого января 2023 года Дед Мороз Красный Нос получил подарок, который сам дарил при наступлении 2019 года; Дед Мороз Синий Нос получил подарок, который сам дарил при наступлении 2017 года, а Дед Мороз Белый Нос получил подарок, который последний раз дарил при наступлении 2015 года.

Какое наименьшее число Дедов Морозов могло участвовать в игре?

8.1.14. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 9.5*) В квадрате со стороной 1 отметили 53 точки, из которых четыре являются вершинами квадрата, а остальные (произвольные) 49 точек лежат внутри. Докажите, что найдется треугольник с отмеченными вершинами, имеющий площадь не более 0,01.

8.1.15. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 9.5*) У каждой из двух сестёр в кармане от 1 до 1000 конфет. Папа по очереди задаёт сёстрам (то одной, то другой) вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет». Он хочет, задав не более чем по 6 вопросов каждой из сестёр, выяснить, верно ли, что вместе у них больше 1000 конфет. При этом ни одна из девочек не знает, сколько конфет в кармане у другой, поэтому каждую сестру можно спрашивать только об её конфетах. Придумайте, как папе добиться цели.

8.1.16. (*Открытая олимпиада, 2016, 9.6*) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1. Заменить исходное число на разность числа, полученного из него отбрасыванием трёх последних цифр и числа, составленного из его трёх последних цифр (возможно, записанного в неправильной форме — с нулями в начале; разность берётся положительная — из большего числа вычитается меньшее).

2. Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1. Если в результате в числе на первом месте оказываются нули, они отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из 98 восьмёрок. В конце осталось двузначное число. Какое именно?

8.1.17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 9.6*) К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах. От каждой планеты расходится 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т. е. если есть портал, ведущий из A в B, то нет портала, ведущего из B в A. Мистер Риггз хочет добраться с Галатеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

8.1.18. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.7*) Зрители называют фокуснику натуральное число $n > 2$. Затем Фокусник пишет на доске натуральное число $k > n$. После чего зрители пишут предыдущие n последовательных чисел $k-1$, $k-2$, $\ldots$, $k-n$ Далее Фокусник стирает с доски одно из чисел так, что все оставшиеся числа являются составными. Как он это делает?

8.1.19. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.8*) По кругу стоят 73 ребёнка. Злой Дед Мороз обходит круг по часовой стрелке и раздаёт конфеты. Вначале он выдал первому ребёнку одну конфету, затем 1 ребёнка пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 2 детей пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 3 детей пропустил и так далее.

Раздав 2020 конфет, он ушёл. Сколько детей так и не получили конфеты?

8.1.20. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.8*) По кругу сидят 10 или 11 человек так, что расстояния между любыми двумя соседями одинаковое. Затем эти люди пересели так, что расстояние по часовой стрелке между любыми двумя людьми изменилось, а расстояние между соседями по-прежнему оказалось одинаковым. Сколько человек сидело по кругу?

8.2 Взвешивания

Дополнительные задачи — в листке Взвешивания.

8.2.1. (*«Бельчонок», 2022, 9.5*) Бельчонок собрал в лесу 15 орехов весом 50, 51, ..., 64 граммов. Ему известен вес каждого из орехов. С помощью чашечных весов бельчонок пытается доказать своим друзьям, что первый орех весит 50 г., второй — 51 г., третий — 52 г. и т. д. (вначале друзья ничего не знают про веса орехов). Какое наименьшее количество гирь потребуется бельчонку, если и гири, и орехи можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний неограниченно? (Веса гирь известны как бельчонку, так и друзьям. В наличии неограниченный запас гирь весом 1, 2, ..., 1000 г.)

8.3 Таблицы

Дополнительные задачи — в листке Числовые таблицы.

8.3.1. (*«Росатом», 2022, 9.1*) Каждое из чисел 1, 2, ..., 39 встречается в квадратной табличке 39×39 ровно 39 раз. Сумма всех чисел, расположенных выше диагонали таблицы, в 3 раза больше суммы чисел, находящихся под ней. Найти сумму чисел на диагонали.

8.3.2. (*«Бельчонок», 2021, 9.2*) На доске нарисована прямоугольная таблица 5×8, в клетки которой Вася хочет расставить числа 3 и 1 так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке сумма чисел делилась на 7. Удастся ли ему это сделать?

8.3.3. (*Олимпиада КФУ, 2022, 9.3*) В каждую клетку таблицы 21×22 вписано число 1 или -1. Под каждым столбцом записано произведение всех чисел столбца, а рядом с каждой строкой — произведение чисел строки. Какое наименьшее неотрицательное значение может принимать сумма всех этих произведений?

8.3.4. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.4*) На доске нарисована пустая таблица 3×51. Маша хочет заполнить её клетки числами, руководствуясь следующими правилами:

- каждое из чисел 1, 2, 3, ..., 153 должно присутствовать в таблице;
- в левой нижней клетке таблицы должно стоять число 1;
- для любого натурального $a \leqslant 152$ числа a и $a+1$ должны стоять в соседних по стороне клетках.

1. Какое наибольшее число может стоять в клетке, соседней по стороне с числом 1?
2. Назовём клетку таблицы *хорошей*, если в ней может оказаться число 153. Сколько всего хороших клеток?

8.3.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 9.4*) Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце — нечетное количество крестиков.

а) Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов?

б) Можно ли в таблице 16×16 расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?

8.3.6. (*«Курчатов», 2022, 9.4*) В каждую клетку таблицы 7×7 вписали одно из пяти целых чисел: -2, -1, 0, 1, 2 так, что сумма чисел во всей таблице равна 0. Докажите, что найдется квадрат 3×3, в котором модуль суммы всех девяти чисел не превосходит 6.

8.3.7. (*«Бельчонок», 2022, 9.5*) Таблица 7×7 заполняется целыми ненулевыми числами. Сначала по рамке таблицы расставляются отрицательные числа. Дальше клетки заполняются в произвольном порядке, и очередное число равно произведению поставленных ранее чисел, ближайших к нему по строке или ближайших к нему по столбцу. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть в таблице?

8.3.8. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.6*) Дана белая клетчатая таблица 8×8. В ней 20 клеток покрасили в чёрный цвет. Какое наименьшее количество пар соседних по стороне белых клеток могло остаться?

8.3.9. (*«Шаг в будущее», 2022, 9.6*) В квадрате 6×6 расставили цифры так, что в верхней строке и левом столбце нет нулей. Всего получилось 12 шестизначных чисел: 6 из горизонтальных строк квадрата (слева-направо) и 6 из вертикальных столбцов квадрата (сверху-вниз). Коля, Вадим и Костя запомнили их, но оказалось, что каждый пропустил одно из 12 чисел. Коля заметил, что каждое из его одиннадцати чисел, делится на 11, Вадим обнаружил, что все его одиннадцать чисел делятся на 7, а Костя нашел у своих одиннадцати чисел общий делитель 13. Исходный квадрат они потеряли, а числа забыли, но им показалось, что где-то среди 12 чисел была комбинация цифр подряд 2021. Могло ли такое быть? Ответ обоснуйте.

8.3.10. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 9.5*) В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки, причём ни одна из них не находится в углу. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?

8.3.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 9.6*) Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8?

8.3.12. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.7*) В таблице 8×8 какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали или вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

8.3.13. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 8–9.7*) На белом клетчатом листе бумаги нарисовали прямоугольник со сторонами 20 и 19 клеток. В каждую клетку вписали натуральное число. Клетка красится в зелёный цвет, если среди соседних с ней по углу или стороне клеток не больше одной клетки с таким же или большим значением. Какое наибольшее число зелёных клеток могло получиться в таблице?

8.3.14. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.8*) В таблице 8×12 некоторые N клеток — чёрные, а остальные — белые. За одну операцию разрешается покрасить три клетки, образующие трёхклеточный уголок, в белый цвет (некоторые из них ещё до перекрашивания могли быть белыми). Оказалось, что таблицу невозможно сделать полностью белой менее чем за 25 таких операций. Найдите наименьшее возможное значение N.

8.3.15. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.8*) Можно ли в прямоугольной таблице 6×8 расставить натуральные числа от 1 до 48 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?

8.4 Турниры

Дополнительные задачи — в листке Турниры.

8.4.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 9.7*) В школьном шахматном турнире участвовали 4 человека: Андрей, Ваня, Дима и Саша. Каждый сыграл дважды с каждым своим соперником. В каждой игре за победу давалось 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

Известно, что по окончании турнира

- все ребята набрали разное количество очков;
- Андрей занял первое место, Дима — второе, Ваня — третье, Саша — четвёртое;
- Андрей одержал столько же побед, сколько и Саша.

Сколько очков набрал каждый из ребят?

8.4.2. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.1*) В бесконечном турнире по волейболу участвуют 65 команд. Каждое утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Каждый день 64 команды разбиваются на пары и играют по одному матчу, одна команда отдыхает. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что организатор может так составлять расписания, что рано или поздно обязательно появится команда, выигравшая семь матчей подряд.

8.4.3. (*«Бельчонок», 2022, 9.2*) Девять бельчат соревновались в беге на 50 метров, у всех были разные результаты. Потом их разбили на три группы по 3 бельчонка. Первая и вторая группы соревновались между собой по таким правилам: какой-нибудь бельчонок из первой группы бежал с каким-нибудь бельчонком из второй группы. Потом другой бельчонок из первой группы бежал с другим бельчонком из второй группы. И наконец, соревновались оставшиеся бельчата из первой и второй групп. У какой группы больше побед из трёх забегов, та и выиграла. Затем так же соревновались вторая и третья группы, потом первая и третья. Все бельчата бежали с той же скоростью, как в начале, когда соревновались все вместе. Могло ли быть так, что первая группа выиграла у второй, вторая у третьей, третья у первой? Если нет — докажите; если да — покажите, как это могло быть.

8.4.4. (*Всеросс., 2020, МЭ, 9.5*) В шахматном турнире в один круг участвовало два мальчика и несколько девочек. Мальчики набрали на двоих 8 очков, в то время как все девочки набрали очков поровну. Сколько девочек могло участвовать в турнире? (Победа — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0 очков.)

8.4.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 8–9.6*) По регламенту шахматного турнира каждый участник должен сыграть с каждым один раз. После того как было сыграно ровно 99 партий, оказалось, что множество участников турнира можно разбить на две неравные по численности группы так, что все соперники, относящиеся к одной и той же группе, уже сыграли партии между собой. При этом были сыграны, но не более четырех, партии между соперниками, которые относятся к разным группам. Каково наибольшее возможное число участников этого шахматного турнира?

8.4.6. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.8*) На рыцарском турнире каждый рыцарь подарил каждой своей знакомой даме столько цветов, сколько у неё знакомых рыцарей, кроме него. После этого каждый два рыцаря устроили столько поединков, сколько у них общих знакомых дам. Чего было больше: подаренных цветов или устроенных поединков и во сколько раз?

8.5 Игры и стратегии

Дополнительные задачи — в листке Игры и стратегии.

8.5.1. (*«Бельчонок», 2020, 9.1*) Перед двумя бельчатами, которых зовут Рыжик и Дымок, две кучи орехов, в одной 47 орехов, в другой 74 ореха. Рыжик может взять себе любую кучу орехов, а другую кучу поделить на две части. Потом то же самое сделает Дымок с кучами, которые образовались. И дальше они по очереди берут себе одну кучу, а вторую делят на две части. Выигрывает тот, кто сделает это последним. Кто из них может выиграть при любых ходах другого, и как ему надо действовать?

8.5.2. (*«Бельчонок», 2020, 9.1*) В тетради написаны буквы русского и английского алфавитов, всего вместе 59 букв. Артём и Надя по очереди вычеркивают буквы, причём за раз можно вычеркнуть или 1, или 2, или 8, или 9 букв. Тот, кто не сможет сделать ход, проигрывает. Начинает Артём. Кто из них может выиграть при любых ходах другого, и как ему надо вычеркивать буквы?

8.5.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 9.2*) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 — 1539 — 9756 — 6561... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

8.5.4. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.3*) На доске написано число 2017. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8.5.5. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2023, 9.5*) Алиса и Боря по очереди зачёркивают буквы в надписи «Покори Воробьевы горы». За ход разрешается зачеркнуть одну букву или несколько одинаковых букв (большие и маленькие буквы не различаются). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Алиса ходит первой. Есть ли у одного из игроков стратегия, гарантированно позволяющая выиграть?

8.5.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 9.5*) Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из двух колод: такую же, как у первого, или состоящую только из синих карт. Какая из этих колод даст второму игроку бóльшую вероятность выигрыша?

8.5.7. (*Открытая олимпиада, 2023, 9.7*) Клетчатая доска 9×9 вся заполнена фишками. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно выбрать горизонталь или вертикаль, на которой ещё остались фишки, и снять оттуда все оставшиеся фишки. Выигрывает игрок, после хода которого доска опустеет. Первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

8.5.8. (*«Ломоносов», 2021, 9.7*) На числовой прямой отмечены 200 точек, имеющие координаты $1, 2, \ldots, 200$. Двое игроков по очереди ставят в любую из еще незанятых точек число «0» или число «1». Когда все возможные ходы сделаны, рассматриваются 199 отрезков $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $\ldots$, $[199;200]$ и подсчитываются баллы за каждый отрезок: если концы отрезка содержат одинаковые числа, то 1 балл получает первый игрок, если разные — то второй.

а) Кто из игроков может обеспечить себе бóльшую сумму баллов независимо от ходов соперника?

б) С каким максимальным преимуществом одного из игроков может закончиться эта игра (при условии, что каждый игрок играет наилучшим для себя образом)?

8.5.9. (*Открытая олимпиада, 2022, 9.8*) 32 волейбольных команды участвуют в турнире по следующей схеме. В каждом туре все оставшиеся команды разбиваются на пары случайным образом; если команд нечётное число, одна из команд пропускает этот тур. В каждой паре одна из команд побеждает, а другая проигрывает, ничьих в волейболе не бывает. После трёх поражений команды выбывает из турнира. Когда выбыли все команды кроме одной, эта команда объявляется победителем и турнир заканчивается.

Какое наименьшее количество туров может продолжаться турнир?

8.5.10. (*«Ломоносов», 2020, 9.8*) Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, …, 7, 8, 7, 6, …, 2, 1. За столом сидят 16 игроеов, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1?

8.6 Шахматные доски и фигуры

8.6.1. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.3*) Шахматная фигура *четырёхлинейка* бьёт две вертикали и две горизонтали, соседние с клеткой, на которой она стоит. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четырёхлинеек можно поставить на доске 10×10?

8.6.2. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.3*) На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей? Что изменится, если 64-клеточную доску заменить на 100-клеточную?

8.6.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.6*) У Бори и Гоши есть шахматная доска размером 10×10 и по набору из одинакового числа плиток. У Бори все плитки имеют размеры 1×3, а у Гоши некоторые плитки размеров 1×3, а остальные — 1×4. Ребята выкладывают свои плитки так, чтобы они не выступали за края доски, чтобы края плиток проходили по линиям клеток и чтобы никакие две плитки не касались друг друга (даже углами). Боре удалось выложить все свои плитки указанным способом. Докажите, что, убрав плитки Бори, Гоша тоже сможет уложить свои плитки, не нарушив правила.

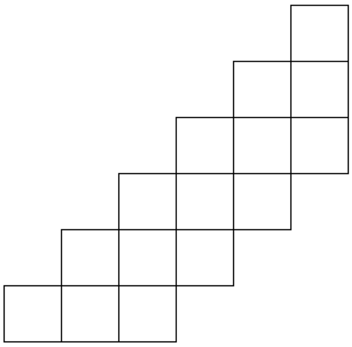
Глава 9

Рассуждения и методы

9.1 Оценка плюс пример

Дополнительные задачи — в листке Оценка плюс пример.

9.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.1*) Фигуру, изображённую на рисунке, разрезали на одноклеточные квадраты и прямоугольники 1×2. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×2 при этом могло получиться?



9.1.2. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.1*) В магазине продаётся 20 товаров, стоимости которых — различные натуральные числа от 1 до 20 рублей. Магазин решил устроить акцию: при покупке любых 5 товаров один из них выдаётся в подарок, причём покупатель сам выбирает, какой товар получит бесплатно. Влад хочет купить все 20 товаров в этом магазине, заплатив как можно меньше. Сколько рублей ему понадобится? (Каждый из 20 товаров продаётся в 1 экземпляре.)

9.1.3. (*Всесиб., 2019, 9.1*) Найти максимальное количество последовательных трёхзначных чисел, в записи каждого из которых есть хотя бы одна нечётная цифра.

9.1.4. (*Всесиб., 2018, 9.1*) На какое максимальное число различных прямоугольников можно разрезать шахматную доску 8 на 8 клеток? Все разрезы должны проходить только по линиям сетки. Прямоугольники различны, если они не равны как геометрические фигуры.

9.1.5. (*Всеросс., 2021, РЭ, 9.6*) Десятизначные натуральные числа a, b, c таковы, что $a + b = c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечётными?

9.1.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 9.1*) Какое максимальное количество чисел можно выбрать из множества $\{1, 2, \dots, 12\}$, чтобы произведение никаких трёх выбранных чисел не равнялось точному кубу?

9.1.7. (*«Бельчонок», 2021, 9.1*) Множество чисел от 1 до 20 разбили на 10 подмножеств, состоящих из двух чисел. После этого в каждом подмножестве нашли суммы чисел S_1, S_2, ..., S_{10}. Какое наибольшее количество чисел из S_1, S_2, ..., S_{10} может быть кратно 11?

9.1.8. (*Всеросс., 2021, МЭ, 9.2*) В течение первого полугодия лентяй Паша заставлял себя решать задачи по математике. Каждый день он решал не более 10 задач, а если в какой-нибудь день он решал больше 7 задач, то следующие два дня он решал не более 5 задач в день. Какое наибольшее количество задач Паша мог решить за 7 подряд идущих дней?

9.1.9. (*Всеросс., 2022, РЭ, 9.2*) На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число N. Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел?

9.1.10. (*Всеросс., 2020, РЭ, 9.2*) На доске написаны n различных целых чисел, любые два из них отличаются хотя бы на 10. Сумма квадратов трёх наибольших из них меньше трёх миллионов. Сумма квадратов трёх наименьших из них также меньше трёх миллионов. При каком наибольшем n это возможно?

9.1.11. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.2*) На окружности отмечены 10 точек. Любые три из них образуют три вписанных угла. Петя посчитал количество различных значений, которые принимают эти углы. Какое наибольшее число могло у него получиться?

9.1.12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 9.2*) В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть «перекрёстком». Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрёстками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?

9.1.13. (*Всеросс., 2020, МЭ, 9.3*) Число 2019 представили в виде суммы различных нечётных натуральных чисел. Каково наибольшее возможное количество слагаемых?

9.1.14. (*САММАТ, 2021, 9.10*) На планете X21KL9 2021 страна, и для любой их четверки хотя бы одна страна из этой четверки враждует с тремя другими. Найти наименьшее возможной количество стран, которые враждуют со всеми странами сразу.

9.1.15. (*«Бельчонок», 2019, 9.3*) На некоторые клетки доски размером 12×12 поставили по одной фишке так, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали стоит четное число фишек (может стоять 0 фишек). Угловые клетки также считаются диагоналями, состоящими из одной клетки. Каково наибольшее возможное число фишек на доске?

9.1.16. (*«Бельчонок», 2019, 9.3*) На некоторые клетки доски размером 10×10 поставили по одной фишке так, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали стоит четное число фишек (может стоять 0 фишек). Угловые клетки также считаются диагоналями, состоящими из одной клетки. Каково наибольшее возможное число фишек на доске?

9.1.17. (*«Бельчонок», 2019, 9.3*) На некоторые клетки доски размером 8×8 поставили по одной фишке так, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали стоит четное число фишек (может стоять 0 фишек). Угловые клетки также считаются диагоналями, состоящими из одной клетки. Каково наименьшее возможное число клеток без фишек на доске?

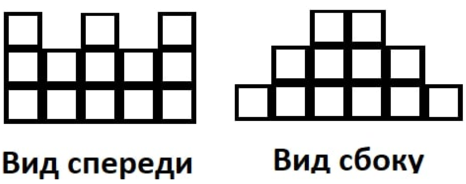
9.1.18. (*Олимпиада КФУ, 2019, 9.3*) Даны n различных положительных чисел. Из них составляются всевозможные суммы с числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое наименьшее количество различных значений сумм можно получить?

б) Какое наибольшее количество различных значений сумм можно получить?

9.1.19. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 9.4*) В клетчатом квадрате $n \times n$ каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем n всегда (т. е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

9.1.20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 9.4*) Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?



9.1.21. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.5*) На плоскости расположены четыре различных окружности. Назовем точкой пересечения точку, в которой пересекаются не менее двух окружностей. Найдите наибольшее возможное число точек пересечения четырех окружностей.

9.1.22. (*«Надежда энергетики», 2015, 9.5*) В городе работают три банка. Известно, что вклад, размещенный в одном из них (неизвестно в каком), через год удвоится, в другом (тоже неизвестно, в каком) — утроится, а один из банков (неизвестно, какой из трех) разорится, и вкладчик потеряет свои деньги. У Ивана Ивановича есть 600000 рублей. Он хочет рискнуть и разместить свои деньги в банках на год. Как ему разложить деньги по банкам, чтобы при самом плохом ходе событий получить максимально возможный доход (некоторую сумму он может оставить и дома)? Какую сумму в этом случае он получит на руки через год?

9.1.23. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 9.5*) Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке.

а) Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек?

б) Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

9.1.24. (*«Бельчонок», 2020, 9.5*) Коля поставил внутри выпуклого 24-угольника несколько точек, и соединил их непересекающимися отрезками между собой и с вершинами многоугольника. В результате многоугольник разбился на треугольники. Какое наименьшее число точек надо поставить, чтобы число треугольников превысило 50?

9.1.25. (*«Бельчонок», 2018, 9.5*) На полосе из 100 клеток, пронумерованных натуральными числами от 1 до 100, лежат орехи (по одному в каждой клетке). Бельчата Вася и Коля выбрали себе одинаковое количество орехов так, что если орех из клетки с номером n есть у Васи, то у Коли есть орех из клетки с номером $2n+2$. Какое максимальное количество орехов могло быть у обоих бельчат?

9.1.26. (*«Бельчонок», 2018, 9.5*) На полосе из 120 клеток, пронумерованных натуральными числами от 1 до 120, лежат орехи (по одному в каждой клетке). Бельчата Вася и Коля выбрали себе одинаковое количество орехов так, что если орех из клетки с номером n есть у Васи, то у Коли есть орех из клетки с номером $2n+2$. Какое максимальное количество орехов могло быть у обоих бельчат?

9.1.27. (*«Ломоносов», 2020, 9.5*) Вовочка складывает числа в столбик следующим образом: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр в одинаковых разрядах пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, для суммы $248 + 208$ он получил бы значение 4416. Найдите наименьшую возможную разность между ответом Вовочки и верным ответом.

9.1.28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.5*) Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5 м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

9.1.29. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.5*) В ряд по вертикали по возрастанию выписаны числа от 1 до 101. Между ними вставляют дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например,
$\dfrac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{3}} = \frac{15}{4}$.

Какое наибольшее значение может иметь полученная дробь?

9.1.30. (*Всесиб., 2018, 9.5*) Какое наибольшее количество целых чисел можно записать в ряд так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих из них была больше нуля, а сумма любых семи подряд идущих из них была меньше нуля?

9.1.31. (*«Шаг в будущее», 2023, 9.6*) На складе находятся товары общей массой 1300 тонн, которые размещены в различные контейнеры. Вес каждого такого контейнера не более 10 тонн. Эти контейнеры грузят в железнодорожные вагоны, вместимость которых не более 60 тонн. Для вывоза товара со склада необходимо сформировать железнодорожный поезд. Какое наименьшее количество вагонов должно быть в этом поезде, чтобы гарантированно вывезти весь товар со склада за один раз? (Размеры контейнеров не учитывать.)

9.1.32. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 9.6*) При каком наибольшем n множество $\{2, 3, 4, \ldots, n\}$ можно так покрасить в синий и красный цвета, чтобы произведение двух любых (в том числе одинаковых) чисел одного цвета имело другой цвет?

9.1.33. (*Всеросс., 2023, МЭ, 9.7*) Перед сладкоежкой лежат пять коробок с конфетами: в первой коробке 11 конфет, во второй — 22 конфеты, в третьей — 33 конфеты, в четвёртой — 44 конфеты, в пятой — 55 конфет. За один ход сладкоежка может взять из одной коробки четыре конфеты и разложить их по одной конфете в оставшиеся четыре коробки.

В любой момент сладкоежка может забрать конфеты из любой коробки и уйти. Какое наибольшее количество конфет он сможет забрать?

9.1.34. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.7*) На доску выписаны числа 1, 2, 3, …, 57. Какое наибольшее количество чисел среди них можно выбрать так, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ровно в 2,5 раза?

9.1.35. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.8*) На плоскости отмечено 36 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары отмеченных точек соединены отрезком так, что из каждой отмеченной точки выходит не более 3 отрезков.

Какое наибольшее количество различных замкнутых 4-звенных ломаных может получиться?

Вершинами ломаной могут быть только отмеченные точки, а звеньями — только проведённые отрезки. Неважно, где у ломаной начало и как она ориентирована: например, если для некоторых 4 отмеченных точек A, B, C, D проведены отрезки AB, BC, CD, DA, то $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $BADC$, $CBAD$, $DCBA$ — это одна и та же ломаная.

9.1.36. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 8–9.8*) Найдите наименьшее натуральное число n такое, что существуют различные натуральные числа x_1, x_2, x_3, …, x_n такие, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{118}{2023}.$$

9.2 Логические задачи

Дополнительные задачи — в листке Логические задачи.

9.2.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.3*) К 30 пальмам в разных частях необитаемого острова прибито по табличке.

- На 15 из них написано: «Ровно под 15 табличками зарыт клад».
- На 8 из них написано: «Ровно под 8 табличками зарыт клад».
- На 4 из них написано: «Ровно под 4 табличками зарыт клад».

- На 3 из них написано: «Ровно под 3 табличками зарыт клад».

Известно, что правдивы только те таблички, под которыми клада нет.

Под каким наименьшим количеством табличек может быть зарыт клад?

9.2.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 8–9.1*) Пять карточек лежат на столе, как показано на рисунке.

На каждой из карточек на одной стороне написано некоторая буква, а на другой стороне — натуральное число. Петр сказал: «Если на одной стороне карты написана гласная буква, то на другой стороне этой карты написано четное число». Перевернув одну карту, Катя показала, что Петр ошибается. Какую карту перевернула Катя?

9.2.3. (*«Надежда энергетики», 2020, 9.1*) Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух — Александра Варфоломеевна или Петр Петрович — сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других — Ивана Ильича и Марьи Ивановны — сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

9.2.4. (*Всеросс., 2022, МЭ, 9.2*) В четырёх классах школы учится более 70 детей, все они пришли на собрание параллели (других детей на собрании не было).

Каждую пришедшую девочку спросили: «Сколько пришло человек из твоего класса, включая тебя?»

Каждого пришедшего мальчика спросили: «Сколько пришло мальчиков из твоего класса, включая тебя?»

Среди ответов встретились числа 7, 9, 10, 12, 15, 16, 19 и 21 (все дети ответили верно).

- Сколько детей учится в самом большом классе параллели?

- Сколько девочек пришло на собрание параллели?

9.2.5. (*«Бельчонок», 2021, 9.2*) Бельчата из трёх разных лесов собрались на встречу. После встречи бельчонок из хвойного леса сказал: «Теперь я знаю в два раза больше бельчат, чем вчера». Бельчонок из лиственного леса сказал: «Теперь я знаю в три раза больше бельчат, чем вчера». Бельчонок из елового леса сказал: «Теперь я знаю в четыре раза больше бельчат, чем вчера». Докажите, что кто-то из бельчат обсчитался. Предполагается, что до встречи каждый бельчонок знал бельчат только из своего леса, а после — из всех трёх лесов.

9.2.6. (*«Надежда энергетики», 2022, 9.3*) Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали Торопыжка, Пончик и Сиропчик. Незнайка опросил свидетелей и установил следующее.

- Если Пончик ел корм, то Сиропчик не ел его.

- Свидетельства о том, что Пончик не ел и что Торопыжка не ел корм не могут быть истинными одновременно.
- Если Сиропчик не ел корм, то Пончик не ел его, а Торопыжка ел.

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить или оправдать в поедании ночью целого куля собачьего корма?

9.2.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 9.4*) На одной конференции встретились известный ученый Франсуа и трое его не менее известных друзей: Карл, Рене и Леонард.

Франсуа, помимо своих научных достижений, известен ещё и тем, что является отцом нескольких детей, которые все родились в разные годы, но все в одну и ту же дату. Друзья поинтересовались, сколько лет каждому из детей, на что Франсуа дал им задачку. «Произведение возрастов моих детей, — сказал он, — как раз равно сумме дня и месяца их рождения. Сейчас я сообщу Карлу количество моих детей, Рене — месяц рождения, а Леонарду — день рождения, и попробуйте угадать, сколько им лет». После этого он шепнул на ухо друзьям указанную информацию.

Немного подумав, Карл воскликнул, что он точно знает возраст двоих детей Франсуа. «Ну тогда мы все понимаем, сколько детей, и сколько лет двум из них. Но я всё ещё не могу понять возраст остальных», — ответил Леонард. Рене тут же заметил: «А вот мне известен возраст всех детей, кроме самого старшего». После этого Леонард заключил, что теперь ему и, следовательно, всем троим точно известны возрасты всех детей. Сколько же у Франсуа детей и сколько лет каждому из них?

9.2.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 8–9.7*) В некоторой компании ни у каких двух сотрудников нет работы одинаковой сложности, и никакие двое не получают одинаковую зарплату. 1 апреля каждый сотрудник сделал два утверждения:

(а) Не найдется 12 сотрудников с более сложной работой.

(б) По меньшей мере 30 сотрудников имеют большую зарплату.

Сколько сотрудников в компании, если часть сотрудников дважды сказали правду, а остальные дважды солгали?

9.3 Рыцари и лжецы

Дополнительные задачи — в листках

- Рыцари и лжецы. Рассуждения
- Рыцари и лжецы. Уравнения

9.3.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 9.5*) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 80 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 80 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из двух фраз:

- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки больше моего».
- «Среди собравшихся хотя бы у 5 лжецов номер футболки меньше моего».

Какое наименьшее количество рыцарей могло быть среди этих 80 жителей?

9.3.2. (*«Бельчонок», 2023, 9.1*) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 28 жителей. Двое из них сказали: «Ровно двое из всех разбойники», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из всех разбойники», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из всех разбойники», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?

9.3.3. (*«Бельчонок», 2023, 9.1*) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 19 жителей. Трое из них сказали: «Ровно трое из всех разбойники», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из всех разбойники», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?

9.3.4. (*Всесиб., 2016, 9.2*) На острове проживают 20 человек, часть из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый островитянин точно знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец. На вопрос приезжего, сколько рыцарей проживают на острове, первый из островитян ответил: «Ни одного», второй: «Не более одного», третий: «Не более двух», четвёртый: «Не более трёх» и т. д., двадцатый заявил: «Не более девятнадцати». Так сколько же рыцарей проживают на острове?

9.3.5. (*«Курчатов», 2022, 9.2*) За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из сидящих за столом произнес фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

9.3.6. (*«Шаг в будущее», 2017, 9.6*) Сказочное государство расположено на трёх островах: A, B и C. Всего в государстве проживает 100 человек, причём каждый из них живёт на одном из этих островов. Все жители государства — либо рыцари, которые всегда говорят только правду, либо лжецы, которые всегда лгут. На вопрос «Вы проживаете на острове A?» ответили «да» 55 жителей государства; на вопрос «Вы проживаете на острове B?» ответили «да» 38 жителей государства; а на вопрос «Вы проживаете на острове C?» ответили «да» 49 жителей государства. На следующий день на острове A прошёл «очищающий» дождь, после чего все лжецы острова A стали говорить правду (рыцари остались рыцарями, на других островах очищающий дождь не проходил). После этого всем жителям государства был задан вопрос «Вы проживаете на острове B?», на который «да» ответили 27 жителей государства. Если бы «очищающий дождь» прошёл не на острове A, а на острове C, то на вопрос «Вы проживаете на острове B?» ответили бы «да» 29 человек. Сколько лжецов проживают на острове B?

9.3.7. (*«Шаг в будущее», 2016, 9.7*) В городе Математинске проживают только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Город разделён на четыре округа: Северный, Западный, Южный и Восточный. На вопрос: «Вы живёте в Северном округе?» ответили «да» 610 человек, на вопрос: «Вы живёте в Западном округе?» сказали «да» 680 человек, на вопрос: «Вы живёте в Южном округе?» ответили «да» 690 человек, а на вопрос: «Вы живёте в Восточном округе?» сказали «да» 600 человек. На следующий день в Южном и Восточном округах проходил карнавал: лжецы переоделись в рыцарей и стали говорить правду, а рыцари переоделись в лжецов и стали лгать (в Северном и Западном округах в этот день карнавал не проводился). В результате на вопрос «Вы живёте в Северном округе?» в этот день ответили «да» 620 человек.

1. Сколько лжецов проживает в Математинске?

2. Сколько всего жителей в Математинске?

9.4 От противного

Дополнительные задачи — в листке Доказательство от противного.

9.4.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 9.3*) В 9а классе 30 человек, из них 22 посещают кружок французского языка, 21 — кружок немецкого языка и 18 — кружок китайского языка. Докажите, что в классе есть ученик, посещающий все три кружка.

9.4.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 9.4*) Дан неравносторонний треугольник, у которого длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что в этом треугольнике есть два угла, меньшие 60°.

9.4.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 9.5*) Дан выпуклый 37-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов. Докажите, что среди углов имеются хотя бы три одинаковых.

9.5 Принцип крайнего

Дополнительные задачи — в листке Принцип крайнего.

9.5.1. (*Всесиб., 2023, 9.1*) Конечное множество различных действительных чисел X назовём *хорошим*, если каждое число из X можно представить в виде суммы двух других различных чисел из X. Какое минимальное количество чисел может содержать хорошее множество X?

9.5.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 8–9.2*) Натуральное число n является произведением $2k+1$ простых чисел p_1, p_2, ..., p_{2k+1} в некоторых степенях, больших нуля. Может ли $\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \ldots - \frac{n}{p_{2k}} + \frac{n}{p_{2k+1}} = 0$?

9.5.3. (*«Росатом», 2020, 9.2*) На окружности отмечены 18 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно единице. Найти их сумму.

9.5.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 9.5*) Дан неравносторонний треугольник со сторонами a, b, c. Если существует треугольник со сторонами $a+b-c$, $b+c-a$, $a+c-b$, то рассматривают этот новый треугольник и с ним проделывают ту же процедуру (и т. д.), в противном случае процесс заканчивается.

а) Может ли в этом процессе встретиться треугольник, подобный исходному?

б) Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

9.5.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 9.5*) На плоскости расположено 100 прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Каждый пересекается хотя бы с 90 другими. Докажите, что найдётся прямоугольник, пересекающийся со всеми.

9.5.6. (*Открытая олимпиада, 2018, 9.7*) На плоскости дан набор точек. Известно, что любые три можно параллельным переносом переместить в квадрат с вершинами $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ и $(-2, 0)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все. Докажите.

Глава 10

Разное

10.1 Да или нет?

Дополнительные задачи — в листке Да или нет?.

10.1.1. (*«Курчатов», 2020, 9.1*) Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

10.1.2. (*«Бельчонок», 2019, 9.1*) В строку записали 10 чисел. Сумма любых трех подряд идущих чисел положительна. Может ли сумма всех 10 чисел быть отрицательной?

10.1.3. (*«Бельчонок», 2019, 9.1*) В строку записали 9 чисел. Сумма любых четырех подряд идущих чисел отрицательна. Может ли сумма всех 9 чисел быть положительной?

10.1.4. (*«Бельчонок», 2019, 9.1*) Костя играет в настольную игру, ему надо пройти 11 пунктов. При прохождении каждого пункта к его сумме баллов прибавляется какое-нибудь число, положительное, отрицательное, или 0. Костя заметил, что сумма чисел, полученная при прохождении любых четырех пунктов подряд, отрицательна. Может ли сумма всех 11 чисел быть положительной?

10.1.5. (*Олимпиада КФУ, 2021, 9.1*) У Миши есть 32 блока-кирпичика размером $2\times3\times3$. Сможет ли он уложить их в коробку в форме прямоугольного параллелепипеда размерами $8\times8\times9$? Должны быть использованы все кубики, наружу из коробки ничего не должно выдаваться. Обоснуйте свой ответ.

10.1.6. (*«Росатом», 2019, 9.1*) В норе лисы проделаны ходы-туннели в форме сторон квадрата и его диагоналей. Лиса движется по ним не оборачиваясь, с постоянной скоростью, пробегая сторону квадрата за 6 сек. Фокстерьер, проникнув в нору, может двигаться по ней со скоростью на 20% большей, чем лиса и по ходу движения может видеть весь прямолинейный участок туннеля, в котором находится. Менять направление движения и останавливаться каждый из них может мгновенно, но только в вершинах квадрата или его центре. Существует ли стратегия передвижения собаки по туннелям, при которой она всегда догонит лису, независимо от того как та будет двигаться по норе? Оценить время погони. Задача математическая, поэтому лиса и собака — точки, ходы — отрезки прямых.

10.1.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 9.1*) Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

10.1.8. (*Всеросс., 2022, РЭ, 9.1*) Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

10.1.9. (*Всеросс., 2020, РЭ, 9.1*) Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было 1, 2, …, 10 конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечётной минуте он выбирает одну из куч и делит её на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой чётной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет?

10.1.10. (*«Надежда энергетики», 2017, 9.2*) На тепловой электростанции запас газа всегда остается положительным и ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $6 - x$ м^3. Может ли запас газа в какой-то месяц составить точный квадрат запаса в другом месяце? Если это возможно, то при каком значении запаса и в какие месяцы?

10.1.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 9.2*) Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?

10.1.12. (*Всеросс., 2023, РЭ, 9.2*) Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

10.1.13. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 9.4*) 25 учеников класса, среди которых n мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если

а) $n = 10$;

б) $n = 11$?

10.1.14. (*Олимпиада КФУ, 2020, 9.4*) Дан квадрат 7×7 (сторона клетки равна 1). *Клетчатой фигуркой* назовем многоугольник, составленный из клеток.

а) Можно ли его разбить на 12 клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы?

б) Можно ли его разбить на 13 клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы?

10.1.15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 9.5*) Можно ли так расставить знаки «$+$» и «$-$» на месте звездочек, так, чтобы получилось верное равенство $* \, 1^2 * 2^2 * \ldots * 2020^2 = 2020$?

10.1.16. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 9.5*) Имеется n гирек, каждая весит целое число граммов, а суммарный их вес равен 100 гр. Верно ли, что все гирьки всегда можно разложить на две чаши весов так, чтобы они уравновесились, если

а) $n = 50$;

б) $n = 51$?

10.1.17. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 8–9.5*) Даны два положительных целых числа a и b. Могут ли числа $a^2 + 2b$ и $b^2 + 2a$ одновременно быть квадратами целых чисел?

10.1.18. (*«Бельчонок», 2022, 9.5*) Можно ли отметить на клетчатой бумаге 5 точек пересечения линий сетки так, чтобы эти точки были вершинами равностороннего пятиугольника?

10.1.19. (*Открытая олимпиада, 2019, 9.6*) В каждой клетке квадрата 2019×2019 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки)?

10.1.20. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.6*) Существуют ли пять попарно различных целых чисел таких, что сумма любых четырех из них была бы квадратом натурального числа?

10.1.21. (*«Шаг в будущее», 2020, 9.6*) Существует ли натуральное число, квадрат которого равен сумме пяти попарно различных квадратов целых чисел, таких, что среди них есть число 7^2?

10.2 Ребусы

Дополнительные задачи — в листке Ребусы.

10.2.1. (*Открытая олимпиада, 2015, 9.2*) Решите ребус $TOK = KOT + KTO$. (Разные буквы обозначают разные цифры, числа не могут начинаться с нуля.)

10.3 Разбиения на пары и группы

Дополнительные задачи — в листке Разбиения на пары и группы.

10.3.1. (*Всесиб., 2017, 9.2*) За круглым столом расселись 15 мальчиков и 20 девочек. Оказалось, что количество пар сидящих рядом мальчиков в полтора раза меньше, чем количество пар сидящих рядом девочек. Найти количество пар мальчик — девочка, сидящих рядом.

10.3.2. (*Всесиб., 2020, 9.3*) Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 100 включительно на десять множеств, содержащих различное количество чисел каждое и таких, что, чем больше чисел содержит множество, тем меньше сумма его элементов?

10.3.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 9.5*) В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет — 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.

10.3.4. (*«Курчатов», 2020, 9.5*) При дворе служат 50 мушкетёров. Каждый день они разбиваются на пары и проводят тренировочные поединки. Верно ли, что спустя 24 дня найдутся три мушкетёра, которые не участвовали в тренировочных поединках друг с другом?