

Олимпиадная математика. 8 класс

Задачник 8.2023

Данное пособие содержит задачи для восьмиклассников, которые предлагались в последние годы на следующих олимпиадах:

1. [Всероссийская олимпиада школьников](#), школьный этап в Москве (2021–2023)
2. [Всероссийская олимпиада школьников](#), муниципальный этап в Москве (2020–2023)
3. [Олимпиада Эйлера](#) (РЭ и ЗЭ, 2020–2023)
4. [Московская математическая олимпиада](#) (2021–2023)
5. [Ломоносов](#) (2020–2023)
6. [Покори Воробьёвы горы!](#) (2020–2023)
7. [Высшая проба](#) (2021–2023)
8. [Курчатов](#) (2020–2023)
9. [Росатом](#) (2015–2023)
10. [Всесибирская олимпиада](#) (2015–2023)
11. [Формула Единства / Третье тысячелетие](#) (2015–2023)
12. [Открытая олимпиада](#) (2015–2023)
13. [Шаг в будущее](#) (2016–2023)
14. [САММАТ](#) (2021–2023)
15. [Будущие исследователи — будущее науки](#) (2015–2023)
16. [Бельчонок](#) (2018–2023)
17. [Олимпиада КФУ](#) (2022–2023)
18. [Надежда энергетики](#) (2015–2023)

Годы, являющиеся левой границей промежутка дат для каждой олимпиады, выбраны из следующих соображений.

- Более ранние задачи олимпиад, имеющих номера 1–8 в приведённом списке, можно найти в [олимпиадных листках](#) и в [Задачнике 8.2019](#). Кстати, многие пункты оглавления настоящего задачника дублируют названия указанных листков, и тогда раздел задачника начинается со ссылки на соответствующий листок.

- В остальных случаях нижняя граница определялась либо наличием соответствующих материалов на сайтах олимпиад, либо моими личными возможностями :-)

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее.

Распределение задач по темам зачастую сделано «на глаз»; в дальнейшем (по мере моего осмысления) некоторые задачи могут переместиться в другие темы. Актуальная версия задачника находится по адресу: <http://mathus.ru/math/8math2023.pdf>.

Оглавление

1	Начало	6
1.1	Примеры и конструкции	6
1.2	Да или нет?	6
1.3	Ребусы	11
2	Целые числа	13
2.1	Десятичная запись	13
2.2	Сумма цифр числа	15
2.3	Чётность	15
2.4	Делимость	16
2.5	Остатки и сравнения	18
2.6	НОД и НОК	20
2.7	Уравнения в целых числах	22
2.8	Задачи с целыми числами	23
3	Алгебра и анализ	26
3.1	Числовые неравенства	26
3.2	Алгебраические преобразования	27
3.3	Целочисленная теорема Безу	30
3.4	Суммирование	30
3.5	Целая и дробная части	31
3.6	Линейная функция	32
3.7	Исследование функций	32
3.8	Доказательство неравенств	32
3.9	Целочисленная оптимизация	34
3.10	Средние величины	34
3.11	Последовательности	35
4	Алгебраические уравнения и неравенства	36
4.1	Квадратные уравнения	36
4.2	Системы уравнений	38
4.3	Уравнения с модулем	40
4.4	Разные уравнения и неравенства	40
4.5	Минимаксные задачи	40
4.6	Плоские множества	41
5	Текстовые задачи	42
5.1	Движение	42
5.2	Работа	45
5.3	Стоимость	47
5.4	Проценты	47

5.5	Смеси и концентрации	49
5.6	Часы, время, календарь, возраст	49
5.7	Разные текстовые задачи	50
6	Задачи с параметрами	53
6.1	Линейные уравнения и неравенства с параметрами	53
6.2	Параметры и квадратный трёхчлен	53
6.3	Параметры и графики	55
6.4	Параметры и симметрия	57
7	Планиметрия	58
7.1	Построения	58
7.2	Прямоугольники и квадраты	59
7.3	Прямоугольный треугольник	60
7.4	Углы треугольника	61
7.5	Биссектрисы, медианы, высоты	64
7.6	Параллелограмм и средняя линия треугольника	65
7.7	Трапеция	67
7.8	Общие четырёхугольники	68
7.9	Площадь	70
7.10	Неравенство треугольника	73
7.11	Вписанные и описанные окружности	73
7.12	Многоугольники	73
7.13	Разные планиметрические задачи	75
7.14	Метод координат	78
8	Комбинаторика	79
8.1	Перебор вариантов	79
8.2	Правило произведения	80
8.3	Перестановки с повторениями	82
8.4	Сочетания	83
8.5	Функции делителей	84
8.6	Формула включений и исключений	85
8.7	Принцип Дирихле	85
8.8	Взаимно-однозначные соответствия	85
8.9	Знакомства	86
8.10	Графы	86
9	Алгоритмы, процессы, игры	88
9.1	Алгоритмы и операции	88
9.2	Таблицы	91
9.3	Взвешивания	93
9.4	Турниры	94
9.5	Игры и стратегии	95
9.6	Шахматные доски и фигуры	97
10	Рассуждения и методы	99
10.1	Логика	99
10.2	Рыцари и лжецы	101
10.3	Оценка плюс пример	104
10.4	От противного	109

10.5	Разбиение на пары и группы	110
10.6	Принцип крайнего	110
11	Комбинаторная геометрия	112
11.1	Разрезания	112
11.2	Геометрия на клетчатой бумаге	114

Глава 1

Начало

1.1 Примеры и конструкции

Дополнительные задачи — в листке [Примеры и конструкции](#).

1.1.1. (*Всеросс., 2021, МЭ, 8.1*) Представьте число 36 как произведение трёх целых множителей, сумма которых равна 4. Чему равен меньший из множителей?

1.1.2. (*Всесиб., 2023, 8.1*) Пять автобусов стоят в ряд друг за другом в пробке, причём в любых двух из них едет разное ненулевое число пассажиров. Назовём двух различных людей *сострадальцами*, если они едут либо в одном и том же автобусе, либо в соседних. Оказалось, что у каждого пассажира есть либо ровно 20, либо ровно 30 пострадальцев. Приведите пример, как такое может быть возможно.

1.1.3. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.1*) Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число.

1.1.4. (*Всесиб., 2015, 8.2*) Запишите в строку 20 чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, записанных подряд, была положительна, а сумма всех 20 чисел была отрицательна.

1.1.5. (*«Надежда энергетики», 2023, 8.5*) Представьте число $\frac{3}{7}$ в виде суммы нескольких различных обыкновенных дробей, числители которых равны единице.

1.1.6. (*Всесиб., 2020, 8.5*) Юра и Рома нашли 2019 натуральных чисел, идущих подряд, и возвели каждое из них в квадрат. После этого Юра забрал себе 1010 из 2019 получившихся квадратов, а Рома 1009 оставшихся. Оказалось, что сумма чисел, которые забрал Юра, равна сумме чисел, которые забрал себе Рома. Приведите пример чисел, которые могли найти Юра и Рома, и проверьте, что они подходят.

1.2 Да или нет?

Дополнительные задачи — в листке [Да или нет?](#).

1.2.1. (*Всесиб., 2018, 8.1*) Число называется *хорошим*, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 4. Вера написала некоторое хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные — на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?

1.2.2. (*Олимпиада КФУ, 2022, 8.1*) Три кота — Том, Тим и Там-Там — украли по сосиске и взвесили их. После взвешивания Том сказал: «Если бы моя сосиска была втрое тяжелее, то суммарный вес всех сосисок увеличился бы вдвое». Тим сказал: «То же самое можно сказать и про мою сосиску». А Там-Там подумал и сказал, что так быть не могло. Прав ли он? Обоснуйте свой ответ.

1.2.3. (*«Бельчонок», 2021, 8.1*) Существуют ли такие 5 чисел, сумма которых ровно в 10 раз больше суммы квадратов этих чисел?

1.2.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 8.1*) Существуют ли три различных цифры A, B, C , что $\overline{ABC}, \overline{CBA}, \overline{CAB}$ — квадраты натуральных чисел? (Черта над цифрами означает число, составленное из этих цифр в указанном порядке.)

1.2.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 8.1*) В клетках квадрата 5×5 стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 19?

1.2.6. (*«Курчатов», 2022, 8.1*) В 20 ящиков разложили 60 черных и 60 белых шариков — по 6 шариков в каждый. Ваня заметил, что в каждом из первых 14 ящиков черных шариков оказалось больше, чем белых. Верно ли, что среди последних 6 ящиков точно найдется такой, в котором все шарики белые?

1.2.7. (*«Высшая проба», 2023, 8.1*) В клетчатом квадрате 5×5 каждую клетку покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Справа от каждой строки записали суммарное количество синих и красных клеток в этой строчке, а под каждым столбцом записали суммарное количество синих и зелёных клеток в этом столбце.

Справа от таблицы оказались числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке. Могли ли и под таблицей оказаться числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке?

1.2.8. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 8.2*) а) Агент 007 хочет зашифровать свой номер с помощью двух натуральных чисел m и n так, чтобы $0,07 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Сможет ли он это сделать?

б) Сможет ли его коллега, агент 013, подобным образом зашифровать свой номер?

1.2.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 8.2*) Существуют ли три целых числа (среди которых могут быть одинаковые) такие, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится 100?

1.2.10. (*«Надежда энергетики», 2021, 8.2*) В Замедвежье 14 населенных пунктов, часть из которых — города, остальные — села. Диспетчер соединил их попарно семью вездеходными маршрутами (каждый маршрут связывает два пункта и не заходит в остальные). При этом оказалось, что ровно половина всех городов связана с селами.

Найдите количество городов, сел и маршрутов типа село-город (если возможны разные варианты, то найдите их все).

Можно ли так переделать сеть маршрутов, чтобы ровно половина сел была связана с городами?

(Из каждого пункта всегда выходит только один маршрут.)

1.2.11. (*САММАТ, 2021, 8.10*) Дядя Ваня решил в своем саду посадить в один ряд 10 деревьев — вишни и яблони. Сможет ли он посадить их так, чтобы между каждыми двумя вишнями оказалось четное число деревьев, а между каждыми двумя яблонями — нечетное число деревьев? Ответ объясните.

1.2.12. (*Всесиб., 2020, 8.2*) У Марка 2020 камней. Он собирается их разделить на 5 кучек так, чтобы не было двух кучек с одинаковым количеством камней. При этом Марк хочет, чтобы можно было бы любую кучку убрать, а все камни из неё разложить по оставшимся четырём кучкам так, чтобы во всех них стало равное число камней. Получится ли у Марка сделать задуманное?

1.2.13. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.2; «Бельчонок», 2022, 8.1*) Существует ли прямоугольный треугольник, площадь которого численно равна удвоенной гипотенузе?

1.2.14. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.1; «Бельчонок», 2022, 8.1*) Существует ли прямоугольный параллелепипед с целочисленными сторонами, у которого площадь поверхности численно равна объему?

1.2.15. (*«Бельчонок», 2022, 8.1*) Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а площадь его поверхности численно равна сумме длин всех его рёбер?

1.2.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 6.2, 7.3, 8.1*) Полина написала восемь последовательных натуральных чисел и обвела четыре из них чёрной ручкой, а четыре — красной. Может ли произведение красных чисел оказаться в 20 раз больше произведения чёрных?

1.2.17. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 8.2*) Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?

1.2.18. (*Олимпиада КФУ, 2023, 8.3*) Можно ли переменные a, b, c, d заменить на какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа в некотором порядке так, чтобы стало верным равенство

$$(a + b)(b + c)(c + d) = (c + a)(a + d)(d + b)?$$

1.2.19. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.3*) Можно ли на плоскости расположить четыре одинаковых прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была ровно одна общая вершина? (Прямоугольники могут накладываться друг на друга.)

1.2.20. (*Всесиб., 2016, 8.3*) На доске записаны натуральные числа от 1 до 15. Лера выбирает два числа и находит их произведение, а Лада получает оставшиеся тринадцать чисел и находит их сумму. Могут ли результаты девочек совпасть?

1.2.21. (*Всесиб., 2017, 8.3*) Клетки доски 4028×4028 покрашены в чёрный и белый цвет таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повернутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки обязательно покрашены в шахматном порядке?

1.2.22. (*«Шаг в будущее», 2017, 8.3*) Робот-уборщик движется с постоянной скоростью и запрограммирован так, что через каждые 15 секунд поворачивает на 90 градусов, а между поворотами движется по прямой линии. Можно ли ожидать появления робота в исходной точке через 6 минут?

1.2.23. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.3*) Можно ли разбить квадрат на 14 равновеликих треугольников, с общей вершиной O и остальными вершинами на границе квадрата?

1.2.24. (*Открытая олимпиада, 2016, 8.4*) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $5222\dots 2221$?

1.2.25. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.4*) В каждой клетке квадрата 2018×2018 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки)?

1.2.26. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 8.4, 9.1, 10.1, 11.1*) Натуральные числа a , b , c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

1.2.27. (*«Надежда энергетики», 2021, 8.4*) Дано N целых чисел. Произведение всех этих чисел равно 1. Может ли сумма их 21-ых степеней быть равной нулю? Выясните, при каких N такое возможно, а при каких нет и почему.

1.2.28. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 8.4*) Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: $1, 2, \dots, 25$. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

1.2.29. (*«Высшая проба», 2022, 8.4*) Назовём ход ладьи банальным, если она смещается на кратное трём число клеток. В противном случае назовём ход оригинальным. Может ли ладья обойти поле 9×9 , чередуя банальные и оригинальные ходы так, чтобы в каждой клетке ладья побывала ровно один раз?

1.2.30. («Шаг в будущее», 2019, 8.5) Про четыре натуральных числа a, b, c, d известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?

1.2.31. («Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 8.5) Можно ли клетчатый квадрат $n \times n$ (клеток) с вырезанной угловой клеткой разрезать на доминошки (прямоугольники 2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных доминошек было одинаковым, если

а) $n = 101$;

б) $n = 99$?

1.2.32. («Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 8.5) 25 учеников класса, среди которых n мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если

а) $n = 10$;

б) $n = 11$?

1.2.33. («Надежда энергетики», 2016, 8.5) Маша, готовясь принять гостей, разложила 13 апельсинов и 3 яблока в 4 вазы, по 4 фрукта в каждую. Затем ее сестра Саша решила изменить состав фруктов в вазах. Она забирала одновременно по одному фрукту из каждой вазы и заменяла каждый фрукт на противоположный: яблоко на апельсин, а апельсин — на яблоко. Или же она заменяла на противоположные все четыре фрукта из одной вазы. Могла ли Саша получить во всех 4 вазах одновременно одинаковые фрукты: только яблоки или только апельсины?

1.2.34. (Всесиб., 2015, 8.5) В некотором итальянском городе ведут свои тёмные делишки 20 мафиозных кланов, причём известно, что каждый клан враждует хотя бы с 14 другими. Всегда ли найдутся 4 клана, попарно враждующих друг с другом?

1.2.35. («Надежда энергетики», 2015, 8.6) Произведение 2015 целых чисел равно 1. Может ли сумма их 2015-х степеней быть равной нулю?

1.2.36. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.7, 7–8.6, 9.5) Можно ли так расставить знаки «+» и «−» на месте звездочек так, чтобы получилось верное равенство

$$* 1^2 * 2^2 * \dots * 2020^2 = 2020?$$

1.2.37. («Надежда энергетики», 2015, 8.7) Можно ли 2015-угольник разбить на параллелограммы?

1.2.38. (Открытая олимпиада, 2022, 8.7) На плоскости отмечены 13 точек общего положения, некоторые из которых соединены отрезками. При этом проведённые отрезки не образуют ни одного треугольника или четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках.

Может ли быть нарисовано больше 16 отрезков?

Точки общего положения — точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

1.2.39. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.7*) По кругу стоят 23 блюдечка, на них разложены 46 пирожков. За один ход разрешается взять 2 пирожка, лежащие на одном блюдечке, и переложить их на 2 соседних блюдечка. При любом ли начальном расположении пирожков можно добиться того, чтобы на всех блюдечках оказалось поровну пирожков?

1.2.40. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.6*) Можно ли число 240 представить в виде суммы девяти двузначных чисел (среди которых могут быть и одинаковые), в десятичной записи каждого из которых есть девятка?

1.2.41. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2022.1*) Можно ли пронумеровать вершины, рёбра и грани куба различными целыми числами от -12 до 13 так, чтобы номер каждой вершины равнялся сумме номеров сходящихся в ней рёбер, а номер каждой грани равнялся сумме номеров ограничивающих её рёбер?

1.2.42. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2023.5*) Маша взяла четыре различных положительных числа и записала шесть их попарных произведений в ряд в порядке возрастания. Могли ли все пять разностей между соседними числами этого ряда оказаться одинаковыми?

1.2.43. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.5*) Замкнутая ломаная состоит из 1001 звена и такова, что никакие три её вершины не лежат на одной прямой. Известно, что каждое её звено, кроме, может быть, двух, пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов. Верно ли, что каждое из двух оставшихся звеньев тоже пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов?

1.3 Ребусы

Дополнительные задачи — в листке [Ребусы](#).

1.3.1. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.1*) Найдите все решения числового ребуса $AB = B^B$ (разным буквам соответствуют разные цифры; в левой части стоит двузначное число, а не произведение цифр A и B).

1.3.2. (*САММАТ, 2021, 8.5*) Дан пример на сложение двух трехзначных чисел:

$$+ \begin{array}{r} a \ 4 \ c \\ d \ 5 \ f \\ \hline g \ h \ 0 \ 2 \end{array}$$

Каждой букве соответствует одна единственная цифра. Разным буквам соответствуют разные цифры. Никакая цифра в примере не повторяется. Какой букве какая цифра соответствует? Приведите хотя бы один конкретный пример.

1.3.3. (*Открытая олимпиада, 2017, 8.5*) Дан ребус: МИМИМИ + НЯНЯНЯ = ОЛАЛАОЙ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите МИ + НЯ.

1.3.4. (*«Ломоносов», 2023, 5–6.6, 7–8.6*) До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью

букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 1, \bar{b} = 2, \bar{r} = 3, \bar{d} = 4, \bar{e} = 5, \bar{y} = 8; \\ \bar{k} &= 20, \bar{l} = 30, \bar{m} = 40, \bar{n} = 50, \bar{o} = 70, \bar{p} = 80, \bar{c} = 90; \\ \bar{p} &= 100, \bar{c} = 200, \bar{t} = 300, \bar{y} = 400, \bar{f} = 500, \bar{x} = 600, \bar{ц} = 900. \end{aligned}$$

С помощью букв числа записываются так: например, $\overline{цла} = \bar{ц} + \bar{l} + \bar{a} = 900 + 30 + 1 = 931$. Или $\overline{мд} = 44$. Или $\overline{ра} = 101$.

Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи $\overline{да}$, $\overline{чух}$, $\overline{или}$, $\overline{ал}$, \overline{oooo} запрещены.

Найдите два решения ребуса в современных буквах

$$(\overline{**} + \overline{*} \times \overline{***}) \times \overline{*} = \overline{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

1.3.5. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.2*) Учитель придумал ребус, заменив в примере $a + b = c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. (например, если $a = 23$, а $b = 528$, то $c = 551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус $\overline{AB} + \overline{BAГ} = \overline{BBД}$). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c .

Глава 2

Целые числа

2.1 Десятичная запись

Дополнительные задачи — в листке [Десятичная запись](#).

2.1.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 8.1*) На клавиатуре компьютера Пети *неисправна* одна клавиша с некоторой цифрой (все остальные клавиши работают хорошо). Неисправная клавиша срабатывает только на каждое второе нажатие. Например, в случае неисправной клавиши «2» при вводе числа 12125252 получится число 112552.

Петя попробовал ввести 10-значное число, но на экране появилось 7-значное число

$$7479189$$

Клавиша с какой цифрой могла быть неисправна? Укажите все возможные варианты.

2.1.2. (*Всеросс., 2020, МЭ, 8.1*) Петя ошибся, записывая десятичную дробь: цифры записал верно, а запятую сдвинул на одну позицию. В результате получилось число, которое меньше нужного на 19,71. Какое число должен был записать Петя?

2.1.3. (*САММАТ, 2021, 8.1*) Найдите четырехзначное число \overline{abca} (в десятичной записи), равное $(5c + 1)^2$.

2.1.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.1, 8.1*) В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное число на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа).

2.1.5. (*«Бельчонок», 2023, 8.1*) Найдите какое-нибудь натуральное число, которое заканчивается на «2023» и квадрат которого содержит последовательность цифр «2023».

2.1.6. (*ММО, 2021, 8.1*) Барон Мюнхгаузен утверждает, что к любому двузначному числу можно справа приписать еще две цифры так, чтобы получился полный квадрат (к примеру, если задано число 10, то дописываем 24 и получаем $1024 = 32^2$). Прав ли барон?

2.1.7. (*Всесиб., 2022, 8.2*) Произведение двух натуральных чисел a и b равно трёхзначному числу, являющемуся кубом некоего натурального числа k . Частное же чисел a и b равно квадрату этого же числа k . Найдите a , b и k .

2.1.8. («Ломоносов», 2021, 7–8.2) Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

2.1.9. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 7.4, 8.2) Три ученика написали на доске по двузначному числу, каждое из которых является точным квадратом. Оказалось, что если «склеить» их в одно шестизначное число, то оно тоже является квадратом натурального числа. Найдите все такие шестизначные числа.

2.1.10. («Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 8.2, 9.1) В пятизначном числе зачеркнули одну цифру и полученное четырехзначное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 54321. Найдите исходное число.

2.1.11. (САММАТ, 2023, 8.9) Найти нечетное трехзначное число, если известно, что сумма квадратов чисел сотен и единиц не превосходит удвоенного числа сотен, а квадрат числа десятков превосходит квадрат суммы чисел сотен и единиц более чем на 60.

2.1.12. («Ломоносов», 2022, 7–8.5) Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число \overline{abcde} . Про двузначные числа $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$(\overline{ab} + \overline{bc}) (\overline{bc} + \overline{cd}) (\overline{cd} + \overline{de}) = 157605.$$

Найдите число \overline{abcde} . Многочисленные числа не могут начинаться с нуля.

2.1.13. («Бельчонок», 2020, 8.5) Одно из двух натуральных чисел больше другого числа на 10. Оказалось, что десятичная запись произведения этих чисел не содержит никаких других цифр, кроме 9. Найдите все такие числа.

2.1.14. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 8.5) Четырёхзначное число назовём число *примечательным*, если всего его цифры не больше 6 и оно является точным квадратом. Назовём число *замечательным*, если оно примечательное и, кроме того, остаётся примечательным, если все его цифры одновременно увеличить на 1. Найдите все замечательные числа.

2.1.15. («Надежда энергетики», 2015, 8.6) Числа 2^{2015} и 5^{2015} в их десятичной записи написаны одно за другим без пробела. Сколько всего десятичных знаков выписано?

2.1.16. («Шаг в будущее», 2019, 8.6) Известно, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$$35! = 10333147966386\mathbf{CD}4929666651337523\mathbf{AB}0000000.$$

Найти A, B, C, D

2.1.17. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.1) Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен?

2.1.18. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.8) Будем называть натуральное число **красивым**, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?

2.2 Сумма цифр числа

Дополнительные задачи — в листке [Сумма цифр числа](#).

2.2.1. («*Будущие исследователи — будущее науки*», 2023, 7.1, 8.1) Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, с суммой цифр 100. Ответ обоснуйте.

2.2.2. («*Будущие исследователи — будущее науки*», 2022, 7.1, 8.1) Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $3n$ и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите n .

2.2.3. («*Формула Единства*» / «*Третье тысячелетие*», 2017, 8.1) Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Сколько цифр может быть в числе? Укажите все варианты ответа и докажите, что других нет.

2.2.4. («*Курчатов*», 2021, 8.1) Назовём число *маленьким*, если оно 10-значное и не существует меньшего 10-значного числа с такой же суммой цифр. Сколько существует маленьких чисел?

2.2.5. («*Курчатов*», 2023, 8.2) Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

2.2.6. (ММО, 2023, 8.4) Назовём натуральное число *хорошим*, если в его десятичной записи есть только нули и единицы. Пусть произведение двух хороших чисел оказалось хорошим числом. Правда ли, что тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

2.3 Чётность

Дополнительные задачи — в листке [Чётность](#).

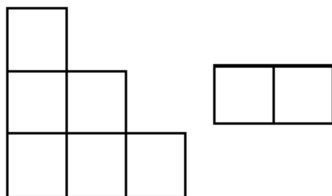
2.3.1. («*Шаг в будущее*», 2018, 8.2) В вершинах куба расставлены последовательные нечетные натуральные числа от 1 до 15. На каждой грани записана сумма чисел, расставленных в ее вершинах. Может ли оказаться так, что на гранях записано шесть последовательных четных чисел? Ответ обоснуйте.

2.3.2. (Всесиб., 2022, 8.3) Крош, Лосяш и Совунья участвовали в гонках. Крош стартовал первый, но в течение гонки его обгоняли, либо он обгонял других ровно 12 раз. Совунья начала движение последней, однако, в течение гонки её обгоняли, либо она обгоняла других ровно 10 раз. В каком порядке финишировали участники, если известно, что Лосяш закончил гонку раньше Кроша?

2.3.3. («*Бельчонок*», 2022, 8.4) Числа 1, 2, 3, ..., 9, 10 записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали следующие суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т. д. Последняя сумма S_{10} равняется сумме всех чисел. Какое наибольшее возможное количество простых чисел может оказаться среди сумм S_1, S_2, \dots, S_{10} ?

2.3.4. («Бельчонок», 2022, 8.4) Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

2.3.5. («Бельчонок», 2022, 8.4) Квадрат размером 100×100 клеток разбит на фигурки двух типов, изображённые на рисунке. Может ли оказаться, что фигурок из шести клеток ровно 333? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



2.3.6. («Шаг в будущее», 2020, 8.6) Даны 10 натуральных чисел, сумма любых четырёх из них чётна. Может ли произведение всех десяти чисел оканчиваться на 1580? Ответ обоснуйте.

2.4 Делимость

Дополнительные задачи — в листке [Делимость. Общие свойства](#).

2.4.1. (САММАТ, 2021, 8.1) Доказать, что каждое число вида $n^4 + 64$ является составным при всех натуральных $n > 2$.

2.4.2. (Всеросс., 2023, ШЭ, 8.6) Паша выписал в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа k и их пронумеровал: первый, второй, ...

Паша заметил, что если шестой делитель умножить на тринадцатый делитель, то получится исходное число k .

Сколько натуральных делителей имеет число k ?

2.4.3. (Всеросс., 2021, ШЭ, 8.8) Маша выписала на доску в порядке возрастания все натуральные делители некоторого числа N (самый первый выписанный делитель — 1, самый большой выписанный делитель — само число N). Оказалось, что третий с конца делитель в 21 раз больше второго с начала. Какое наибольшее значение может принимать N ?

2.4.4. (Всеросс., 2021, МЭ, 8.2) Вася заменил в двух числах одинаковые цифры одинаковыми буквами, разные — разными. Получилось, что число ЗАРАЗА делится на 4, а АЛМАЗ делится на 28. Найдите две последние цифры суммы ЗАРАЗА + АЛМАЗ.

2.4.5. («Шаг в будущее», 2017, 8.1) Докажите, что при любом натуральном n , $n^2 + 8n + 15$ не делится на $n + 4$.

2.4.6. (Открытая олимпиада, 2017, 8.1) Существует ли натуральное четырёхзначное число с суммой цифр 21, которое делится на 14?

2.4.7. («Бельчонок», 2019, 8.1) Пусть k — натуральное число. Известно, что среди 29 последовательных чисел $30k + 1, 30k + 2, \dots, 30k + 29$ имеется 8 простых. Докажите, что $30k + 1$ и $30k + 29$ обязательно простые.

2.4.8. («Бельчонок», 2019, 8.1) Пусть k — натуральное число. Докажите, что среди 29 последовательных чисел $30k + 1, 30k + 2, \dots, 30k + 29$ имеется не более 8 простых.

2.4.9. («Шаг в будущее», 2016, 8.1) Для некоторых целых чисел x и y число $3x + 2y$ делится на 29. Делится ли число $23x + 25y$ на 29?

2.4.10. («Росатом», 2015, 8.2) Найти все целые n , при которых выражение $n^2 - 2n - 3$ делится на 13 без остатка.

2.4.11. (ММО, 2022, 8.2, 10.1) Найдите наибольшее натуральное n , обладающее следующим свойством: для любого простого нечетного p , меньшего n , разность $n - p$ также является простым числом.

2.4.12. (Всеросс., 2023, МЭ, 8.3) У Маши есть три одинаковых игральных кубика, на гранях каждого из них написано шесть различных простых чисел с суммой 87.

Маша дважды кинула все три кубика. В первый раз сумма выпавших чисел равнялась 10, во второй раз сумма выпавших равнялась 62.

Ровно одно из шести чисел ни разу не выпало. Какое?

2.4.13. (Всесиб., 2020, 8.3) На доске написано число 4. За один ход Ане разрешается выбрать любой собственный делитель числа, написанного на доске, и прибавить его к этому числу, записав сумму вместо старого числа. Данную операцию разрешается проделывать неограниченное число раз. Докажите, что Аня может получить на доске любое составное число. Делитель числа n называется собственным, если он не равен 1 и n .

2.4.14. («Курчатов», 2022, 8.3, 9.3, 10.3) Назовем *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N , которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

2.4.15. («Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.4, 8.3) Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

2.4.16. («Ломоносов», 2021, 7–8.3) Назовем составное натуральное число n «интересным», если все его натуральные делители можно выписать в порядке возрастания, и при этом каждый следующий делитель делится на предыдущий. Найти все «интересные» натуральные числа от 20 до 90 (включительно).

2.4.17. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.4, 7–8.3) Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37.

2.4.18. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

2.4.19. («Высшая проба», 2021, 8.3) В ряд расставлены 2020 натуральных чисел так, что среди любых шести чисел, идущих подряд, первое число нацело делится на последнее, и среди любых девяти чисел, идущих подряд, последнее число нацело делится на первое. Докажите, что сумма первых ста чисел нацело делится на сумму последних ста чисел.

2.4.20. («Высшая проба», 2022, 8.3) Настойчивый восьмиклассник Вася выписал в ряд 2021 нечётное число $n_1, n_2, \dots, n_{2021}$. Затем он построил новый ряд из 2020 чисел по следующему правилу: p_1 получается перемножением всех делителей числа n_1 (в том числе единицы и самого числа) и всех делителей числа n_2 , p_2 получается перемножением всех делителей числа n_2 и всех делителей числа n_3 и т. д. Вася утверждает, что $n_1 = 3$, $n_{2021} = 13$, а у произведения $p_1 p_2 \dots p_{2020}$ последние четыре цифры — 2021. Стоит ли верить Васе?

2.4.21. («Росатом», 2023, 8.4) Найти наименьшее натуральное число n , кратное 7, для которого выражение $n^2 + 25n + 100$ делится нацело на 115.

2.4.22. («Росатом», 2016, 8.4) Пятизначное четное число a , являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a , удовлетворяющее этим условиям.

2.4.23. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 7.5, 8.4) Существует ли такое натуральное число x , что среди утверждений « $x + 1$ кратно 2019», « $x + 2$ кратно 2018», « $x + 3$ кратно 2017», ... « $x + 2017$ кратно 3», « $x + 2018$ кратно 2» ровно половина верных?

2.4.24. («Надежда энергетики», 2015, 8.5) На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

2.4.25. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.9) Будем говорить, что мы **укоротили** число, если стерли его последнюю цифру. Натуральное число, большее миллиона, таково, что если укоротить его, получится квадрат натурального числа, если укоротить этот квадрат, получится куб натурального числа, укоротив этот куб, получим четвёртую степень натурального числа, а, укоротив эту четвёртую степень, получим пятую степень натурального числа. Докажите, что если укоротить эту пятую степень, то получится шестая степень натурального числа.

2.4.26. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2023.8) Дано натуральное число k , большее 1. Натуральное число n , большее 1 и взаимно простое с k , назовём **правильным**, если для любого натурального делителя d ($d < n$) числа n число $d + k$ не взаимно просто с n . Докажите, что правильных чисел — конечное количество.

2.4.27. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2022.4) Натуральные числа a, b и c , большие 2022, таковы, что $a + b$ делится на $c - 2022$, $a + c$ делится на $b - 2022$, $b + c$ делится на $a - 2022$. Какое наибольшее значение может принимать число $a + b + c$?

2.4.28. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.9) Дано натуральное число n , большее 2. Докажите, что если число $n! + n^3 + 1$ — простое, то число $n^2 + 2$ представляется в виде суммы двух простых чисел.

2.5 Остатки и сравнения

Дополнительные задачи — в листке [Остатки и сравнения](#).

2.5.1. (*САММАТ, 2022, 8.7*) Число a при делении на 13 дает остаток 7. Каким будет остаток при делении на 13 числа $15a^2 + 4a + 9$?

2.5.2. («*Формула Единства*» / «*Третье тысячелетие*», 2021, 7.2, 8.1, 10.1) Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A , B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8?

2.5.3. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2021, 5–6.2, 7–8.1) Определите, является ли число

$$N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$$

простым или составным. Ответ обоснуйте.

2.5.4. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2023, 5–6.3, 7–8.2) Пусть $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$ и дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Какой остаток даёт a при делении на 601?

2.5.5. («*Будущие исследователи — будущее науки*», 2023, 8.2) Даны два взаимно простых натуральных числа p и q , отличающиеся больше, чем на единицу. Докажите, что существует такое натуральное n , что числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми.

2.5.6. («*Надежда энергетики*», 2019, 8.2) Может ли число $n^2 + n + 2$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n ? Либо найдите такое минимальное n , либо докажите невозможность.

2.5.7. («*Надежда энергетики*», 2020, 8.2) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$2019^{2020} + 2020^{2019}?$$

2.5.8. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2020, 7–8.2) Найдите последнюю цифру числа $202^{303^{404}}$.

2.5.9. («*Надежда энергетики*», 2022, 8.3) Верно ли, что среди любых 2022 целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна 2021?

2.5.10. (*САММАТ, 2023, 8.5*) Существует ли натуральное n , такое что $n^2 + n + 1$ делится на 1001?

2.5.11. («*Формула Единства*» / «*Третье тысячелетие*», 2022, 8.3) Клетки таблицы 7×7 пронумеровали по порядку числами от 1 до 49 (в первой строке — от 1 до 7 слева направо, во второй — от 8 до 14 и т. д.). После этого из неё вырезали несколько непересекающихся квадратов 2×2 , а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 4? (Найдите все возможные значения этого остатка и докажите, что других нет.)

2.5.12. («*Надежда энергетики*», 2023, 8.4) Четыре менеджера по перекладыванию доложили: «Если их разложить по парам, то останется 1. Если их разложить по тройкам, то тоже останется 1. Если же их разложить по четыре, то останется 2, и если их разложить по пять, то тоже останется 2». Должен ли начальник отдела приема докладов поверить такому сообщению? Выясните, какое максимальное количество верных утверждений может быть среди этих четырех высказываний (возможно, все) и для каждого максимального набора непротиворечивых высказываний найдите наименьшее количество раскладываемых объектов, учитывая, что их не менее тысячи.

2.5.13. («Росатом», 2018, 8.4) Натуральные числа a и b таковы, что a при делении на 3 имеет остаток 2, b при делении на 7 — остаток 1, а их произведение при делении на 21 имеет в остатке 2. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $a + b$, если a и b трехзначные числа.

2.5.14. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 8.5) Докажите, что

$$n^{24} - n^4 + n^2 - n^{22}$$

делится на 720 при любом нечётном n .

2.5.15. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.2) Пусть p_1, p_2, \dots, p_{100} — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа a_1, \dots, a_k , большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1 p_2^3, p_2 p_3^3, \dots, p_{99} p_{100}^3, p_{100} p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел a_1, \dots, a_k . Докажите, что $k \geq 150$.

2.5.16. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.6) Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.

2.5.17. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.4) Числа 1, 2, \dots , 1000 разбили на два множества по 500 чисел: красные k_1, k_2, \dots, k_{500} и синие s_1, s_2, \dots, s_{500} . Докажите, что количество таких пар m и n , у которых разность $k_m - s_n$ даёт остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n , у которых разность $s_n - k_m$ даёт остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются все возможные разности, в том числе и отрицательные.

Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен $2022 - 2000 = 22$, а остаток от деления числа -11 на 100 равен $-11 - (-100) = 89$.

2.5.18. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.9) Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васиные с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.

2.6 НОД и НОК

Дополнительные задачи — в листке [НОД и НОК](#).

2.6.1. («Бельчонок», 2023, 8.1) Сумма 14 натуральных чисел равна 2023. Найдите какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель слагаемых, и приведите пример таких чисел.

2.6.2. («Росатом», 2021, 8.2) На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\frac{3n+2}{5n-7}$? При каких целых n это может произойти?

2.6.3. (*Открытая олимпиада, 2022, 8.2*) Натуральные числа a и b таковы, что

$$2a + 3b = \text{НОК}(a, b).$$

Какие значения может принимать число $\frac{\text{НОК}(a,b)}{a}$? Перечислите все возможные варианты в порядке возрастания или убывания через запятую. Если решений нет, напишите число 0.

2.6.4. (*«Росатом», 2017, 8.3*) Сколько натуральных чисел $x \leq 1000$ удовлетворяют уравнению $\text{НОД}(6, 5x) = 3$? Найти наибольшее такое x , кратное 5.

2.6.5. (*«Росатом», 2019, 8.3*) Сколько существует различных пар целых чисел x, y , являющихся делителями числа 540, для которых $\text{НОД}(x, y) = 2$? Пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считать одной парой.

2.6.6. (*Открытая олимпиада, 2023, 8.3*) Натуральные числа a и b таковы, что $a > b$ и

$$\frac{\text{НОК}(a, b)}{\text{НОД}(a, b)} = 300.$$

Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{b}$?

2.6.7. (*«Росатом», 2019, 8.4*) Длины оснований трапеции равны 108 и 72. Трапеция разрезается на равные треугольники прямыми, параллельными его сторонам. Длина хотя бы одной стороны треугольника — целое число. Найти наименьшее возможное число таких треугольников.

2.6.8. (*Открытая олимпиада, 2020, 8.4*) Решите уравнение

$$a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 997,$$

если известно, что 997 — простое число.

2.6.9. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.5*) Решите уравнение

$$a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 143.$$

2.6.10. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.6*) Натуральные числа x, y, z таковы, что

$$\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z) \cdot \text{НОК}(\text{НОД}(x, y), z) = 1400.$$

Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$?

2.6.11. (*«Шаг в будущее», 2021, 8.6*) Новогодние гирлянды упаковывают для перевозки в магазин. При собирании их в пучки по 6, 7 или 8 штук остается каждый раз одна лишняя. При количестве пять в пучке лишних не остается. Каково количество гирлянд? Известно, что их не более 1500 и не менее 600.

2.6.12. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2023.1*) На доске написаны натуральные числа от 1 до 1000, по одному разу каждое. Вася может стереть любые два числа и записать вместо них одно: их наибольший общий делитель или их наименьшее общее кратное. Через 999 таких операций на доске осталось одно число, равное натуральной степени десятки. Какое наибольшее значение она может принимать?

2.6.13. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.9*) В строку выписано 1999 натуральных чисел. Во вторую строку под каждым двумя соседними числами выписали их наибольший общий делитель. Аналогичным образом получили третью, четвёртую и т. д. строки. Может ли 1000-я строка состоять из 1000 последовательных чисел в некотором порядке?

2.7 Уравнения в целых числах

Дополнительные задачи — в листке [Уравнения в целых числах](#).

2.7.1. (*«Высшая проба», 2022, 8.1*) Число $a * b$ есть произведение b последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно a (в частности, $a * 1 = a$). Найдите все пары натуральных чисел a, b , для которых выполнено равенство $a * b = 2(b * a)$.

2.7.2. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.2*) Докажите, что уравнение $16^x + 21^y + 26^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

2.7.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 8.2, 9.2*) Найдите все простые числа p , для которых $8p + 1$ представляет собой:

- а) точный квадрат;
- б) точный куб.

2.7.4. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.3*) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 58 = 0.$$

2.7.5. (*САММАТ, 2021, 8.7*) Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 + 8x + 5y = 7.$$

2.7.6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.4, 7–8.3, 9.1*) Найдите все пары простых чисел p и q , для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.

2.7.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 7–8.4, 9.3*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y) , для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + 2y = 100.$$

2.7.8. (*«Шаг в будущее», 2018, 8.3*) Найдите двузначное число \overline{xy} , квадрат суммы цифр которого на 8 больше произведения цифр числа и квадрата единиц этого числа, увеличенной в 7 раз.

2.7.9. («Высшая проба», 2021, 7.5, 8.4) Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d , для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a + b = cd; \\ c + d = ab. \end{cases}$$

2.7.10. («Бельчонок», 2020, 8.5) Выражение $n!$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Решите в натуральных числах уравнение

$$n! - 4n^2 + 18 = m^2 + 4nm - 20m.$$

2.7.11. («Надежда энергетики», 2019, 8.5) Имеет ли уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2} = 1$$

решение в натуральных числах, больших единицы?

2.7.12. (Открытая олимпиада, 2023, 8.5) Решите уравнение $2^x - 3^y = 295$ в натуральных числах.

2.7.13. (Всеросс., 2023, МЭ, 8.6) Натуральное число n таково, что значение выражения $n^2 + 492$ является точным квадратом.

1. Укажите любое возможное значение n .
2. Чему может быть равно n ? Укажите все возможные варианты.

2.7.14. (Открытая олимпиада, 2019, 8.6) Решите уравнение $abcdef = a + b + c + d + e + f$ в натуральных числах.

2.7.15. («Шаг в будущее», 2017, 8.6) Докажите, что выражение

$$a^5 + 3ba^4 - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

не равно 55 ни при каких целых значениях a и b .

2.8 Задачи с целыми числами

Дополнительные задачи — в листке [Задачи с целыми числами](#).

2.8.1. (Всеросс., 2021, ШЭ, 8.5) На бал пришли дамы и джентльмены — всего меньше 50 человек. Во время первого танца лишь четверть дам не были приглашены на танец, и $2/7$ от общего количество джентльменов никого не пригласили. Сколько человек пришло на бал? (Для танца некоторый джентльмен приглашает некоторую даму.)

2.8.2. (САММАТ, 2022, 8.4) В коробке находится в совокупности 30 черных и белых шаров, при этом среди любых 12 шаров есть хотя бы один белый, а среди любых 20 шаров хотя бы один черный. Сколько белых шаров в коробке?

2.8.3. (*«Надежда энергетики», 2019, 8.1*) Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый головастик саблезубой лягушки, если все пятиногие головастики имеют один хвост, а все многохвостые — четыре ноги?

2.8.4. (*«Надежда энергетики», 2016, 8.1*) Установок 3 типов всего не более 200. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 99 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

2.8.5. (*«Надежда энергетики», 2015, 8.1*) 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников — сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

2.8.6. (*«Росатом», 2019, 8.1*) В доме 80 комнат, объединенных в 45 квартирах: однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных. Число двухкомнатных квартир не менее, чем на 50% превышает число трехкомнатных, а количество однокомнатных больше двухкомнатных не менее, чем на 30%. Сколько двухкомнатных квартир в доме?

2.8.7. (*«Курчатов», 2023, 8.1, 9.1*) Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

2.8.8. (*Олимпиада КФУ, 2023, 8.2*) Мама испекла Ане на день рождения торт, который весит целое число граммов. Перед тем, как украсить его, мама взвесила торт на цифровых весах, которые округляют вес до десятков граммов в ближайшую сторону (если вес оканчивается на 5, то весы округляют его в меньшую сторону). Результат оказался равным 1440 г. Когда мама украсила торт одинаковыми свечками, количество которых было равно возрасту Ани, весы показали 1610 г. Известно, что вес каждой свечки составляет целое число граммов, при этом если положить на весы одну свечу, то они покажут 40 г. Сколько лет может быть Ане? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

2.8.9. (*Всесиб., 2016, 8.2*) В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Утром в автобусе сидело 13 человек, а полностью свободных сидений было 9. Вечером в автобусе сидело 10 человек, а полностью свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

2.8.10. (*«Росатом», 2016, 8.2*) В стеклянной банке разместились коллекция жуков. Часть жуков имеет 6 лапок, остальные — по 8 лапок. Коля внимательно пересчитал все лапки, их оказалось 86 штук. Какое минимально возможное количество жуков могло находиться в банке?

2.8.11. (*«Росатом», 2021, 8.3*) Половина мальчиков класса сидит за партой с девочкой, и только треть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики — вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но пятая часть девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько девочек пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

2.8.12. (*Открытая олимпиада, 2016, 8.3*) Аня, Ваня, Даня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый из них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Затем Таня, собравшая больше всех яблок, съела свои яблоки. После этого оказалось, что у каждого из ребят по-прежнему целое количество процентов, но уже от числа оставшихся яблок. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

2.8.13. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.5*) У Пети и Маши целое число рублей у каждого. Петя говорит Маше: «Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя». Маша отвечает: «Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя». Какие натуральные значения может принимать n , если ребята говорят правду?

2.8.14. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.6*) Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на $5/4$, прибавил к результату $5/4$ и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.

2.8.15. (*«Шаг в будущее», 2018, 8.6*) Винни-Пух и Пятачок делят конфеты. Если Винни возьмет у Пятачка несколько конфет, то у него станет конфет в 4 раза больше, чем у Пятачка. Если же Пятачок заберет у Винни 90 конфет из его первоначального количества, то у Пятачка станет конфет в 5 раз больше, чем у Винни. Какое минимально возможное количество конфет могло быть у Пятачка и Винни-Пуха первоначально?

2.8.16. (*Открытая олимпиада, 2015, 8.8*) Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок, при этом Коля собрал нечётное число яблок. Сколько яблок собрали Аня и Коля вместе?

Глава 3

Алгебра и анализ

3.1 Числовые неравенства

Дополнительные задачи — в листке [Числовые неравенства](#).

3.1.1. («*Будущие исследователи — будущее науки*», 2020, 7.1, 8.1) Коля хочет представить в десятичной форме дробь $\frac{3}{7}$, записав на доске 0 целых и 1000 знаков после запятой. Затем он собирается стереть 500-й знак после запятой. Какое число у него получится после этого: больше или меньше $\frac{3}{7}$?

3.1.2. («*Бельчонок*», 2020, 8.1) Для положительных действительных чисел x, y сравните значения выражений

$$\frac{x}{x^3 + xy + 1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x + y + 1}.$$

3.1.3. (ММО, 2022, 8.1) Незнайка не знает о существовании операций умножения и возведения в степень. Однако он хорошо освоил сложение, вычитание, деление и извлечение квадратного корня, а также умеет пользоваться скобками. Упражняясь, Незнайка выбрал три числа 20, 2 и 2 и составил выражение:

$$\sqrt{(2 + 20) : 2}.$$

А может ли он, используя точно те же три числа 20, 2 и 2, составить выражение, значение которого больше 30?

3.1.4. («*Высшая проба*», 2021, 8.1) Вася прибавил к числителю и знаменателю правильной дроби одно и то же натуральное число, меньшее как числителя, так и знаменателя. В результате дробь увеличилась более чем на 50%. Вася утверждает, что, если он отнимет это число от числителя и знаменателя исходной дроби, то дробь уменьшится менее, чем на 50%. Может ли так быть?

3.1.5. (САММАТ, 2023, 8.2) Установить, какое из чисел больше:

$$2023^{2023} + 2021^{2021} \quad \text{или} \quad 2023^{2021} + 2021^{2023}.$$

3.1.6. (САММАТ, 2022, 8.8) Сравните числа $2^{17^{17}}$ и $17^{2^{17}}$.

3.1.7. («Высшая проба», 2023, 8.2) Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_3 \geq 13, \\ x_1 + x_4 \geq 14, \\ x_3 + x_4 \geq 22, \\ x_2 + x_3 \geq 23, \\ x_2 + x_4 \geq 24. \end{cases}$$

Какое наименьшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

3.1.8. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 7–8.4) Сравните числа $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$.

3.1.9. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.2) Числа x и y , не равные 0, удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)?

3.1.10. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2021.6) Петя, Вася и Толя вернулись с рыбалки, на которой каждый из них поймал некоторое количество рыб (хотя бы одну). После рыбалки они стали хвастаться своими уловами. Петя сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем каждый из остальных!». Вася сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем Петя и Толя в сумме!». Толя сказал: «Я поймал на 25% больше рыб, чем Вася!». Позже выяснилось, что каждый из ребят преувеличил свой улов не более, чем в a раз. Какое наименьшее значение могло принимать число a ?

3.1.11. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2020.1) На доске написано четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных.

3.2 Алгебраические преобразования

Дополнительные задачи — в листке [Алгебраические преобразования](#).

3.2.1. («Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 8.1, 9.1) Найдите значение выражения

$$\frac{(a^2 + b^2)^2 - c^2 - 4a^2b^2}{a^2 + c - b^2}$$

при $a = 2017$, $b = 2016$, $c = 2015$. Результат обоснуйте.

3.2.2. (Всеросс., 2021, ШЭ, 8.7) Про три действительных числа p, q и r известно, что

$$p + q + r = 5, \quad \frac{1}{p+q} + \frac{1}{q+r} + \frac{1}{p+r} = 9.$$

Чему равняется выражение

$$\frac{r}{p+q} + \frac{p}{q+r} + \frac{q}{p+r}?$$

3.2.3. (*Всеросс., 2020, МЭ, 8.3*) Известно, что

$$\frac{1}{3a} + \frac{2}{3b} = \frac{3}{a+2b}.$$

Докажите, что $a = b$.

3.2.4. (*САММАТ, 2021, 8.3*) Записать в виде степени число $26 \cdot 2^{2020} + 3 \cdot 2^{2021}$.

3.2.5. (*САММАТ, 2022, 8.5*) Назовем натуральное число интересным, если оно представимо в виде $m^2 + 4n^2$, где m и n — целые числа. Является ли произведение двух интересных чисел также интересным числом? Ответ обоснуйте.

3.2.6. (*САММАТ, 2022, 8.9*) Попарно различные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Какие значения может принимать $a \cdot b \cdot c$?

3.2.7. (*«Бельчонок», 2021, 8.1*) Вася написал число, а Петя написал число на 1 больше. Потом Вася написал ещё одно число, а Петя написал число на 3 больше. Могли ли суммы квадратов чисел Васи и Пети быть равными?

3.2.8. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.1*) Каково расстояние между точками a и b на числовой оси, если про них известно, что $a + b = \sqrt{2019}$ и $ab = 248,75$?

3.2.9. (*«Шаг в будущее», 2018, 8.1*) Найти все натуральные значения n , для которых число

$$n^4 - n^3 + n^2 + 2$$

является простым.

3.2.10. (*Открытая олимпиада, 2015, 8.1*) Мальчик Вася пытался вспомнить распределительный закон умножения и написал формулу: $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$. Потом он подставил в эту формулу три ненулевых числа и обнаружил, что получилось верное равенство. Найдите сумму этих чисел.

3.2.11. (*«Бельчонок», 2020, 8.1*) Для различных положительных действительных чисел a, b справедливо равенство

$$\frac{a}{a^3 + a + 1} = \frac{b}{b^3 + b + 1}.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{13 - a^2b - b^2a}{2 + a^2b + b^2a}.$$

3.2.12. (*«Бельчонок», 2021, 8.1*) Известно, что $a = b + 7$, $c = d + 2$. Может ли быть так, что $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$?

3.2.13. («Курчатов», 2020, 8.1, 9.1) Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

3.2.14. («Бельчонок», 2023, 8.3) Существуют ли такие целые n , для которых $n + 2 = a^3$ и $n^2 - 2n + 4 = b^3$, где a и b — натуральные числа?

3.2.15. («Росатом», 2020, 8.2) Представить число 2022 в виде суммы кубов четырех целых чисел.

3.2.16. («Надежда энергетики», 2017, 8.2) Число x неизвестно, но известно число $A = x + \frac{1}{x}$.

1. Выразите через A числа $B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$ для $k = 2, 3, 4, 8$.
2. Выясните, при каких A и x выполняются равенства

$$B_2 = B_4 = B_8.$$

3.2.17. («Курчатов», 2021, 8.2) Про вещественные числа a, b, c, x, y известно, что

$$\frac{1}{a+x} = 6, \quad \frac{1}{b+y} = 3, \quad \frac{1}{c+x+y} = 2.$$

Докажите, что среди чисел a, b, c одно равно сумме двух других.

3.2.18. («Бельчонок», 2018, 8.2) Для неотрицательных x и y имеет место равенство

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \sqrt{2xy + \frac{1}{2}}.$$

Какие значения может принимать выражение $\sqrt{x+y} - \sqrt{2xy}$?

3.2.19. («Шаг в будущее», 2021, 8.2) Решите уравнение

$$\sqrt{x+7+6\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+142+24\sqrt{x-2}} = x^2 - 18.$$

3.2.20. (Открытая олимпиада, 2022, 8.3) Число N представляется в виде суммы квадратов пяти подряд идущих натуральных чисел. Докажите, что $N - 5$ представляется в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3.2.21. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.3) Сравните числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $2 + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

3.2.22. («Надежда энергетики», 2015, 7.4, 8.4) Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz = 1$, $x + \frac{1}{z} = 5$, $y + \frac{1}{x} = 29$. Найдите значение $z + \frac{1}{y}$.

3.2.23. («Надежда энергетики», 2018, 8.5) Числа $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ удовлетворяют условиям

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 2018^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 2017^2, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 2017 \cdot 2018.$$

Найдите отношения $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_n/b_n$.

3.2.24. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.7, 9.6) Функция $f(x)$ определена и положительна при всех $x > 0$. Известно, что $f(1) + f(2) = 20$ и $f(a + b) = f(a) + f(b) + 2\sqrt{f(a)f(b)}$ при всех $a, b > 0$. Найдите $f(2020)$.

3.3 Целочисленная теорема Безу

Дополнительные задачи — в листке [Многочлены](#).

3.3.1. («Росатом», 2022, 8.4) Многочлен $P(x)$ степени $n > 2$ с целыми коэффициентами при $x = 1$ принимает значение 3, а при $x = n$ — значение 1. Найдите n .

3.4 Суммирование

Дополнительные задачи — в листке [Суммирование](#).

3.4.1. («Ломоносов», 2021, 7–8.4) Решите уравнение:

$$(x + 1)^2 + (x + 3)^2 + (x + 5)^2 + \dots + (x + 2021)^2 = x^2 + (x - 2)^2 + (x - 4)^2 + \dots + (x - 2020)^2.$$

3.4.2. («Росатом», 2018, 8.3) В строчку записаны все целые числа от 1 до 2017. Возможно ли перед ними поставить знаки \pm так, чтобы их сумма равнялась 2019?

3.4.3. («Надежда энергетики», 2016, 8.3) Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n - 1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M .

3.4.4. («Курчатов», 2023, 8.4) На ста карточках написаны числа $1, 2, 2^2, \dots, 2^{99}$ (на каждой карточке по одному числу из перечисленных). Влад хочет произвольно разбить все эти карточки на две непустые группы. Затем он в каждой группе вычислит сумму чисел и из большей суммы вычитет меньшую. Сколько различных значений может принимать такая разность?

3.4.5. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.6) Дан набор из 30 гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньше, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите общий вес гирь.

3.4.6. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2022.6) Докажите, что для любого целого неотрицательного числа k , не превосходящего $\frac{2022 \cdot 2021}{2}$, существует такие 2022 числа, что все их $\frac{2022 \cdot 2021}{2}$ попарные суммы различны и среди этих сумм ровно k положительных.

3.5 Целая и дробная части

Дополнительные задачи — в листке [Целая и дробная части](#).

3.5.1. («Надежда энергетики», 2022, 6.2) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] = 2x + 4.$$

3.5.2. («Надежда энергетики», 2022, 7.5) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{10} \right] + \left[\frac{x+1}{10} \right] + \dots + \left[\frac{x+9}{10} \right] = x^2.$$

3.5.3. («Надежда энергетики», 2022, 8.4) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{2022} \right] + \left[\frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022} \right] = x^{2022} + x - 1.$$

3.5.4. («Надежда энергетики», 2020, 8.3) На координатной плоскости выделен квадрат K с вершинами в точках $(0, 0)$ и $(10, 10)$. Изобразите внутри этого квадрата множество M точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] < [y],$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a (то есть наибольшее целое число, не превосходящее a ; например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $[1/9] = 0$, $[-1,7] = -2$). Какую часть площади квадрата K составляет площадь множества M ?

3.5.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 8.2, 9.2) Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$?

Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a , то есть наибольшее целое число, не превосходящее a .

3.5.6. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 8.3, 9.3) Решите уравнение:

$$[20x + 23] = 20 + 23x.$$

Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a .

3.5.7. («Курчатов», 2022, 8.2) Гоша ввел в калькулятор натуральное число. Затем он 3 раза совершил следующую операцию из двух действий: сначала извлек квадратный корень, а затем у полученного числа взял целую часть. В итоге у него получилось число 1. Какое наибольшее число мог изначально ввести Гоша?

Напомним, целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

3.5.8. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2020.5*) Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей. Напомним, что *целая часть* $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x (например, $[1,3] = 1$), а дробная часть $\{x\}$ числа x задаётся формулой $\{x\} = x - [x]$.

3.6 Линейная функция

3.6.1. (*Всеросс., 2021, МЭ, 8.5*) Два графика линейных функций пересекаются при $x = 2$. При $x = 8$ значения отличаются на 8. При $x = 20$ значение одной из функций равно 100. Чему может быть равно значение другой функции?

3.6.2. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2021.1*) Прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + d$, $y = dx + a$ ограничивают квадрат. Чему может равняться площадь этого квадрата (укажите все возможности)?

3.7 Исследование функций

Дополнительные задачи — в листке [Исследование функций](#).

3.7.1. (*«Шаг в будущее», 2017, 8.4*) Обозначим $\min(a; c)$ наименьшее из чисел a и c . Постройте график функции

$$y = \min(x + 2; x^2 - 6x + 8),$$

и с его помощью решите неравенство $\min(x + 2; x^2 - 6x + 8) \geq 0$.

Указание. Если при каких-то значениях аргумента x значения a и c совпадают, включаем в график функции любой из них.

3.7.2. (*«Шаг в будущее», 2016, 8.5*) Построить график функции $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - |x - 3|), & -4 \leq x < 4, \\ x^2 - 12x + 32, & -4 < x < 6, \\ \frac{(3x - 24)(x - 11)}{x - 8} + 11, & 6 < x < 10, \\ \frac{34 - 3x}{x - 11}, & 10 < x < 11. \end{cases}$$

1. Указать область значения и область определения функции.
2. Написать уравнения всех прямых, проходящих через точку $A(-4; -4)$ и имеющих с графиком функции единственную общую точку.

3.8 Доказательство неравенств

Дополнительные задачи — в листках

- [Доказательство неравенств](#)

• Доказательство неравенств (new)

3.8.1. (САММАТ, 2022, 8.1) Пусть y — действительное число, отличное от нуля. Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y^2}{2} = 0$. Докажите, что $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

3.8.2. (САММАТ, 2022, 8.2) Докажите, что для последовательности чисел

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$$

выполняется следующее неравенство:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

3.8.3. (САММАТ, 2021, 8.4) Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2021} < \frac{1}{2}.$$

3.8.4. («Бельчонок», 2021, 8.5) Числа a, b, c удовлетворяют условиям: $a + b + c = 0$, $abc < 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} > 0.$$

3.8.5. («Бельчонок», 2021, 8.5) Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

Докажите, что $0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2$.

3.8.6. («Бельчонок», 2021, 8.5) Известно, что для положительных чисел a и b при некотором натуральном $n \geq 2$ выполняются соотношения

$$a^n = a + 1, \quad b^{2n} = 3a + b.$$

Можно ли определить, какое из чисел a и b больше другого?

3.8.7. (Олимпиада КФУ, 2022, 8.5) Положительные действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенствам

$$a^2 < b + c, \quad b^2 < c + a, \quad c^2 < a + b.$$

Докажите, что все они меньше 2.

3.8.8. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2022.7) Положительные числа a, b, c и d не превосходят единицы. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \geq \frac{1}{4} + (1-a)(1-b)(1-c)(1-d).$$

3.9 Целочисленная оптимизация

Дополнительные задачи — в листке [Целочисленная оптимизация](#).

3.9.1. («Росатом», 2016, 8.3) Найти ближайшую к числу 5 дробь вида $\frac{19p-3}{p-2}$, где p — целое число.

3.9.2. («Росатом», 2015, 8.4) Среди обыкновенных дробей вида $\frac{p}{q}$, для которых $p + q = 55$, найти дробь, наименее удаленную на числовой прямой от числа $\frac{3}{4}$.

3.9.3. («Бельчонок», 2019, 8.4) Бельчонок прошёл в финал математического конкурса. Перед ним лежат 15 шишек, 15 грибов и 15 ягод. Бельчонку требуется выбрать 15 из 45 этих предметов так, чтобы заработать максимальное количество баллов. Баллы начисляются следующим образом. За каждую шишку бельчонок получает один балл. За каждый гриб — количество баллов, равное удвоенному количеству выбранных шишек. За каждую ягоду — количество баллов, равное утроенному количеству выбранных грибов. Какое максимальное количество баллов может получить бельчонок?

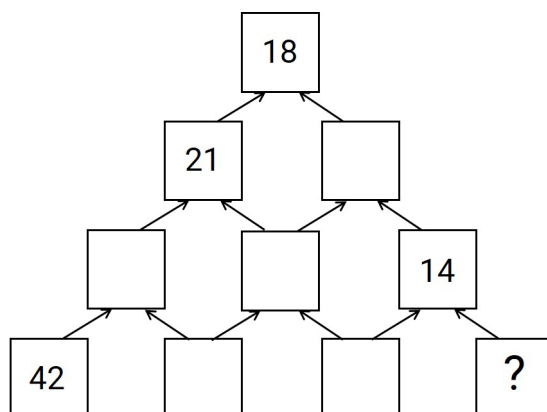
3.9.4. («Бельчонок», 2019, 8.4) Бельчонок прошёл в финал математического конкурса. Перед ним лежат 25 шишек, 25 грибов и 25 ягод. Бельчонку требуется выбрать 25 из 75 этих предметов так, чтобы заработать максимальное количество баллов. Баллы начисляются следующим образом. За каждую шишку бельчонок получает один балл. За каждый гриб — количество баллов, равное удвоенному количеству выбранных шишек. За каждую ягоду — количество баллов, равное утроенному количеству выбранных грибов. Какое максимальное количество баллов может получить бельчонок?

3.9.5. («Росатом», 2017, 8.4) На границе шахматной доски отмечены четыре клетки такие, что их центры A, B, C, D являются вершинами квадрата. Найти наименьшее возможное значение площади квадрата $ABCD$, если площадь одной клетки шахматной доски равна 16.

3.10 Средние величины

Дополнительные задачи — в листке [Среднее арифметическое и среднее геометрическое](#).

3.10.1. (Всеросс., 2023, ШЭ, 8.1) Клетки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждым двумя соседними числами записали их среднее арифметическое. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в правой нижней клетке? (Среднее арифметическое двух чисел — это их сумма, разделённая на 2.)



3.10.2. («Надежда энергетики», 2018, 8.3) Число b является средним арифметическим чисел a и c . Найдите все упорядоченные тройки (a, b, c) таких чисел, для которых хотя бы одно из чисел $1/a, 1/b, 1/c$ является средним арифметическим двух других.

3.10.3. («Росатом», 2022, 8.3) В строительной бригаде, состоящей из рабочих и бригадира, средний возраст рабочих на 16 лет меньше возраста бригадира, а бригадир на 12 лет старше среднего возраста членов бригады. Сколько рабочих в бригаде?

3.10.4. («Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 8.4, 9.3) На доске записано несколько (более двух) последовательных целых чисел.

а) Докажите, что можно стереть одно число так, чтобы среднее арифметическое оставшихся чисел было целым.

б) Какое число k (удовлетворяющее свойству п. а)) можно стереть, если записано сто чисел: $1, 2, \dots, 100$? Укажите все возможные значения k .

3.10.5. («Бельчонок», 2022, 8.4) Миша в течение недели каждый день срывал по яблоку и взвешивал его. Все яблоки весили по-разному, но вес каждого яблока был равен целому числу граммов и колебался от 221 грамма до 230 граммов (включительно). Миша также вычислял средний вес всех сорванных яблок, и он каждый раз был целым числом. Яблоко, сорванное в седьмой день, весило 225 граммов. Сколько весило яблоко, сорванное в шестой день?

3.10.6. («Шаг в будущее», 2020, 8.6) Средняя продолжительность жизни в стране Гондор составляет 64 года. А средняя продолжительность жизни в стране Нуменор составляет 92 года. Средняя продолжительность жизни в двух этих странах 85 лет. Во сколько раз отличается население Гондора от населения Нуменора?

3.11 Последовательности

Дополнительные задачи — в листке [Последовательности](#).

3.11.1. («Надежда энергетики», 2018, 8.1) В ряд выписаны 100 ненулевых чисел. Каждое число кроме первого и последнего равно произведению двух соседних с ним чисел. Первое число равно 2018. Найдите последнее число в таком ряду.

3.11.2. («Ломоносов», 2022, 7–8.4) Для бесконечной последовательности чисел x_1, x_2, x_3, \dots при всех натуральных $n \geq 4$ выполняется соотношение $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. Известно, что $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$. Найдите x_{2022} .

3.11.3. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 7–8.5, 9.4) Дана последовательность чисел, члены которой удовлетворяют соотношению:

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

при всех $n = 4, 5, 6, \dots$. Найдите b_{2023} , если известно, что $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 2$.

3.11.4. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.8) Можно ли отметить в ряду всех натуральных чисел бесконечно много чисел так, чтобы разность любых двух отмеченных чисел (где из большего вычитается меньшее) была квадратом натурального числа?

Глава 4

Алгебраические уравнения и неравенства

4.1 Квадратные уравнения

Дополнительные задачи — в листке [Квадратные уравнения](#).

4.1.1. (САММАТ, 2022, 8.10) Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$? Ответ обоснуйте.

4.1.2. (САММАТ, 2023, 8.10) Дано уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$, x_1, x_2 — его корни, причем $x_1^2 + x_2^2 = 13$. Найти $x_1 + x_2$.

4.1.3. (Открытая олимпиада, 2022, 8.1) Квадратные уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + ax + b = 0$ имеют по одному корню. Среди чисел p, q, a, b есть 16, 64 и 1024. Каким может быть четвёртое число?

Если возможных ответов несколько, в систему введите больший из них, а в письменном решении укажите все.

4.1.4. (Открытая олимпиада, 2021, 8.1) Петя придумал приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0,$$

корнями которого являются числа x_1 и x_2 . Он сообщил Васе три из четырёх чисел p, q, x_1, x_2 , не указав, где какое. Это оказались числа 1, 2, -6 . Каким было четвёртое число?

4.1.5. (Открытая олимпиада, 2023, 8.2) Дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями x_1 и x_2 равен 18, а дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями x_3 и x_4 равен 50. Какое значение может принимать дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями $x_1 + x_3$ и $x_2 + x_4$?

4.1.6. («Шаг в будущее», 2020, 8.2) Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 2020$. Решите уравнение

$$f(3 - x) = f(3x - 1).$$

4.1.7. («Бельчонок», 2022, 8.2) Квадратный трехчлен $px^2 + qx + r$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен

$$3px^2 + 2(p + q)x + (q + r)$$

также имеет два корня.

4.1.8. («Бельчонок», 2019, 8.2) Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} = \frac{25}{12}$.

4.1.9. («Бельчонок», 2019, 8.2) Найдите $\frac{a}{b}$, если $(6a + b)^2 = 25ab$.

4.1.10. («Шаг в будущее», 2018, 8.2) Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами быть равным 7?

4.1.11. («Бельчонок», 2023, 8.2) На доске написан квадратный трёхчлен $g(x) = x^2 + 2022x + 2024$. При своем ходе Катя изменяет на 1 (увеличивает или уменьшает) коэффициент при x . При своем ходе Вася увеличивает или уменьшает на 3 свободный член. Вася выигрывает, если в какой-нибудь момент написанный на доске многочлен $g(x)$ имеет целый корень. Первой ходит Катя. Может ли Катя помешать Васе выиграть при любых его ходах? Как она для этого должна действовать?

4.1.12. (Открытая олимпиада, 2015, 8.2) Числа p и q — различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2 - ax + b = 0$, а числа a и b — различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$. Чему могут быть равны эти числа?

4.1.13. («Бельчонок», 2022, 8.2) Квадратный трёхчлен $x^2 + 3px + p$ имеет корни u и v , а квадратный трёхчлен $x^2 - 4qx + q$ имеет корни $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$. Найдите p и q .

4.1.14. («Бельчонок», 2022, 8.2) Квадратный трёхчлен $x^2 + ux - v$ имеет различные ненулевые корни p и q , а квадратный трёхчлен $x^2 + px - q$ — различные ненулевые корни u и v . Найдите всевозможные значения p , q , u и v .

4.1.15. («Бельчонок», 2023, 8.2) Приведённый квадратный трёхчлен имеет два действительных корня. Коэффициент при x^2 увеличили на 2, а коэффициент при x и свободный член уменьшили на 4. При этом оба корня трёхчлена увеличились на 1. Найдите исходный квадратный трёхчлен.

4.1.16. («Бельчонок», 2022, 8.2) Оба корня квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ увеличили на 3, после чего получились корни трёхчлена $x^2 - 2px - q$. Найдите p и q .

4.1.17. («Росатом», 2021, 8.4) Для каких простых чисел p и q квадратное уравнение

$$x^2 + px + 3q = 0$$

имеет целые корни?

4.1.18. (Открытая олимпиада, 2019, 8.3) Какое наибольшее количество различных приведённых квадратных уравнений может быть выписано на доске, если известно, что любые два из них имеют общий корень, а никакие четыре не имеют корня, общего для всех?

4.1.19. (Открытая олимпиада, 2017, 8.4) Даны три квадратных уравнения со старшим коэффициентом 3 и различными неотрицательными дискриминантами. Может ли дискриминант каждого из них являться корнем двух оставшихся уравнений?

4.1.20. (*Открытая олимпиада, 2020, 8.6*) Три различных числа a, b, c таковы, что

$$4a + 2b + c = 0.$$

Вася составил шесть квадратных уравнений, в каждом из которых все эти три числа являются коэффициентами, но в разном порядке. Какое наибольшее количество этих уравнений может не иметь корней?

4.1.21. (*Открытая олимпиада, 2016, 8.8*) На доске выписаны все трёхзначные натуральные числа, первая цифра которых нечётна и больше 1. Какое наибольшее количество квадратных уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно составить, используя в качестве a, b и c данные числа, каждое не больше одного раза так, чтобы все эти уравнения имели корни?

4.1.22. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.8*) Десятичную запись четырёхзначного числа АБВГ, состоящего из различных цифр, разбили на три части тремя способами, после чего составили три квадратных уравнения $Ax^2 + Bx + ВГ = 0$, $Ax^2 + БВx + Г = 0$ и $АБx^2 + Вx + Г = 0$. Оказалось, что все они имеют корни. Найдите все возможные значения АБВГ.

АБ, БВ и ВГ здесь не произведения цифр, а двузначные числа. Не только в записи числа АБВГ, но и в записях этих двузначных чисел первая цифра не может быть равна 0.

4.1.23. (*ММО, 2023, 8.1*) Даны три различных ненулевых числа. Петя и Вася составляют квадратные уравнения, подставляя эти числа в качестве коэффициентов, но каждый раз в новом порядке. Если у уравнения есть хотя бы один корень, то Петя получает фантик, а если ни одного, то фантик достаётся Васе. Первые три фантика достались Пете, а следующие два — Васе. Можно ли определить, кому достанется последний, шестой фантик?

4.2 Системы уравнений

Дополнительные задачи — в листке [Системы алгебраических уравнений](#).

4.2.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.2*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y^2 - 6y + 5}{x + 4} = x, \\ y = x^2 + 4x + 1. \end{cases}$$

4.2.2. (*«Шаг в будущее», 2022, 8.2*) Найдите все значения x и y , при которых выполнены оба уравнения

$$\begin{cases} x\sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 9 + 4\sqrt{3}} - 2y = y\sqrt{(1 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}, \\ xy = 6 + 2x - 3y. \end{cases}$$

4.2.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.2*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 2xy + 4, \\ \frac{(y + 2) \cdot (x - 4)}{x^2 - 6x + 8} = x - 2. \end{cases}$$

4.2.4. («Шаг в будущее», 2019, 8.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y-x+1}{x^2-3x} = 1, \\ y^2+5+2xy = 6y+6x-x^2. \end{cases}$$

4.2.5. («Шаг в будущее», 2020, 8.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2+xy = 15, \\ x^2+xy = 10. \end{cases}$$

4.2.6. («Надежда энергетики», 2017, 8.1) Найдите числа x, y, z из уравнений

$$\begin{cases} 1+x+y = xy, \\ 2+y+z = yz, \\ 5+z+x = zx. \end{cases}$$

4.2.7. («Курчатов», 2023, 8.3) Найдите все тройки положительных чисел (a, b, c) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a+b = b^2+c^2+2bc, \\ b+c = c^2+a^2+2ac, \\ c+a = a^2+b^2+2ab. \end{cases}$$

4.2.8. (Открытая олимпиада, 2017, 8.3) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 6(x+y), \\ xz = 4(x+z), \\ yz = 2(y+z). \end{cases}$$

4.2.9. («Высшая проба», 2017, 8.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+z}{2}, \\ \sqrt{y} = \frac{z+x}{2}, \\ \sqrt{z} = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

и доказать, что других решений, кроме найденных, нет.

4.2.10. («Надежда энергетики», 2016, 7.4, 8.4) Числа x, y, z таковы, что отношения

$$\frac{x+y}{z}, \quad \frac{x+z}{y}, \quad \frac{y+z}{x}$$

принимают одинаковое значение. Найдите его

4.3 Уравнения с модулем

Дополнительные задачи — в листке [Уравнения с модулем](#).

4.3.1. («Шаг в будущее», 2023, 8.1) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{-x+4-\frac{4}{x}}}{|2x^2-6-x|} = \frac{1}{7\sqrt{-x}}.$$

4.3.2. («Шаг в будущее», 2021, 8.2) Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} - \frac{3\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}} - |x-4| = 0.$$

4.4 Разные уравнения и неравенства

4.4.1. (САММАТ, 2021, 8.5) Решите уравнение $x^2 + x^{10} = 2x^{12}$. Ответ обосновать.

4.4.2. (САММАТ, 2023, 8.8) Решить уравнение

$$4\sqrt{x-3} - \frac{1}{16}x^2 = 3.$$

4.5 Минимаксные задачи

Дополнительные задачи — в листке [Минимаксные задачи в алгебре](#).

4.5.1. («Шаг в будущее», 2022, 8.2) Найдите все варианты троек $(x; y; z)$, при которых выполняется уравнение

$$\sqrt{|2x|+x-6} + \sqrt{|2y|\cdot|2-x|} + \sqrt{|2z|+|x-2|\cdot|x+6|} = 0.$$

4.5.2. («Шаг в будущее», 2019, 8.2) Найдите значения переменных x и y , при которых выполняется равенство:

$$\left(\frac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x} - 1\right)^2 + (x^2+4x-y-2)^2 = 0.$$

4.5.3. («Шаг в будущее», 2018, 8.1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0, \\ y^2 + 2z + 1 = 0, \\ z^2 + 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

4.5.4. («Ломоносов», 2013, 8.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 1 = 0, \\ y^2 - 4z + 7 = 0, \\ z^2 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

4.5.5. («Росатом», 2022, 8.2) Найти числа x и y , удовлетворяющие уравнению

$$(4y - 3x)^2 + 27x^2 + 4(y - 2)^2 = 12.$$

4.5.6. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.5, 9.3) Решите уравнение

$$(\sqrt{x})^{2016} + (\sqrt{1-x})^{2016} = 1.$$

4.6 Плоские множества

Дополнительные задачи — в листке [Плоские множества](#).

4.6.1. («Шаг в будущее», 2022, 8.4) Известно, что окружность с центром $E(0; \frac{1}{3})$ проходит через точку $K(\frac{1}{3}; \frac{1+\sqrt{8}}{3})$. Какую площадь имеет фигура, ограниченная этой окружностью и графиками функций $y = 3 - |x|$ и $5y - x = -9$?

4.6.2. (САММАТ, 2021, 8.9) На некоторой планете при изучении геометрии на плоскости расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в декартовой ортогональной системе координат определяют по формуле: $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Построить в этой геометрии окружность с центром в точке $(2, 1)$ и радиусом $R = 3$ и найти длину этой окружности.

Глава 5

Текстовые задачи

5.1 Движение

Дополнительные задачи — в листке [Текстовые задачи](#).

5.1.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 8.5*) Из города в деревню выехал автомобиль, одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Когда автомобиль и велосипедист встретились, автомобиль сразу же развернулся и поехал обратно в город. В итоге велосипедист приехал в город на 35 минут позже автомобиля. Сколько минут затратил велосипедист на весь путь, если известно, что его скорость в 4,5 раза меньше скорости автомобиля?

5.1.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.1, 8.1*) Перед соревнованиями по бегу Петя планировал бежать всю дистанцию с постоянной скоростью V . Однако, узнав результаты соперников, Петя решил, что нужно повысить запланированную скорость на 25%. С такой повышенной скоростью он пробежал половину дистанции, но устал, так что вторую половину дистанции он бежал со скоростью, на 20% меньшей скорости V . Какое время показал Петя: больше или меньше запланированного?

5.1.3. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.1, 9.1*) Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т. д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

5.1.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.2, 7–8.1*) Из пункта A в пункт B выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист прибыл в пункт B , сразу же развернулся и отправился обратно в пункт A . В этот момент велосипедист уже проехал 10 км. Когда велосипедист проехал ещё 2 км, он встретил возвращающегося мотоциклиста. Найдите расстояние между пунктами A и B .

5.1.5. (*«Надежда энергетики», 2021, 8.1*) Авиалайнер находился в непрерывном полете 330 минут. Известно, что в течение любого промежутка времени длительностью в один час (в течение указанного времени) он преодолевал ровно 900 км. Можно ли утверждать, что средняя скорость лайнера составляла 900 км/ч?

5.1.6. («Росатом», 2022, 8.1) Соревнования по картингу проходят на круговой трассе. Машина Пети самая медленная, у Вовы и Славы — быстрее на 7,2 км/ч и 10,8 км/ч соответственно. Стартовали все трое одновременно, в одном направлении. Сколько раз в течении первого часа соревнования, не включая момент старта, картинги ребят окажутся в одной точке трассы, если длина трассы 300 м? (ширину трассы не учитывать)

5.1.7. («Росатом», 2021, 8.1) Петя добирается от дома до школы на автобусе. На полпути от дома до школы автобус пересекает железнодорожные пути. В понедельник автобус простоял на переезде 5 минут и, сохраняя прежнюю скорость, доехал до школы. Во вторник автобус двигался до переезда с той же скоростью, но простояв на переезде на 10 мин. дольше, чем в понедельник, вынужден был увеличить скорость вдвое, чтобы общее время поездки осталось неизменным. Сколько времени заняла поездка от дома до школы в среду, когда переезд оказался свободным?

5.1.8. («Росатом», 2020, 8.1) Паша и Даша отправились из дома на велосипедную прогулку. Паша передвигается на велосипеде со скоростью 12 км/ч, Даша — 8 км/ч. Проехав некоторый путь, Паша остановился и пошел пешком, ожидая, что Даша его догонит. Даша догнала Пашу, преодолев путь в два раза больший, чем путь, пройденный Пашей до остановки. С какой скоростью Паша идет пешком?

5.1.9. («Росатом», 2018, 8.1) Саша и Маша, катаясь на коньках по кругу в одном направлении, встречались, когда Саша в очередной раз обгонял Машу. После очередной встречи, Саша быстро развернулся и поехал с той же скоростью в противоположном направлении. После этого он стал встречать Машу в три раза чаще. Во сколько раз Саша едет быстрее Маши?

5.1.10. (Всесиб., 2018, 8.2) Матвей вышел из Тотьмы, а одновременно с ним Пётр выбежал навстречу из Калуги по той же дороге. В одинаковых условиях скорости мальчиков относятся как 2 : 3 и постоянны. В какой-то момент на их пути начинается бездорожье (возможно, в различное время) и продолжается до самого момента встречи. На бездорожье скорость каждого падает в два раза. Как относятся расстояния, пройденные по бездорожью Петром и Матвеем, если они встретились ровно посередине между городами, а бездорожье составляет $\frac{2}{3}$ пути между Калугой и Тотьмой?

5.1.11. («Шаг в будущее», 2016, 8.2) Винни-Пух и Пятачок начинают бегать вокруг круглого пруда, находясь на диаметрально противоположных берегах. После 10 мин бега Пятачок в третий раз обогнал Винни-Пуха. Через сколько времени он обгонит Винни Пуха в четвертый раз?

5.1.12. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.3, 7–8.2, 9.2) Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

5.1.13. («Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 8.3, 9.2) Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они ехали с постоянными скоростями. С момента встречи первый велосипедист ехал до пункта B 40 минут, а второй до пункта A — полтора часа. Найдите время от начала движения до встречи и отношение скоростей велосипедистов.

5.1.14. (*«Шаг в будущее», 2016, 8.3*) Когда катер проплывал по реке мимо городской пристани, от него отвязался спасательный круг. Пропажа была замечена капитаном только через 15 минут. Повернув назад, он догнал потерю в 250 метрах от пристани. Найти скорость течения реки. Ответ дать в км/час.

5.1.15. (*САММАТ, 2021, 8.6*) Дедушка с внуком одновременно пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/час, под гору — дедушка 8 км/час, внук — 20 км/час, в гору — дедушка 6 км/час, внук — 4 км/час. Оба проехали по одному и тому же маршруту. Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спусков или подъемов на их пути, если первым вернулся а) внук; б) дед?

5.1.16. (*САММАТ, 2021, 8.6*) Миша, Петя и Коля одновременно стартовали в зачете на 150 метров. Когда Миша финишировал, Петя находился в 20 метрах позади него, а когда финишировал Петя — Коля находился позади него в 15 метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Миша и Коля, когда Миша финишировал? Предполагается, что скорости мальчиков постоянны и различны.

5.1.17. (*«Курчатов», 2020, 8.3, 9.2*) Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Боливаре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

5.1.18. (*«Надежда энергетики», 2018, 8.4*) В 9 часов утра из порта О в порт Е вышли корабли «Анин» и «Ванин». В тот же момент из порта Е в порт О отправился корабль «Санин». Все три судна идут одним курсом («Санин» навстречу «Анину» и «Ванину») с постоянными, но различными скоростями. В 10 часов утра «Ванин» находился на одном расстоянии от «Анина» и «Санина». В 10 часов 30 минут «Санин» находился на одинаковом расстоянии от «Анина» и «Ванина». В какой момент «Анина» окажется посередине между «Ваниным» и «Саниным»?

5.1.19. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.4*) По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.

В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 20 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через полчаса третий бегун впервые встретился с первым.

За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?

5.1.20. (*«Надежда энергетики», 2021, 8.5*) По трем параллельным железнодорожным путям движутся три поезда. Первый поезд движется в том же направлении, что и второй, но с меньшей скоростью. Второй поезд вдвое длиннее первого и проходит мимо него за 2 минуты 6 секунд. Третий поезд в три раза длиннее первого. Он движется в противоположном направлении относительно первых двух и проходит мимо второго за 30 секунд. За какое время третий поезд пройдет мимо первого?

5.1.21. («Надежда энергетики», 2015, 8.5) Почтальон Печкин работает на почте с 8-00 до 16-00. В начале рабочего дня он отправляет одновременно тележки для писем, бандеролей и посылок. Тележка для писем уезжает на 10 минут, тележка для бандеролей — на 15 минут и тележка для посылок — на 25 минут. Затем тележки возвращаются, и за 5 минут Печкин должен погрузить на них соответственно коробку с письмами, бандеролями или посылками. Если оказалось, что тележки встречаются у пункта погрузки, то Печкин грузит ту тележку, которая приходит реже, а другая уезжает пустой. Сколько каких тележек с грузом сможет отправить Печкин за рабочий день?

5.1.22. («Шаг в будущее», 2018, 8.5) Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист, двигавшийся со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии 20 км от пункта A . Прибыв в пункт B , мотоциклист через 48 мин выехал обратно в пункт A и встретился с велосипедистом спустя 2 ч 40 мин после выезда велосипедиста из пункта A . Найдите скорость велосипедиста.

5.1.23. («Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 7.5, 8.5) Андрей и Сева собрались в гости к Боре. Андрей находится в пункте A , а Боря — в пункте B на расстоянии 30 км от пункта A по прямому шоссе. Сева находится в пункте C ровно посередине между A и B . Друзья решили отправиться одновременно: Андрей на велосипеде, а Сева пешком, но Андрей оставит велосипед в условленном месте, чтобы им воспользовался Сева (Андрей закончит путь пешком). На велосипеде мальчики двигаются со скоростью 20 км/час, а пешком — со скоростью 5 км/час. Где надо оставить велосипед, чтобы друзья смогли вместе как можно раньше попасть к Боре?

5.1.24. (Открытая олимпиада, 2015, 8.6) Реки Штука и Турка в некоторой точке сливаются в реку Штукатурка. Города A и B находятся на реках Штука и Турка соответственно, причём город A в два раза дальше от точки слияния, чем город B . Пароход на путь из A в B по этим рекам тратит столько же времени, сколько и на путь из B в A . Докажите, что скорости течений Штуки и Турки отличаются не более, чем в два раза.

5.1.25. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.1) Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата $ABCD$. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет **строго** меньше половины диагонали квадрата.

5.1.26. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.6) Петя и Вася стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Васи вдвое больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Вася может менять направление бега, если он перед этим пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Вася может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним.

5.2 Работа

Дополнительные задачи — в листке [Текстовые задачи](#).

5.2.1. (*«Покори Воробьёвы горы!»*, 2022, 7–8.2, 9.1) Работники должны были вскопать несколько одинаковых грядок. В первый день работники вскопали 10 грядок, причем каждый вскопал одинаковое количество (не обязательно целое число) грядок. На следующий день некоторые работники заболели COVID-19 и на работу вышло только 7 человек. Пришедшие работали половину рабочего дня с такой же производительностью, как и в первый день, и доделали оставшуюся работу.

Сколько всего грядок было на подсобном участке?

5.2.2. (*Всеросс.*, 2020, МЭ, 8.2) На скотном дворе живут шесть животных. Лошадь съедает копну сена за 1,5 дня, бык — за 2 дня, корова — за 3 дня, телёнок — за 4 дня, баран — за 6 дней, а коза — за 12 дней. Объясните, каким образом можно разбить данных животных на две группы так, чтобы этим группам хватало одной копны сена на одно и то же время.

5.2.3. (*«Росатом»*, 2019, 8.2) Саша, Маша и Даша ели конфеты. Саша вместе с Машей съели бы все конфеты в два раза быстрее, чем смогла бы это сделать Даша в одиночку. За то Маша вместе с Дашей смогли бы съесть конфеты в три раза быстрее, чем сделала бы это Саша одна. Во сколько раз быстрее съели бы они конфеты всей компанией, чем могла бы это сделать одна Даша?

5.2.4. (*«Надежда энергетики»*, 2021, 8.3) На прокладке газопровода работают три бригады с постоянной интенсивностью. Первая и третья бригады, работая вместе, за месяц прокладывают 15 км трубы. Все три бригады вместе могут проложить за месяц трубу в два раза длиннее, чем вторая и первая бригады вместе. Сколько километров трубы может проложить в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада вместе с третьей прокладывают участок трубы в четыре раза быстрее, чем его проложила бы одна вторая бригада?

5.2.5. (*«Надежда энергетики»*, 2019, 8.4) В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» — заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» — ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек? (Не забудьте указать единицы измерения.)

5.2.6. (*«Надежда энергетики»*, 2017, 8.5) Рано утром включили насос и начали заполнять резервуар для горючего. В 10 ч утра включили второй насос, который начал откачивать горючее. В 12 ч резервуар был заполнен наполовину, а в 14 ч резервуар заполнился на $\frac{2}{3}$. Каким может быть время самого раннего включения первого насоса?

5.2.7. (*«Шаг в будущее»*, 2022, 8.6) Тренер детской команды сноубордистов взял на соревнование два вида твердых парафинов для обеспечения хорошего сцепления и легкого скольжения. Это бруски одинаковой длины, но разной контактной площади. По опыту прошлых соревнований тренер знает, что бруска с большей контактной площадью хватает на три часа непрерывной работы. На этот раз тренер решил взять помощника. Они вместе начали работать разными брусками-парафинами и к концу соревнования от большего бруска остался вдвое больший кусок, чем от меньшего. На сколько часов рассчитан брусок меньшей контактной площади, если соревнование длилось 2 часа?

5.2.8. («Шаг в будущее», 2022, 8.6) На горно-обогатительный комбинат привозят руду с трех месторождений. Хранилища комбината имеют фиксированный объём. На месторождениях работают люди и техника — невыгодно, чтобы они простаивали. У каждого месторождения своя система доставки, поэтому скорости доставки различны. Управляющий рассчитывает оптимальные способы подвоза руды, чтобы хранилище было заполнено рудой с разных месторождений. Выяснилось, что можно принимать руду со всех трех месторождений сразу в течение 4 часов. Второй вариант заполнения: с первого месторождения возить руду в течение 6 часов, со второго и третьего в течение 2 часов. Проверяется еще один вариант: возить с первого месторождения 5 часов, со второго 3 часа. Сколько часов надо тогда подвозить руду с третьего месторождения, чтобы заполнить хранилище?

5.3 Стоимость

Дополнительные задачи — в листке [Текстовые задачи](#).

5.3.1. (Всесиб., 2020, 8.1) Паша и Саша сделали три одинаковых машинки. Саша сделал пятую часть всей работы. После этого они их продали и разделили выручку пропорционально проделанной работе. Паша заметил, что если он отдаст Саше 400 рублей, а Саша сделает ещё такую же машинку и продаст её, то денег у них будет поровну. Сколько стоит одна машинка?

5.3.2. («Шаг в будущее», 2023, 8.6) В ящике находятся катушки индуктивности двух типов — первый тип содержит 250 витков, а второй 500 витков. Остальные параметры катушек одинаковы. Для изготовления одной катушки на цилиндрический каркас массой 200 г, имеющий диаметр $D = 20$ мм и длину $L = 50$ мм плотно, виток к витку, в несколько слоев наматывают медную проволоку диаметром $d = 1$ мм. Стоимость катушки с намотанной проволокой первого типа составляет 4000 рублей, а второго 6000 рублей. Если округлить массу каждой катушки с намотанной проволокой в граммах до десятков, то общий вес изделий будет равен 9180 граммов. Определите максимальную и минимальную стоимость находящихся в ящике изделий. Считать, что плотность меди равна 10^{-2} г/мм³ и число $\pi = 3$.

(Справочные данные: объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi r h$, где r — радиус основания, h — высота цилиндра.)

5.4 Проценты

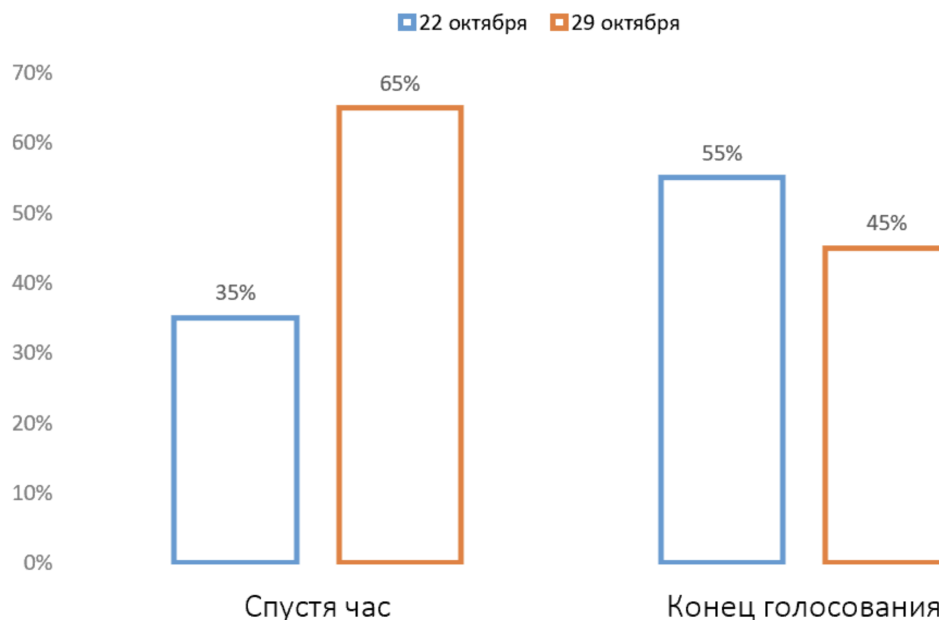
Дополнительные задачи — в листке [Текстовые задачи](#).

5.4.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 8.2*) В чате учеников одной из школ проходило голосование: «В какой день проводить дискотеку: 22 или 29 октября?»

На графике изображено, как голоса распределились спустя час после начала голосования.

Затем в голосовании приняли участие ещё 80 человек, которые голосовали только за 22 октября. После этого голосование завершилось. Итоговое распределение голосов также изображено на графике.

Сколько человек приняли участие в голосовании?



5.4.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 8.1*) В 8а классе 52% девочек. Все ученики класса могут выстроиться в ряд так, чтобы мальчики и девочки чередовались. Сколько учеников в классе?

5.4.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 8.1*) Даны два прямоугольника с горизонтальными и вертикальными сторонами. Горизонтальная сторона второго прямоугольника на 11% больше горизонтальной стороны первого, а вертикальная сторона второго прямоугольника на 10% меньше вертикальной стороны первого.

- У какого из прямоугольников площадь больше и на сколько процентов?
- Найдите отношение сторон первого прямоугольника, если известно, что его периметр на 5% меньше периметра второго.

5.4.4. (*Всесиб., 2017, 8.1*) В вагон загрузили несколько килограммов яблочного джема, среди которого было 20% хорошего и 80% плохого. Каждый день половина имеющегося плохого джема сгнивала, и его выбрасывали. Через несколько дней оказалось, что в вагоне стало 20% плохого и 80% хорошего джема. Сколько дней прошло после загрузки?

5.4.5. (*«Бельчонок», 2022, 8.1*) На доске нарисован прямоугольник. Известно, что если его ширину увеличить на 30%, а длину уменьшить на 20%, то его периметр останется неизменным. Как изменился бы периметр исходного прямоугольника, если его ширину уменьшили бы на 20%, а длину увеличили бы на 30%?

5.4.6. («Шаг в будущее», 2020, 8.1) В одном из районов планеты изучалась сейсмическая активность. 80 процентов всех дней было тихо. Предсказания приборов обещали спокойную обстановку в 64 случаях из ста; причем в 70 процентах всех случаев, когда день был спокойным, прогнозы приборов сбылись. Сколько процентов среди дней с повышенной сейсмоактивностью составляют те, в которых прогнозы не совпали с реальностью?

5.4.7. (Открытая олимпиада, 2020, 8.1) Вася задумал число и записал на доске, во-первых, задуманное число увеличенное на 10%; во-вторых, задуманное число, уменьшенное на 10%; в-третьих, ещё какое-то число. Всегда ли Петя сможет по этим данным узнать Васино число?

5.4.8. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 8.1) Пруд имеет форму прямоугольника. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 20,2%, а за вторые — на 18,6% от первоначальной площади. На какой день пруд полностью замёрзнет?

5.4.9. (Всеросс., 2023, МЭ, 8.2) Олег купил шоколадку за n рублей, а через некоторое время продал её за 96 рублей. Оказалось, что он продал шоколадку ровно на $n\%$ дороже, чем покупал. За сколько рублей Олег купил шоколадку?

5.4.10. («Бельчонок», 2020, 8.2) Бельчата Билли, Вилли и Дилли были кандидатами в президенты леса. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты в сумме набрали 146% голосов. Оказалось, что по ошибке процент голосов за Билли был посчитан не от общего числа проголосовавших, а от числа голосовавших за Билли или Вилли. Остальные проценты были подсчитаны верно. Известно, что за Вилли проголосовало больше 2000 жителей леса. Докажите, что за Билли проголосовало больше 1700 жителей леса.

5.5 Смеси и концентрации

Дополнительные задачи — в листке [Текстовые задачи](#).

5.5.1. («Ломоносов», 2020, 7–8.3) В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе концентрация кислоты будет составлять 5%, а во второй — $23\frac{1}{3}\%$. Какова будет концентрация кислоты в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

5.6 Часы, время, календарь, возраст

Дополнительные задачи — в листке [Текстовые задачи](#).

5.6.1. («Росатом», 2015, 8.1) Петр Иванович родился в двадцатом веке. В 2014 году его возраст был в три раза большим, чем сумма цифр года его рождения. В каком году родился Петр Иванович?

5.6.2. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2020, 5–6.2, 7–8.1) Часы со стрелками показывают полдень. Сколько минут пройдет до ближайшего момента времени, когда прямая, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелкой, пройдет через отметку на циферблате, соответствующую 43 минутам?

5.6.3. («*Ломоносов*», 2023, 5–6.5, 7–8.1) Некто раздобыл вот такие часы. Чтоб от них был хоть какой-то прок, он отломал все стрелки, кроме часовой, и настроил ход механизма так, чтоб часовая стрелка действительно делала оборот за 11 (общепринятых) часов, как утверждает циферблат. Например, если в полночь они показывали 00:00, то за следующие сутки такие часы успеют сделать два полных оборота, и ещё пройти до двух.



Ночью с 28 февраля на 1 марта, в полночь, этот человек настроил часы на 00:00.

Какую долю времени в марте показания этих часов будут совпадать с показаниями нормальных?

5.6.4. («*Надежда энергетики*», 2015, 8.3) Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. В настоящее время сумма их возрастов составляет 65 лет. 9 лет назад эта сумма составляла 40 лет. 4 года назад отец был старше сына в 9 раз. Сколько лет отцу?

5.6.5. («*Надежда энергетики*», 2015, 8.4) После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 45 градусов. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

5.6.6. («*Шаг в будущее*», 2021, 8.6) Марфа Петровна родилась в XX веке. В 2010 году ей было столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году она родилась, если известно, что Марфе Петровне меньше ста лет?

5.7 Разные текстовые задачи

Дополнительные задачи — в листке [Текстовые задачи](#).

5.7.1. (*Всеросс.*, 2023, МЭ, 8.1) В ящике лежат апельсины, груши и яблоки, всего 60 фруктов. Известно, что яблок в 3 раза больше, чем не яблок, а груш в 5 раз меньше, чем не груш. Сколько апельсинов лежит в ящике?

5.7.2. (*Всеросс.*, 2021, МЭ, 8.4) В лес за грибами ходили четыре мальчика и три девочки. Каждый нашёл несколько грибов, всего они собрали 70 штук. Никакие две девочки не собрали поровну, а любые трое мальчиков принесли вместе не менее 43 грибов. У любых двоих детей число собранных грибов отличалось не более чем в 5 раз. Маша собрала больше всех из девочек. Сколько она принесла грибов?

5.7.3. («*Ломоносов*», 2022, 7–8.1) Три друга-штангиста А, Б и В приехали на соревнования. Они все соревновались в одной весовой категории, и один из них стал победителем. Если вес, поднятый штангистом А, сложить с весом, поднятым штангистом Б, получится 220 кг, если сложить веса, поднятые штангистами А и В, то получится 240 кг, а если сложить веса, поднятые штангистами Б и В, то получится 250 кг. Какой вес поднял победитель соревнований?

5.7.4. («Надежда энергетики», 2023, 8.1) Во время ночной смены четверо дежурных съели целый бочонок соленых огурцов. Если бы ассистент Мурр съел в два раза меньше, то от бочонка осталась бы его десятая часть. Если бы лаборант Тротт съел в два раза меньше, то от бочонка осталась бы его восьмая часть. Если бы стажер Глуш съел в два раза меньше, то от бочонка осталась бы его четверть. Какая часть содержимого бочонка осталась бы, если бы в два раза меньше съел ординатор Штосс?

5.7.5. («Надежда энергетики», 2022, 8.1) Стройотряд «Сдвинем горы!» провел акцию по сбору отработанных батареек. Когда командир считал суммарное количество, у него получилось 200 батареек, а каждый из остальных бойцов получил суммарно по 195. Позже выяснилось, что каждый считавший забыл учесть те батарейки, которые принес сам. Сколько всего батареек собрал стройотряд, если он состоит из десяти бойцов и одного командира, а батарейки принесли все его члены?

5.7.6. («Шаг в будущее», 2022, 8.1) На занятии математического кружка Антон предложил отгадать задуманную им обыкновенную дробь и дал 2 подсказки. Если числитель дроби оставить без изменения, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная $1/9$. Если же числитель дроби увеличить на 1, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 1. Через некоторое время ученики попросили еще подсказку. Узнав, что эта дробь больше, чем $1/2$, дали ответ. Какую дробь задумал Антон? В ответ записать дробь без сокращений.

5.7.7. («Шаг в будущее», 2020, 8.1) Творческий конкурс в институт состоял из четырех заданий. Всего абитуриентов было 70 человек. Первое испытание успешно выдержали 35, второе 48, третье 64, четвертое 63 человека, при этом все 4 задания не выполнил никто. Прощедших и третье, и четвертое испытания зачислили в институт. Сколько было зачисленных?

5.7.8. («Надежда энергетики», 2015, 8.1) Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом

1. среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
2. среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Если же выбрать наугад пять линий, то какое максимальное количество среди них могут идти и не в город М, и не в поселок П?

5.7.9. («Покори Воробьевы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.2, 9.1) На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что не знают ни одного языка программирования. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем $1/6$ из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила $5/12$. Сколько всего участников кружка?

5.7.10. («Надежда энергетики», 2020, 8.4) За два дня 50 финансистов собрали средства для борьбы с новым вирусом. Каждый из них внес однократно целое количество тысяч рублей, не превосходящее 100. При этом каждый взнос в первый день не превосходил 50 тысяч, а во второй был больше этой величины; и никакая пара из всех 50 взносов не отличалась ровно на 50 тысяч. Какую сумму собрали?

5.7.11. (*Всеросс., 2022, МЭ, 8.6*) Числа 13, 14, 15, ..., 25 покрашены в пять цветов: одно чёрное число, три красных, три синих, три жёлтых, три зелёных.

Известно, что:

- все четыре суммы трёх одноцветных чисел равны;
- число 13 — красное, 15 — жёлтое, 23 — синее.

1. Найдите чёрное число.

2. Найдите три зелёных числа.

5.7.12. (*«Росатом», 2020, 8.4*) Сколько существует различных наборов из пяти чисел, в которых каждое число равно произведению двух других чисел из этого набора? Наборы, отличающиеся только порядком следования чисел, считать одинаковыми.

5.7.13. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.5*) По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?

5.7.14. (*«Высшая проба», 2021, 8.2*) В коробке лежат шарики двух цветов: синего и красного (оба цвета присутствуют). Известно, что синих шариков больше, а два шарика одного цвета можно вынуть с той же вероятностью, что и два шарика разных цветов. Чему может быть равна разность между числом синих и красных шариков? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Глава 6

Задачи с параметрами

6.1 Линейные уравнения и неравенства с параметрами

Дополнительные задачи — в листке [Параметры. Линейные уравнения и неравенства](#).

6.1.1. («Шаг в будущее», 2019, 8.1) При каких значениях параметра k на прямой $y = kx - 3$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

6.1.2. («Ломоносов», 2020, 7–8.4) Найдите все a , при которых уравнение

$$a^2(x - 2) + a(39 - 20x) + 20 = 0$$

имеет хотя бы два различных корня.

6.1.3. («Шаг в будущее», 2019, 8.1) При каких значениях a системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15a, \\ \frac{1}{a}x + y = 9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.

6.1.4. (САММАТ, 2023, 8.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + az = 2, \\ x + ay + z = -1, \\ ax + y + z = -1. \end{cases}$$

6.2 Параметры и квадратный трёхчлен

Дополнительные задачи — в листках

- [Параметры и квадратный трёхчлен. 1](#)
- [Параметры и квадратный трёхчлен. 2](#)

6.2.1. (*САММАТ, 2021, 8.2*) Вычислить $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + (a - 1)x + 3 + a - 4a^2 = 0.$$

При каких a это уравнение имеет решение?

6.2.2. (*САММАТ, 2021, 8.4*) На координатной плоскости рассматриваются параболы вида $f(x) = 2020x^2 + px + q$, для которых значения параметров p и q удовлетворяют условию $p + q = 2021$. Пересекаются ли эти параболы в одной точке координатной плоскости? Ответ объясните.

6.2.3. (*«Ломоносов», 2015, 8.6, 9.2*) График квадратичной функции

$$f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2015$$

пересекает координатные оси в трёх точках A , B и C . Найдите значение p , при котором произведение длин отрезков $OA \cdot OB \cdot OC$ будет наименьшим.

6.2.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.1*) При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (m + 1)x + 2m - 2 = 0$$

будет наименьшей?

6.2.5. (*«Шаг в будущее», 2022, 8.1*) Найдите все значения параметра a , при которых выполнено $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2 - (a + 2)x - 2a - 4 = 0$.

6.2.6. (*«Шаг в будущее», 2021, 8.1*) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 + ax - a}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

имеет ровно одно решение?

6.2.7. (*«Росатом», 2016, 8.1*) При каких целых a уравнение $(ax - 8)(2x - a) = 0$ имеет ровно два целых решения? Найти эти решения.

6.2.8. (*«Росатом», 2023, 8.2*) При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + (a + 2\sqrt{6})\left(\frac{1}{a} - 2\sqrt{6}\right) = 0$$

целые числа?

6.2.9. (*«Шаг в будущее», 2023, 8.2*) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - x + a - a^2}{x - 2} = 0$$

имеет два различных решения?

6.2.10. («Шаг в будущее», 2021, 8.1) При каких целых значениях параметра a для корней x_1, x_2 уравнения $3x^2 - x(a + 3) + a = 0$ выражение $\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}$ будет натуральным числом?

6.2.11. («Шаг в будущее», 2018, 8.5) При каких целых значениях параметра a выражение

$$\frac{x_1 + x_2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$$

принимает целые значения, если x_1 и x_2 — различные корни уравнения

$$(a - 3)x^2 - 12x + a - 11 = 0?$$

6.2.12. («Шаг в будущее», 2017, 8.5) Найдите вид всех квадратных трехчленов

$$y(x) = ax^2 + bx + k,$$

где a, b, k — заданные постоянные, таких, что для всех значений x выполняется условие $y(0,01x + 1) = y(-0,01x)$.

6.2.13. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.7) Найдите наименьшее возможное значение $x - y$ при условии $x^2 - 2xy - x + y^2 + y \leq 0$.

6.3 Параметры и графики

Дополнительные задачи — в листке [Параметры. Графики](#).

6.3.1. («Шаг в будущее», 2018, 8.3) Найдите все такие k и b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y + 2|x| = 2, \\ y = kx + b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

6.3.2. («Шаг в будущее», 2023, 8.4) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x - 2 + |2x + 2|| = a$$

имеет нечетное количество решений?

6.3.3. («Шаг в будущее», 2021, 8.4) При каких значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости xOy линиями $y = \frac{x}{2} + 1, y = \frac{x}{2} - 1, x = a - 1 - a^2, x = a^2 - 3a + 1$, равна 16?

6.3.4. («Шаг в будущее», 2021, 8.4) При каких значениях параметра b площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости xOy графиками $y = 3|x| - 5$ и $y = |x| + b^2 + 1$, равна 32?

6.3.5. («Шаг в будущее», 2022, 8.4) При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение, если известно, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & \text{если } x \in [0; 5]; \\ x^2 - 2, & \text{если } x \in (-3; 0); \\ 3x + 16, & \text{если } x \in (-4; -3]? \end{cases}$$

6.3.6. («Шаг в будущее», 2020, 8.4) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left| \frac{-4x^4 - (6a + 10)x^3 + (16 - 4a)x^2 - (6a^2 - 14a - 40)x}{(4 - x^2 - a)(3a + 2x + 5)} \right| = \sqrt{a^2 - 2a + 1}$$

имеет одно решение?

6.3.7. («Шаг в будущее», 2020, 8.4) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{ax^2 - 7x^2 - 10ax + 70x + 21a - 147} = 0$$

имеет три решения?

6.3.8. («Шаг в будущее», 2019, 8.4) Найдите, при каких значениях a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение:

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x+2)(x+4) - 3x - 12} \right|, \quad p(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16} + a.$$

6.3.9. («Шаг в будущее», 2019, 8.4) При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$, где

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} + \frac{4x^2 - 5x}{x} \right|, \quad p(x) = |x + a|,$$

имеет одно решение?

6.3.10. («Шаг в будущее», 2019, 8.4) Найдите, при каких значениях параметра a уравнение

$$f(x) = p(x)$$

имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{(x-1)(x-3) + 3x - 5} \right|, \quad p(x) = \sqrt{x^2} + a.$$

6.3.11. («Шаг в будущее», 2019, 8.4) Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 - x^2 - 16x + 16}{(x-2)(x+3) + 2(x+1)} \right|;$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25} + a.$$

6.4 Параметры и симметрия

Дополнительные задачи — в листке [Симметрия в задачах с параметрами](#).

6.4.1. (САММАТ, 2022, 8.3) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + a + 3| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$

имеет единственное решение.

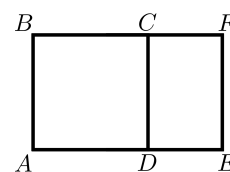
Глава 7

Планиметрия

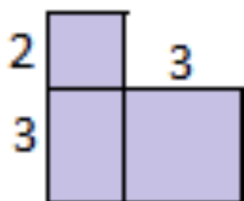
7.1 Построения

7.1.1. (САММАТ, 2023, 8.7) Задан отрезок a . С помощью циркуля и линейки (без масштаба измерения) построить отрезок $b = a \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. Все этапы построения подробно описать.

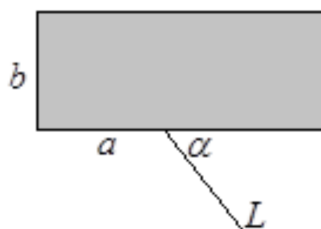
7.1.2. (САММАТ, 2022, 8.6) Задан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 2. К нему пристроен прямоугольник $CDEF$ (см. рис.). При помощи циркуля и линейки построить прямоугольник $CDEF$, подобный прямоугольнику $ABFE$.



7.1.3. («Росатом», 2018, 8.5) С помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, равновеликого фигуре на рисунке.



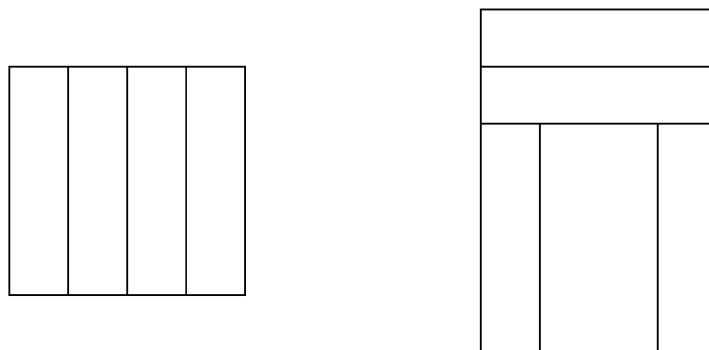
7.1.4. («Росатом», 2019, 8.5) На пути луча L на плоскости возникло препятствие в форме прямоугольника (см. рис.). С помощью циркуля и линейки без делений необходимо достроить воображаемый путь луча вне препятствия (после того, как луч прошел бы сквозь препятствие, не изменив направления). Разрешается производить построения только вне препятствия или на его границе. Все необходимые для этого размеры a , b и угол α — известны.



7.1.5. («Росатом», 2016, 8.5) На плоскости расположены три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Построить на плоскости треугольник MNP , подобный треугольнику ABC , в котором точки A , B и C являются серединами его сторон. Найти площадь такого треугольника, если площадь треугольника ABC равна 4. Возможно ли построить треугольник MNP , подобный треугольнику ABC , на сторонах которого находятся точки A , B и C , но они не являются их серединами?

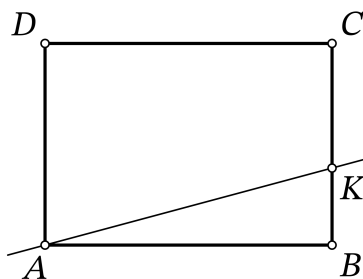
7.2 Прямоугольники и квадраты

7.2.1. (Всеросс., 2021, ШЭ, 8.1) Квадрат разрезали на четыре равных прямоугольника, а из них сложили большую букву П, как на рисунке, периметр которой равен 56.



Чему равен периметр первоначального квадрата?

7.2.2. (Всеросс., 2022, МЭ, 8.2) Дан прямоугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину A и точку K на стороне BC , делит весь прямоугольник на две части, площадь одной из которых в 5 раз меньше площади другой. Найдите длину отрезка KC , если $AD = 60$.



7.2.3. (Всесиб., 2023, 8.3) В квадрате $ABCD$ точка H — середина стороны CD , а K — такая точка на стороне BC , что $KC = 2KB$. Докажите, что KA является биссектрисой угла BKH .

7.2.4. («Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 8.4) На сторонах CD и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно. Оказалось, что $CM + AN = BN$. Докажите, что $\angle CBM = \angle MBN$.

7.2.5. («Шаг в будущее», 2019, 8.3) Площадь квадрата $ABCD$ равна 100. Точки K и L середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки BK и AL пересекаются в точке M . Найти площадь четырехугольника $KMLD$.

7.2.6. (*Открытая олимпиада, 2020, 8.7*) В квадрате $ABCD$ отмечены точки M и N такие, что треугольник AMN — равносторонний. Могут ли при этом все треугольники ABM , BCM , CMN , CDN и ADN быть равнобедренными?

7.3 Прямоугольный треугольник

Дополнительные задачи — в листке [Прямоугольный треугольник](#).

7.3.1. (*«Шаг в будущее», 2023, 8.3*) В прямоугольном треугольнике с острым углом, равным 45° , прямая, параллельная гипотенузе, отсекает от треугольника равнобедренную трапецию, которая делится своими диагоналями на четыре равнобедренных треугольника. Найдите угол между диагоналями трапеции.

7.3.2. (*«Курчатов», 2020, 8.4*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH . На продолжении гипотенузы BC за точку C нашлась точка X такая, что

$$HX = \frac{BH + CX}{3}.$$

Докажите, что $2\angle ABC = \angle AXC$.

7.3.3. (*«Росатом», 2022, 8.5*) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC расположен центр окружности, проходящей через вершину A и касающейся катета BC в точке D . Найти отношение $CD : DB$, если угол при вершине C треугольника равен 30° .

7.3.4. (*«Курчатов», 2023, 8.5*) На катетах AB и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle PMQ = 90^\circ$, где точка M — середина гипотенузы BC . Найдите длину отрезка PQ , если известно, что $BP = 5$ и $CQ = 12$.

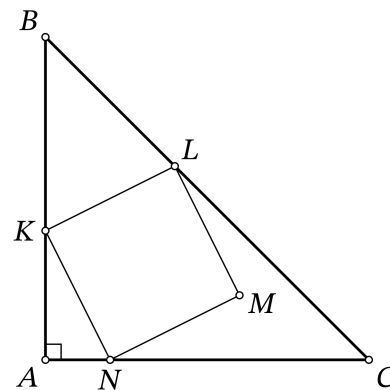
7.3.5. (*«Высшая проба», 2023, 8.5*) Треугольник ABC таков, что $BC < AC < AB$. Точка M — середина стороны AC . На стороне AB нашлась точка K такая, что $CK = BC$ и $BK = AC$. Докажите, что $\angle BAC = 2\angle ABM$.

7.3.6. (*«Надежда энергетики», 2017, 8.4*) Два брата получили в наследство покос в форме прямоугольного треугольника, катеты которого соотносятся как $3 : 4$. Чтобы разделить его, они выходят из вершины прямого угла (каждый по своему катету) и идут по краю покоса (по периметру) с одинаковой скоростью до встречи друг с другом. Точку встречи соединяют с началом их пути и получают две треугольные части.

1. Получились ли у братьев части одинаковой площади?
2. Сколько существует различных прямоугольных треугольников с другим соотношением катетов, для которых построенные указанным способом части будут равны по площади?

7.3.7. (*«Шаг в будущее», 2021, 8.5*) В прямоугольном $\triangle ABC$ с углом $\angle C = 90^\circ$, точка M — середина отрезка AB , точка K делит отрезок AC в отношении $1 : 2$, считая от точки A . Прямая KM пересекает отрезок BC в точке L и перпендикулярна CM . Найти величину $\angle CLK$ и отношение отрезков $BE : LM$.

7.3.8. (*Всеросс., 2022, МЭ, 8.7*) Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A . Квадрат $KLMN$ расположен, как на рисунке: точки K, L, N лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно, а точка M расположена внутри треугольника ABC . Найдите длину отрезка AC , если известно, что $AK = 7, AN = 3$.

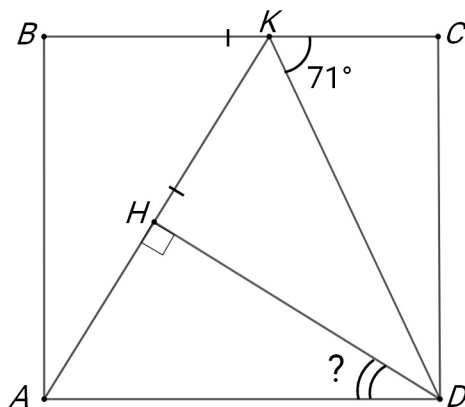


7.3.9. (*Открытая олимпиада, 2017, 8.7*) Дан прямоугольный треугольник ABC , у которого угол A равен 60 градусам, а гипотенуза AB равна $4 + 4\sqrt{3}$. Через вершину B провели прямую p параллельную AC . На прямой p поставили точки D и E таким образом, что $AB = BD, BC = BE$. F — точка пересечения прямых AD и CE . Найдите, чему может быть равен периметр треугольника DEF .

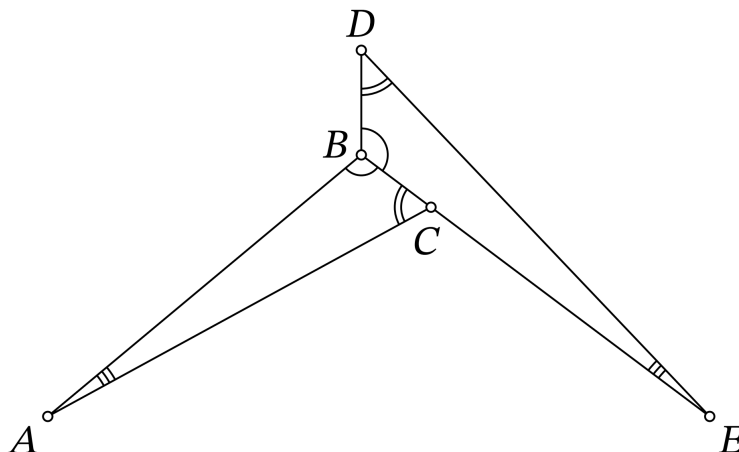
7.3.10. (*ММО, 2023, 8.3*) Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30 градусов одна биссектриса в два раза короче другой.

7.4 Углы треугольника

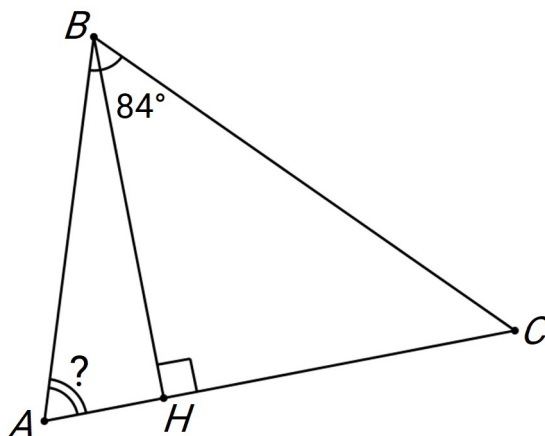
7.4.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 8.3*) На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K . Точка H на отрезке AK такова, что $\angle AHD = 90^\circ$. Оказалось, что $AK = BC$. Сколько градусов составляет угол ADH , если $\angle CKD = 71^\circ$?



7.4.2. (Всеросс., 2022, ШЭ, 8.7) На рисунке изображены два равных треугольника: ABC и EBD . Оказалось, что $\angle DAE = \angle DEA = 37^\circ$. Найдите угол BAC .



7.4.3. (Всеросс., 2023, ШЭ, 8.7) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . Оказалось, что $CH = AB + AH$. Сколько градусов составляет угол BAC , если $\angle ABC = 84^\circ$?



7.4.4. («Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.3, 8.2) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AB = BM$ и $AM = MC$. Известно, что угол B в пять раз больше угла C . Найдите углы треугольника.

7.4.5. («Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 8.2) В треугольнике ABC угол A наибольший. Точки M и N симметричны вершине A относительно биссектрис углов B и C соответственно. Найдите $\angle A$, если $\angle MAN = 50^\circ$.

7.4.6. («Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 8.3) О данном треугольнике и данном четырехугольнике известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол четырехугольника, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

7.4.7. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.3, 8.3) В равнобедренном треугольнике ABC (какие две из сторон треугольника равны, неизвестно) проведены медианы AA_1 и BB_1 , которые пересекаются в точке O . Известно, что $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

7.4.8. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 7.3, 8.3) В треугольнике ABC отмечена точка D такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180^\circ$.

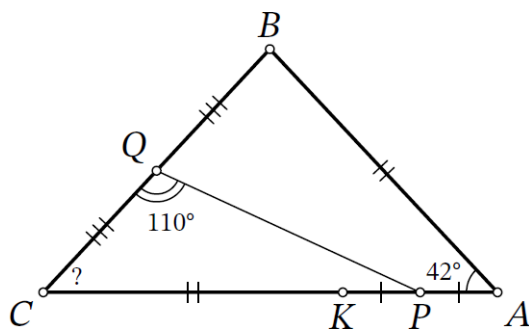
7.4.9. («Шаг в будущее», 2019, 8.3) В треугольнике ABC $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$. На стороне AB взята точка M так, что $AM = MB$. Найдите $\angle AMC$.

7.4.10. («Будущие исследователи – будущее науки», 2019, 8.4) В треугольнике ABC угол A в три раза меньше угла C , а сторона BC вдвое меньше стороны AB . Найдите углы треугольника ABC .

7.4.11. (Всесиб., 2017, 8.4) В треугольнике ABC провели биссектрису BE . Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что в треугольнике ABC есть два угла, один из которых в два раза больше другого.

7.4.12. (Всесиб., 2022, 8.5) В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, оказалась в два раза короче биссектрисы, проведённой к боковой стороне. Найдите углы этого треугольника.

7.4.13. (Всеросс., 2023, МЭ, 8.8) Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = 42^\circ$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC такова, что $AB = CK$. Точки P и Q – середины отрезков AK и BC соответственно. Сколько градусов составляет угол ACB , если известно, что $\angle PQC = 110^\circ$?



7.4.14. («Высшая проба», 2021, 8.5) В треугольнике ABC угол B равен 80° . На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$. На стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB = AE$. Найдите угол AEF .

7.4.15. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.4) На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E . Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X . Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника?

7.4.16. («Курчатов», 2021, 8.3) На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D так, что $AB + BD = DC$. Докажите, что $\angle ADC = 90^\circ$, если известно, что $\angle B = 2\angle C$.

7.4.17. (Олимпиада КФУ, 2022, 8.4) На сторонах AB , BC , CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки D , E и F так, что $BD > AF$. Оказалось, что $DE = DF$, $BE = AD$ и $\angle EDF = 90^\circ$. Докажите, что $\angle CEF = 90^\circ$.

7.4.18. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 8.4, 10.2) Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M . Для каждого из углов каждого из треугольников MAB , MBC , MCD , MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла 70° отличие составляет 20° , а для угла 130° оно равно 40°). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий?

7.4.19. («Ломоносов», 2021, 7–8.5) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены такие точки M и N , что $AM = MN = NC$. На стороне AC выбраны такие точки L и Q , что $MQ \parallel BC$, $NP \parallel AB$. Известно, что $PQ = BM$. Найдите угол MQB .

7.4.20. («Бельчонок», 2023, 8.5) В треугольнике ABC точка D — середина BC . Найдите градусную меру $\angle ABC$, если $\angle ACB = 30^\circ$ и $\angle ADB = 45^\circ$.

7.4.21. («Росатом», 2023, 8.5) Угол при вершине B треугольника ABC равен 130° . Через точки A и C проведены прямые, перпендикулярные прямой AC и пересекающие окружность, описанную около треугольника ABC , в точках E и D . Найдите острый угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках A , C , D и E .

7.4.22. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.7) Точка M — середина стороны AC равностороннего треугольника ABC . Точки P и R на отрезках AM и BC соответственно выбраны так, что $AP = BR$. Найдите сумму углов ARM , PBM и VMR .

7.4.23. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2020.3) Дан треугольник ABC , в котором

$$2\angle B - \angle A = 180^\circ.$$

Внутри него выбрана точка K , а на его стороне AB — точка $L \neq B$ так, что $\angle ACK = 2\angle BCK$ и $BK = KL$. Докажите, что $CK + AL = AC$.

7.5 Биссектрисы, медианы, высоты

Дополнительные задачи — в листке [Медианы, высоты, биссектрисы](#).

7.5.1. («Надежда энергетики», 2022, 8.2) В треугольнике ABC биссектриса BD пересекается со средней линией KM (точка K лежит на BC , а M на AB) в точке F , причем $AF = FK$. Докажите, что AK — биссектриса $\angle FAD$.

7.5.2. («Шаг в будущее», 2019, 8.3) В треугольнике MPK известно, что $MK = 4$, $\angle PMK = 60^\circ$, $\angle PKM = 45^\circ$. MM_1 и KK_1 — высоты треугольника MPK . Из вершин M и K к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры ME и KH . Найдите длины отрезков EK_1 и M_1H .

7.5.3. («Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 8.3) В треугольнике ABC проведена медиана BM . Стороны AB и BC составляют с медианой углы 100° и 40° соответственно, сторона AB равна 1. Найдите длину BM .

7.5.4. («Шаг в будущее», 2020, 8.3) В треугольнике PQR медиана PA и биссектриса QB (A и B — точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника) пересекаются в точке O . Известно, что $3PQ = 5QR$. Найдите отношение площади треугольника PQR к площади треугольника PQO .

7.5.5. (*САММАТ, 2021, 8.7*) Пусть BK — биссектриса в треугольнике $\triangle ABC$, точка D — лежит на стороне BC так, что $\angle DAC = \angle B + \angle C$. Доказать, что DK — биссектриса угла $\angle ADC$.

7.5.6. (*САММАТ, 2021, 8.9*) В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена биссектриса и высота. Может ли проведенная биссектриса быть больше в два раза проведенной высоты? Ответ объясните.

7.5.7. (*Всесиб., 2021, 8.4*) На отрезке AB выбрали точку M и построили равнобедренные треугольники AMC и MBN с основаниями AM и MB соответственно. Оказалось, что точки B , N и C лежат на одной прямой, а $AB = BC$. Перпендикуляр к отрезку AC , опущенный из B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH — биссектриса угла MNC .

7.5.8. («Шаг в будущее», 2018, 8.4) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BP . На высоте AD взята точка M , а на высоте BP — точка N так, что $\angle BMC = \angle ANC = 90^\circ$, $MN = 4 + 2\sqrt{3}$, $\angle MCN = 60^\circ$. Найдите биссектрису угла C треугольника MCN .

7.5.9. («Бельчонок», 2023, 8.4) Из одной вершины треугольника ABC провели биссектрису, из другой медиану, из третьей высоту. Их основания образовали равносторонний треугольник. Найдите углы треугольника ABC .

7.5.10. («Шаг в будущее», 2021, 8.5) В $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 12$, $AC = 16$ и $BC = 7$, проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекающиеся в точке P . Продолжение высоты $\triangle ABA_1$, проведенной из точки B , пересекает сторону AC в точке B_1 , а биссектрису CC_1 в точке T . Найти $AP : PB_1$ и $BT : TA_1$.

7.5.11. («Ломоносов», 2020, 7–8.6) На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M , а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите длину отрезка AN .

7.5.12. («Шаг в будущее», 2018, 8.6) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы BD и AF пересекаются в точке O . Площади треугольников DOA и BOF относятся как $3 : 8$. Найдите отношение $AC : AB$.

7.5.13. (*Открытая олимпиада, 2022, 8.8*) В треугольнике ABC $AB = 13$ и $BC = 15$. На стороне AC взята точка D такая, что $AD = 5$ и $CD = 9$. Биссектриса угла, смежного с углом A , пересекает прямую BD в точке E . Найдите DE .

7.5.14. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.3*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL . На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC .

7.5.15. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.7*) Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?

7.6 Параллелограмм и средняя линия треугольника

Дополнительные задачи — в листках

- [Параллелограмм](#)

• Средняя линия треугольника

7.6.1. (*САММАТ, 2023, 8.3*) В ромбе $ABCD$ величина угла B равна 40° , E — середина BC , F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE . Найдите величину угла DFC .

7.6.2. («Высшая проба», 2022, 8.2) В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка K такая, что $AB = BK = KC$. Докажите, что центр параллелограмма равноудален от середин всех сторон треугольника AKD .

7.6.3. (*Всеросс., 2021, МЭ, 8.3*) Дан параллелограмм $ABCD$, $\angle D = 100^\circ$, $BC = 12$. На стороне AD есть такая точка L , что $\angle ABL = 50^\circ$, $LD = 4$. Найдите длину CD .

7.6.4. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 8.3, 9.2) В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка P такова, что $PA = PF$, $PE = PC$. Докажите, что точка P лежит на прямой BD .

7.6.5. (*Всеросс., 2020, МЭ, 8.4*) Точка E — середина стороны AB параллелограмма $ABCD$. На отрезке DE нашлась такая точка F , что $AD = BF$. Найдите величину угла CFD .

7.6.6. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 8.3) В параллелограмме $ABCD$ ($AB \neq BC$) из тупого угла B провели две высоты, BH и BK (основания высот лежат на сторонах параллелограмма и не совпадают с его вершинами). Треугольник BHK оказался равнобедренным. Укажите все возможные значения угла BAD .

7.6.7. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.3*) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 20. Биссектриса угла B пересекает прямые AD и CD в точках K и L соответственно. Найдите CL , если известно, что $DK = 4$.

7.6.8. («Бельчонок», 2020, 8.3) В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины оснований BC и AD — точки E и F , соответственно. Из точки D на сторону AB опущена высота DH . Докажите, что $BF = EH$.

7.6.9. (*Открытая олимпиада, 2023, 8.4*) Биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$ параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K на стороне AD . Прямая BK пересекает продолжение стороны CD в точке L . Во сколько раз площадь параллелограмма больше площади треугольника $\triangle DKL$?

7.6.10. («Бельчонок», 2021, 8.4) В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 14$, $BC = 9$ провели биссектрисы внутренних углов A , B , C , D . В пересечении они образовали четырёхугольник $KLMN$. Затем провели биссектрисы внешних углов параллелограмма $ABCD$, они образовали четырёхугольник $PQRS$. Найдите длины диагоналей четырёхугольников $KLMN$ и $PQRS$.

7.6.11. («Бельчонок», 2021, 8.4) В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 8$, $BC = 5$ провели биссектрисы внутренних углов A , B , C , D . В пересечении они образовали четырёхугольник $KLMN$. Затем провели биссектрисы внешних углов параллелограмма $ABCD$, они образовали четырёхугольник $PQRS$. Найдите длины диагоналей четырёхугольников $KLMN$ и $PQRS$.

7.6.12. («Шаг в будущее», 2016, 8.4) В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC , AM пересекается с BD в точке O . В треугольнике $A_1B_1C_1$ медиана A_1M_1 и биссектриса B_1D_1 пересекаются в точке O_1 под углом 90° . Найти отношение площадей полученных четырехугольников $OMCD$ и $O_1M_1C_1D_1$, при условии, что площади треугольника $A_1B_1C_1$ и параллелограмма $ABCD$ равны.

7.6.13. («Шаг в будущее», 2019, 8.5) В параллелограмме $ABCD$ M — середина стороны BC , N — середина стороны CD . Известно, что $DM \perp AC$. Найдите отрезок BN , если сторона $CD = 6$.

7.6.14. («Шаг в будущее», 2019, 8.6) В параллелограмме $ABCD$ точки M, K, L, N лежат на сторонах AB, BC, CD, AD соответственно. $AM : MB = CK : KB = CL : LD = AN : ND = 1 : 3$. Точка O лежит внутри $ABCD$ так, что площади четырехугольников $OKCL, OLDN, ONAM$ равны 6, 24 и 12 соответственно, то есть $S_{OKCL} = 6, S_{OLDN} = 24, S_{ONAM} = 12$. Найдите площадь четырехугольника $OMBK$.

7.6.15. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.7) Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E , лежащая на биссектрисе угла A , и точка F , лежащая на биссектрисе угла C . Известно, что середина отрезка BF лежит на отрезке AE . Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой CF .

7.6.16. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.5) CL — биссектриса треугольника ABC . $CLBK$ — параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P . Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма $CLBK$. Докажите, что $AK \geq CL$.

7.6.17. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.10) На средней линии равностороннего треугольника ABC , параллельной стороне BC , взята точка D . Точка E на продолжении стороны BA за точку A такова, что $\angle ECA = \angle DCA$. Точка F на продолжении стороны CA за точку A такова, что $\angle FBA = \angle DBA$. Докажите, что точка A лежит на средней линии треугольника DEF , параллельной стороне EF .

7.7 Трапеция

Дополнительные задачи — в листке [Трапеция](#).

7.7.1. (Открытая олимпиада, 2018, 8.2) На большем основании AD равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка X так, что $AB = AX$. На луче AB выбрана точка E такая, что $DE \parallel BX$. Докажите, что выполнено неравенство $AD + CE \geq BE + ED$.

7.7.2. (Открытая олимпиада, 2020, 8.3) Внутри трапеции $ABCD$ к основанию AD проведена высота BH . Оказалось, что площадь треугольника CDH составляет половину площади всей трапеции. Докажите, что трапеция равнобедренная (равнобокая).

7.7.3. («Бельчонок», 2020, 8.3) В трапеции $ABCD$ отмечены середины оснований AB и CD — точки K и L , соответственно. Известно, что $AB = 2CD$, а CK — биссектриса $\angle BCD$. Докажите, что $AC = 2KL$.

7.7.4. («Бельчонок», 2022, 8.3) Известно, что в трапеции $KLMN$ боковая сторона KL равна основанию LM . Точки P и Q — середины оснований KN и LM соответственно, причем точка P лежит на биссектрисе угла L . Докажите, что $LN = 2PQ$.

7.7.5. («Бельчонок», 2022, 8.3) В трапеции $KLMN$ основание LM в два раза короче KN . Внутри трапеции отмечена такая точка O , что $KL = OL$. Докажите, что прямая, соединяющая точку M с серединой отрезка ON , перпендикулярна OK .

7.7.6. (Олимпиада КФУ, 2023, 8.4) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такая, что $AD = 3BC$. Точка K — середина диагонали BD . Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD . Докажите, что $AC = 2BC$.

7.7.7. («Шаг в будущее», 2022, 8.3) В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Точка E принадлежит AB так, что $AB \perp DE$. Найти площадь $\triangle ECD$, если $ED = 6$, $CD = 5$.

7.7.8. («Шаг в будущее», 2022, 8.3) В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ так, $AD = 2BC$. Точка E принадлежит AB так, что $AB \perp DE$. Найти периметр $\triangle ECD$ если $ED = m$, $CD = n$.

7.7.9. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.4) В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD , угол ADC равен $67,5^\circ$. Найдите углы трапеции, если известно, что биссектриса угла CAD пересекает отрезок CD в его середине, а основание BC равно стороне AB .

7.7.10. (Открытая олимпиада, 2019, 8.5) В трапеции $ABCD$ на основании AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят трапецию на три подобных друг другу, но попарно не равных, неравобедренных треугольника. Боковая сторона AB имеет длину 6. Найдите $AX \cdot DX$.

7.7.11. (Открытая олимпиада, 2021, 8.5) В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются на основании AD . $AB = 50$, $BC = 128$. Найдите площадь трапеции.

7.7.12. (Открытая олимпиада, 2022, 8.5) В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали являются биссектрисами углов $\angle B$ и $\angle C$, при этом $\angle C = 110^\circ$. Найдите градусную меру угла $\angle BAC$.

7.7.13. («Шаг в будущее», 2023, 8.5) В равнобедренной трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, AD больше BC , на стороне DC взяли точку M и провели через нее прямую, параллельную AB , до пересечения с AD в точке N так, что $CM : AN = 2 : 3$. Площадь полученного отсеченного треугольника $DMNN$ оказалась равной $8\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 5$ и $BM = AN$.

7.7.14. (Открытая олимпиада, 2023, 8.7) В равнобедренной трапеции $ABCD$ точка H на основании AD такова, что BH — высота. Оказалось, что $\angle BHC = \angle A$. Известно, что $AH = 10$, $DH = 18$. Найдите CH .

7.7.15. (Олимпиада Эйлера, 3Э, 2021.5) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K . Внутри треугольника ABK нашлась такая точка M , что $\angle MBC = \angle MAD$, $\angle MCB = \angle MDA$. Докажите, что прямая MK параллельна основаниям трапеции.

7.8 Общие четырёхугольники

7.8.1. (Всеросс., 2021, ШЭ, 8.6) Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BD$, $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BCD = 90^\circ$. На отрезке BC отмечена точка E такая, что $AD = DE$. Чему равна длина отрезка BD , если известно, что $BE = 7$, $EC = 5$?

7.8.2. («Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 8.3, 9.3) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины сторон AB и CD . Оказалось, что прямая PQ делит диагональ AC пополам. Докажите, что PQ делит и диагональ BD пополам.

7.8.3. («Бельчонок», 2022, 8.3) Серединные перпендикуляры к диагоналям LN и KM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают сторону KN в точках P и Q соответственно (P лежит между K и Q). Оказалось, что $LP \parallel MQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

7.8.4. («Бельчонок», 2022, 8.3) Серединные перпендикуляры к диагоналям KM и LN выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают прямую LM в точках P и Q соответственно (P лежит на продолжении отрезка LM за точку L , а Q — за точку M). Оказалось, что $KP \parallel NQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

7.8.5. («Шаг в будущее», 2020, 8.3) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = 10$, $CD = 15$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O , $AC = 20$, треугольники AOD и BOC имеют равные площади. Найдите AO .

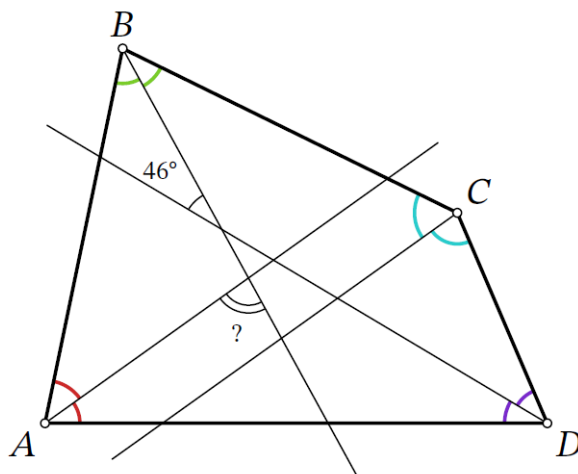
7.8.6. (Всесиб., 2019, 8.4) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AD = BC$ и

$$\angle ADB + \angle ACB = \angle CAB + \angle DBA = 30^\circ.$$

Докажите, что из отрезков DB , CA и DC можно составить прямоугольный треугольник.

7.8.7. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 8.4) Дан четырёхугольник $ABCD$ с тупыми углами B и C . На диагоналях отмечены такие точки M и N , что $BM \parallel CD$, $CN \parallel AB$. Докажите, что $AD \parallel MN$.

7.8.8. (Всеросс., 2023, МЭ, 8.5) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 46° , как изображено на рисунке. Сколько градусов составляет острый угол между биссектрисами углов A и B ?



7.8.9. («Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 8.5) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = AD = 1$, $\angle A = 80^\circ$, $\angle C = 140^\circ$. Найдите длину диагонали AC .

7.8.10. (*Всесиб., 2016, 8.5*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со стороной AD равной 3. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E , причём известно, что площади треугольников ABE и DCE равны 1. Найдите сторону BC , если известно, что площадь $ABCD$ не превосходит 4.

7.8.11. (*«Шаг в будущее», 2020, 8.5*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D = 90^\circ$, диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, а диагональ AC является биссектрисой углов A и C . Найдите углы A и C , если $AC = 2BD$. Ответ дайте в градусах.

7.8.12. (*«Шаг в будущее», 2020, 8.5*) Четырёхугольник, соединяющий середины сторон трапеции $ABCD$, является ромбом. Найдите его площадь, если высота трапеции $BH = 5$ см, меньшее основание $BC = 6$ см, а угол ABC равен 120° .

7.8.13. (*Всеросс., 2021, МЭ, 8.6*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ сторона BC вдвое меньше, чем AD . Диагональ AC перпендикулярна стороне CD , а диагональ BD перпендикулярна стороне AB . Найдите больший острый угол этого четырёхугольника, если меньший равен 36° .

7.8.14. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2023.2*) Точка N — середина стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а точка M на стороне AB такова, что $CM \perp BD$. Докажите, что если $BM > MA$, то $2BC + AD > 2CN$.

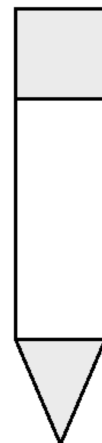
7.8.15. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2023.7*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD = 4$. На сторонах AB и CD выбраны точки K и L соответственно таким образом, что $AK = DL = 1$. На стороне AD снаружи четырёхугольника построен треугольник AMD , в котором $AM = MD = 2$. Оказалось, что $KL = 2$. Докажите, что $BM = CM$.

7.8.16. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.3*) Биссектриса угла A выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекает сторону CD в точке K . Оказалось, что $DK = BC$ и $KC + AB = AD$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ADC$.

7.8.17. (*ММО, 2022, 8.5*) Верно ли, что из любого выпуклого четырёхугольника можно вырезать три уменьшенные вдвое копии этого четырёхугольника?

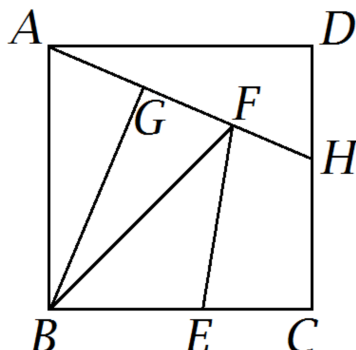
7.9 Площадь

7.9.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 8.1*) Ваня нарисовал чертёж карандаша, где резинку изобразил квадратом, тело карандаша — прямоугольником той же ширины, а кончик — равнобедренным треугольником, основание которого совпадает с одной из сторон прямоугольника. Периметр всей фигуры составил 96 мм, причём у квадрата и треугольника периметры равны, а у прямоугольника в два раза больше. Найдите площадь чертежа.



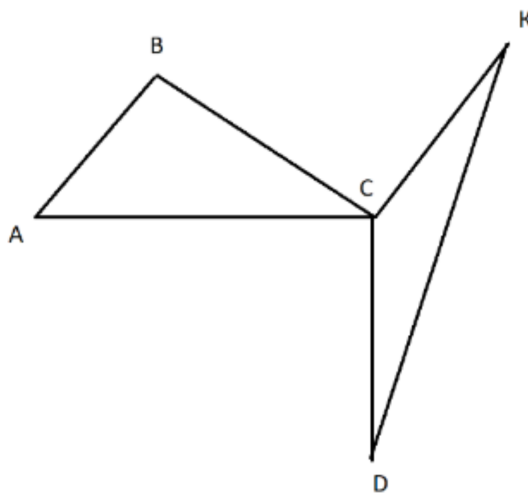
7.9.2. («Надежда энергетики», 2015, 8.2) Треугольник вращается в своей плоскости. Через какую точку должна проходить ось вращения, чтобы заметалась наименьшая площадь?

7.9.3. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 8.2) Квадрат разрезан на пять частей равной площади, как показано на рисунке. Найдите отношение $BE : EC$.



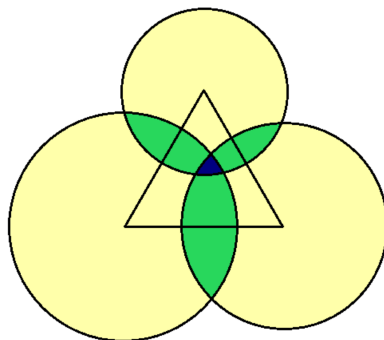
7.9.4. («Надежда энергетики», 2023, 8.3) Через точку, лежащую внутри треугольника, параллельно его сторонам проведены три прямые, которые разбивают треугольник на шесть частей: три треугольника и три четырехугольника. Площади всех трех внутренних треугольников равны. Определите, в каком диапазоне может лежать отношение площади каждого внутреннего треугольника к площади исходного.

7.9.5. («Шаг в будущее», 2021, 8.3) $\triangle ABC$ — остроугольный. Отрезок $CK \perp CB$ и $CK = CB$; отрезок $CD \perp AC$ и $CD = AC$, как показано на рисунке. Найти площадь $\triangle ABC$, если площадь $\triangle CKD = 18$.



7.9.6. («Шаг в будущее», 2021, 8.3) В $\triangle ABC$ AA_1 — медиана, $AA_1 = 2\sqrt{13}$. Точка M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Найти площадь $\triangle BMA_1$, если известно, что $AC = 3MB = 10$.

7.9.7. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 7.5, 8.4) На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника.



Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника.

7.9.8. («Бельчонок», 2018, 8.4) Внутри треугольника ABC со стороной $BC = 2\sqrt{5}$ взята точка D так, что $DB = 2$, $DA = DC = 4$. Докажите, что площадь треугольника ABC меньше 13.

7.9.9. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.5, 8.5) В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметры этих островов одинаковы, а площадь прибрежных вод у них различается? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

7.9.10. (Открытая олимпиада, 2015, 8.5) В треугольник ABC вписан квадрат $KLMN$ со стороной 1: точки K и L лежат на стороне AC , точки M и N — на сторонах AB и BC соответственно. Площадь квадрата равна половине площади треугольника. Найдите длину высоты BH треугольника ABC .

7.9.11. («Шаг в будущее», 2022, 8.5) В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием BC проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке B_1 , сторону BC в точке A_1 , а продолжение стороны AC за точку C в точке C_1 так, что $\triangle BA_1C_1$ равнобедренный с основанием BC_1 . $\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle ABC$, $3AB = 2BC$, $C_1A_1 \cap AB = B_1$. Найти отношение площади $\triangle AB_1A_1$ к площади $\triangle CA_1C_1$.

7.9.12. («Шаг в будущее», 2022, 8.5) На стороне AC равнобедренного $\triangle ABC$ с основанием BC взята точка A_1 , а на продолжении стороны BC за точку C точка C_1 так, что $\triangle BA_1C_1$ равнобедренный с вершиной в точке A_1 . $\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle ABC$, $3AB = 2bC$, $C_1A_1 \cap AB = B_1$. Найдите отношение площади $\triangle ABC$ к площади $\triangle BB_1C_1$.

7.9.13. («Росатом», 2020, 8.5) Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . Точка N лежит на продолжении стороны BA за вершину A так, что $AN : AB = 1 : 2$. Точка P лежит на продолжении стороны BC за вершину C так, что $CP : BC = 1 : 3$. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC .

7.9.14. («Шаг в будущее», 2019, 8.6) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M делят сторону BC , а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$, если площади четырехугольников $KLEN$ и $FMCD$ равны 12 и 24 соответственно.

7.10 Неравенство треугольника

Дополнительные задачи — в листке [Неравенство треугольника](#).

7.10.1. («Высшая проба», 2022, 8.5) Имеется 111 палочек длин 1, 2, 3, ..., 111. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

7.10.2. (Открытая олимпиада, 2016, 8.5) Дан прямоугольник $ABCD$, $AB = 8$, $BC = 9$. Точка K лежит на стороне BC , точка L — на стороне CD , точка M — на стороне AD . Докажите, что длина ломаной $AKLMB$ не меньше 30.

7.10.3. (ММО, 2023, 8.5) На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'SA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'SA'$ больше 120° , а для сторон выполняются равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB' , BC' , CA' можно составить треугольник.

7.11 Вписанные и описанные окружности

Дополнительные задачи — в листке [Вписанные и описанные окружности](#).

7.11.1. («Шаг в будущее», 2019, 8.5) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K . Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2 = CM \cdot MN$. Найдите $\angle BKN$, если $\angle ABC = 47^\circ$, $\angle BCA = 64^\circ$.

7.11.2. («Росатом», 2021, 8.5) На основании AC равнобедренного треугольника ABC построена как на диаметре окружность, пересекающая сторону BC в точке N так, что $BN : NC = 3 : 1$. Найти отношение длин сторон треугольника AC и BC .

7.12 Многоугольники

7.12.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 8.3, 9.2, 10.2) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60^\circ$, а остальные углы равны между собой. Известно, что $AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$. Найдите расстояние от точки A до прямой CD .

7.12.2. («Бельчонок», 2019, 8.3) Известно, $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник. Прямые BE и AC пересекаются в точке P , прямые CE и AD — в точке Q , прямые AD и BE — в точке O , треугольники ABP и DEQ — равнобедренные с углом при вершине равным 80° . Какие значения может принимать градусная мера угла ACE , если известно, что треугольники APO и EQO также равнобедренные?

7.12.3. («Бельчонок», 2019, 8.3) Известно, $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник. Прямые BE и AC пересекаются в точке P , прямые CE и AD — в точке Q , прямые AD и BE — в точке O , треугольники ABP и DEQ — равнобедренные с углом при вершине равным 40° . Какие значения может принимать градусная мера угла ACE , если известно, что треугольники APO и EQO также равнобедренные?

7.12.4. (ММО, 2021, 8.4) В правильном пятиугольнике $ABCDE$ отмечена точка F — середина CD . Серединный перпендикуляр к AF пересекает CE в точке H . Докажите, что прямая AH перпендикулярна прямой CE .

7.12.5. («Шаг в будущее», 2019, 8.3) Произвольная точка M , лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, площадь которого равна 36, соединена с его вершинами. Площади двух из шести образовавшихся треугольников AMB и CMD равны 3 и 9 соответственно. Найти площади оставшихся четырех треугольников.

7.12.6. (Открытая олимпиада, 2015, 8.4) Шестиугольник $ABCDEF$ и точка M внутри него таковы, что четырёхугольники $ABCM$, $CDEM$ и $EFAM$ — параллелограммы. Докажите, что треугольники BDF и ACE равны.

7.12.7. («Шаг в будущее», 2016, 8.6) Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник площадь которого равна $2/7$. Найти площадь пятиугольника.

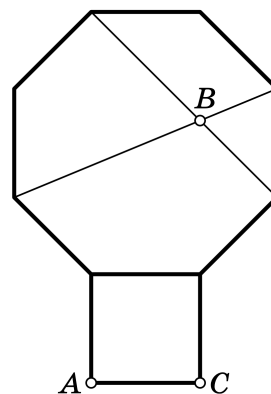
7.12.8. (Открытая олимпиада, 2016, 8.7) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точка P — пересечение BE и AC , точка Q пересечение CE и AD , точка O — пересечение AD и BE . Оказалось, что ABP и DEQ — равнобедренные треугольники с углом при вершине (именно при вершине, а не при основании), равным 80 градусов. Найдите значение угла ACE , если известно, что треугольники APO и EQO тоже равнобедренные.

7.12.9. (Олимпиада Эйлера, 3Э, 2022.5) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AD и CE пересекаются в точке X . Оказалось, что $ABCX$ — параллелограмм и $BD = CX$; $BE = AX$. Докажите, что $AE = CD$.

7.12.10. (Олимпиада Эйлера, 3Э, 2020.6) На каждой стороне выпуклого 100-угольника отметили по две точки, делящие эту сторону на три равные части. После этого всё, кроме отмеченных точек, стёрли. Докажите, что по отмеченным точкам можно однозначно восстановить исходный 100-угольник.

7.12.11. (ММО, 2022, 8.3) На стороне правильного восьмиугольника во внешнюю сторону построен квадрат. В восьмиугольнике проведены две диагонали, пересекающиеся в точке B (см. рисунок). Найдите величину угла ABC .

Примечание. Многоугольник называется правильным, если все стороны равны и все его углы равны.



7.13 Разные планиметрические задачи

7.13.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 8.4*) Точки D и E отмечены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $AD = EC$. Оказалось, что $BD = ED$, $\angle BDC = \angle DEB$. Найдите длину отрезка AC , если известно, что $AB = 7$ и $BE = 2$.

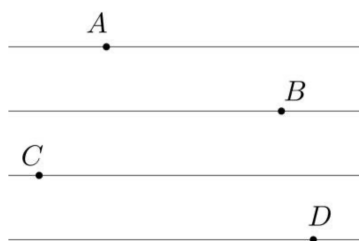
7.13.2. (*«Надежда энергетики», 2016, 8.2*) На стороне AB треугольника ABC взята точка M . Она начинает двигаться параллельно BC до пересечения с AC , затем она движется параллельно AB до пересечения с BC и так далее. Верно ли, что через некоторое число таких шагов точка M вернется в исходное положение? Если это верно, то каково минимальное число шагов, достаточное для возврата?

7.13.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 7.3, 8.2*) Вера заносит свои знания по планиметрии в таблицы, строки которых соответствуют фигурам, а столбцы — свойствам. Если фигура обладает нужным свойством, то на пересечении строки и столбца пишется 1, а в противном случае — 0. В одной из таблиц 4×4 оказалось, что в каждой строке и каждом столбце ровно по одному нулю. Известно, что первый столбец соответствует свойству «есть острый угол», а второй — свойству «есть равные стороны». Подберите ещё два свойства, а для строк — два треугольника и два четырёхугольника, чтобы получить нужную расстановку нулей и единиц.

7.13.4. (*ММО, 2021, 8.2*) Митя купил на день рождения круглый торт диаметром 36 сантиметров и 13 тоненьких свечек. Мите не нравится, когда свечки стоят слишком близко, поэтому он хочет поставить их на расстоянии не меньше 10 сантиметров друг от друга. Поместятся ли все свечки на торте?

7.13.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 8.3*) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне BC отметили точки K и N (точка K лежит между B и N) так, что $KN = AN$. Докажите, что $AC < AB$.

7.13.6. (*Всесиб., 2018, 8.3*) Найдите угол DAC , если известно, что $AB = BC$ и $AC = CD$, а прямые, на которых лежат точки A, B, C, D , параллельны, причём расстояния между соседними прямыми равны. Точка A левее B , C левее B , D правее C (см. рис).



7.13.7. (*«Надежда энергетики», 2019, 8.3*) Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении 2018 : 2019. Он проплывает по четырёхугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого?

7.13.8. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 8.3) На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O , причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.

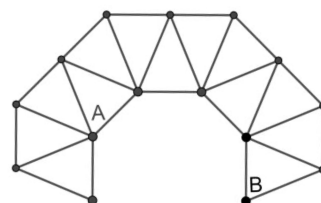
7.13.9. («Бельчонок», 2021, 8.3) Бельчата находятся на одной прямой в точках A, B, C причём средний бельчонок A в два раза ближе к бельчонку C , чем к бельчонку D . Все они смотрят в точку D (там белый гриб). Отрезок между бельчонком A и точкой D образует угол 45° с прямой, на которой сидят бельчата, а отрезок между бельчонком B и точкой D образует угол 60° с этой прямой. Какой угол образует с прямой, на которой сидят бельчата, отрезок между бельчонком C и точкой D ?

7.13.10. («Шаг в будущее», 2017, 8.2) Дан остроугольный треугольник ABC ($AB = BC$) и $BC = 12$. $AN \perp BC$. На боковой стороне BC , отмечена точка M (M лежит между B и N) так, что $AN = MN$ и $\angle BAM = \angle NAC$. Найти BN .

7.13.11. (Всесиб., 2019, 8.3) Про $n > 2$ точек на плоскости известно, что любые три из них можно накрыть треугольником площади не более 1 см^2 (разные тройки, возможно, разными треугольниками). Докажите, что все 2 точки можно одновременно накрыть треугольником площади не более 4 см^2 .

7.13.12. (Всесиб., 2015, 8.4) На сторонах треугольника AB, BC и AC треугольника ABC произвольным образом выбраны соответственно точки C_1, A_1, B_1 . Пусть K_1, K_2, K_3 — середины AA_1, BB_1, CC_1 . Докажите, что эти точки не могут лежать на одной прямой.

7.13.13. (Всесиб., 2020, 8.4) Из одинаковых равнобедренных треугольников, у которых угол напротив основания равен 45° , а боковая сторона равна 1, сложили фигуру, как показано на рисунке. Найдите расстояние между точками A и B .



7.13.14. («Ломоносов», 2023, 7–8.4, 9.1) В бескрайних калмыцких степях мама отправила маленькую дочку навестить бабушку. У девочки не было ни навигатора, ни компаса, а только часы, которыми она еще не умела пользоваться, но у которых был ежечасный звуковой сигнал. Зная обычную скорость их любимого верблюда, мама рассчитала маршрут для дочки. Отправляя ее в путь при звуковом сигнале часов в направлении, соответствующем положению солнца в этот момент, велела через час (по очередному сигналу часов) изменить направление движения в соответствии с новым положением солнца. Так в конце концов девочка и доехала бы до бабушки. Но, когда пришло время менять направление, девочка заметила далеко впереди юрту своей подружки, она продолжила движение, не меняя направления, доехала до подружки и проговорила с ней 21 минуту, пока не прозвучал следующий сигнал часов. Тогда она вспомнила наставление матери и продолжила путь в направлении, соответствующем новому положению солнца. Как ни странно, до бабушки она доехала. Сколько всего времени (в минутах) она на это потратила?

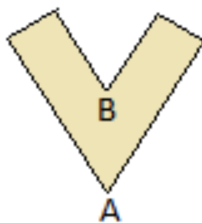
7.13.15. («Курчатов», 2022, 8.4) Дан треугольник ABC такой, что $\angle BAC = 2\angle BCA$. Точка L на стороне BC такова, что $\angle BAL = \angle CAL$. Точка M — середина стороны AC . Точка H на отрезке AL такова, что $MH \perp AL$. На стороне BC нашлась точка K такая, что треугольник KMH — равносторонний. Докажите, что точки B , H и M лежат на одной прямой.

7.13.16. («Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 8.5) В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC точками деления разделены на n и $n + 1$ равных частей соответственно ($n > 1$). Из вершины A провели n отрезков в точки деления на стороне BC , а из вершины C — $(n - 1)$ отрезков в точки деления на стороне AB . Затем провели медиану из вершины B .

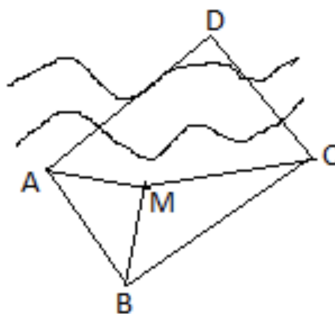
а) Могут ли какие-то три из проведенных отрезков пересекаться в одной точке внутри треугольника ABC ?

б) На сколько всего частей разбивается треугольник ABC проведенными отрезками?

7.13.17. («Росатом», 2017, 8.5) Лист бумаги имеет форму, изображенную на рис. Расстояние между параллельными краями листа равно 2, расстояние между вершинами A и B равно 3. Найти наибольший радиус круга, который можно вырезать из такого листа.



7.13.18. («Росатом», 2015, 8.5) Перед Петей стоит вполне практическая задача. На рисунке указано расположение точек A , B , C на одной стороне реки, точки D на другой и точки M , в которой находится Петя. Расстояние от точки M до точек A , B , C Петя измерил: $MA = 20$, $MB = 30$, $MC = 40$. Пете и вам нужно вычислить расстояние от точки M до точки D , если известно, что $ABCD$ — прямоугольник, а плавать Петя не умеет.



7.13.19. («Надежда энергетики», 2015, 8.7) Весной 1945 года контрразведчики гестапо с 4 радиостанций, расположенных в вершинах квадрата на территории Берлина, зафиксировали в некоторый момент работу советского радиопередатчика. Штирлиц проявил инициативу и доложил Мюллеру, что расстояния от точек прослушивания до передатчика составили 1, 9, 4 и 5 км. Должен ли Мюллер верить такому сообщению?

7.13.20. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2022.3*) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D . На стороне AB выбрана точка P . Отрезки PC и AD пересекаются в точке Q . Точка R — середина отрезка AP . Докажите, что существует фиксированная точка X , через которую прямая RQ проходит при любом выборе точки P .

7.13.21. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2021.3*) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки CP и AQ пересекаются в точке R . Оказалось, что $AR = CR = PR + QR$. Докажите, что из отрезков AP , CQ и PQ можно составить треугольник, один из углов которого равен углу B .

7.14 Метод координат

Дополнительные задачи — в листке [Формула расстояния между точками](#).

7.14.1. (*«Надежда энергетики», 2020, 8.5*) Необходимо построить дорогу, вымощенную желтым кирпичом. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и кирпичный завод, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП. Введите систему координат так, чтобы кирпичный завод имел координаты $(0, 0)$, а ЛЭП проходила через точку $(0, d)$ параллельно одной из координатных осей. Найдите координаты точки на дороге, удаленной от завода на расстояние $5d$.

7.14.2. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.7*) $OABC$ — прямоугольник на декартовой плоскости, со сторонами, параллельными осям координат. Точка O — начало координат, а точка B имеет координаты $(11; 8)$. Внутри прямоугольника взята точка X с целыми координатами. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника OBX ?

Глава 8

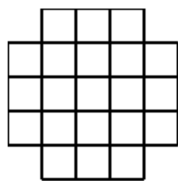
Комбинаторика

8.1 Перебор вариантов

Дополнительные задачи — в листке [Перебор вариантов](#).

8.1.1. (*САММАТ, 2023, 8.1*) Рассмотрим три самых маленьких простых числа: 2, 3 и 5. Сколько существует различных трехзначных чисел, которые делятся без остатка на любые два из этих простых чисел и не делятся на третье?

8.1.2. (*Открытая олимпиада, 2016, 8.1*) Сколькими способами можно разбить изображённую фигуру на прямоугольники 1×3 ?



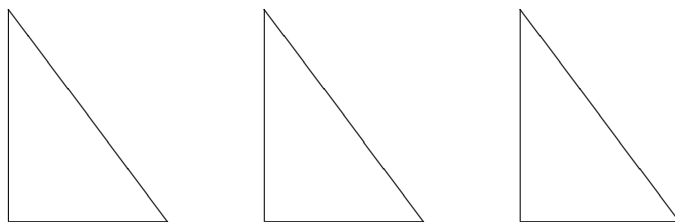
8.1.3. (*«Бельчонок», 2023, 8.3*) На математическом турнире команда «Пифагор» состояла из Ани, Марата, Олега и Светы. Команда должна была решить задачи по арифметике и геометрии, всего 7 задач. Каждую задачу по арифметике решали двое, а каждую задачу по геометрии — трое. Состав решающих для каждой задачи был разный. Аня решала больше задач, чем Света. Олег решал две задачи по геометрии и одну задачу по арифметике. Сколько задач решала Света?

8.1.4. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.4*) Из множества трёхзначных чисел, не содержащих в своей записи цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, выписали на бумагу несколько чисел таким образом, что никакие два числа не могут быть получены друг из друга перестановкой двух рядом стоящих цифр. Какое наибольшее количество таких чисел могло быть написано?

8.1.5. (*Всесиб., 2017, 8.5*) В списке $1, 2, \dots, 2016$ отметили два числа $a < b$, разделив ими ряд на 3 части (возможно, некоторые из частей не содержали чисел вообще). После этого список перемешали следующим образом: a и b остались на местах, а ни одно из других 2014 чисел не осталось в той же части, где было изначально. Сколькими способами можно было выбрать a и b ?

8.1.6. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.7*) На плоскости есть три одинаковых прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4, 5 (см. рис.). Они одинаково ориентированы, их можно двигать и вра-

щать, но нельзя накладывать друг на друга (касаться сторонами можно) и нельзя класть обратной стороной вверх (то есть, как бы вы ни двигали треугольник, стороны 3 - 4 - 5 будут расположены по ходу часовой стрелки).

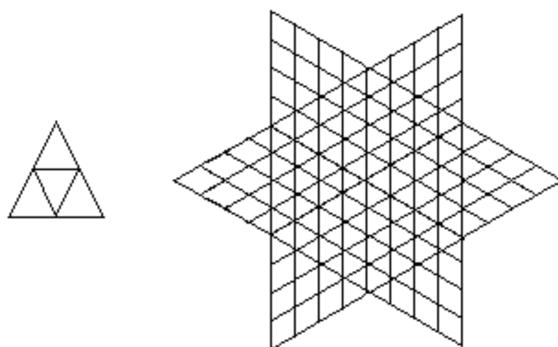


Посчитайте, сколько различных «жестких» фигур можно собрать, используя все эти треугольники. Фигура считается «жесткой», если у каждого её треугольника есть с каким-нибудь другим треугольником общая вершина и общий граничный отрезок с концом в этой вершине (необязательно целая сторона).

8.2 Правило произведения

Дополнительные задачи — в листке [Правила суммы и произведения](#).

8.2.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 8.1, 9.1) На левом рисунке изображены пять треугольников (четыре маленьких и один большой). А сколько треугольников на правом рисунке?



8.2.2. («Ломоносов», 2020, 5–6.2, 7–8.2, 9.2) Сколькими способами можно прочесть слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

```

R O T O R
O T O R
T O R
O R
R

```

8.2.3. («Надежда энергетики», 2015, 7.2, 8.2) Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

8.2.4. («Надежда энергетики», 2023, 8.2) Смышсленная Дуся раскладывает шесть шпаргалок в четыре тайных кармана так, чтобы шпаргалки 1-я и 2-я оказались в одном и том же кармане, 4-я и 5-я тоже оказались в одном и том же кармане, но не в том, где 1-я. Остальные могут лежать как угодно, но только один карман может остаться пустым (либо же все заполнятся). Сколькими различными способами можно это сделать?

8.2.5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 8.2, 9.1) В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

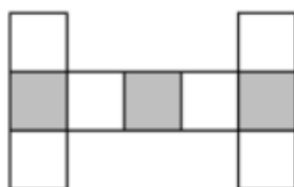
1)	T	I	G	E	R
2)	L	I	F	T	S
3)	H	O	T	E	L

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв.

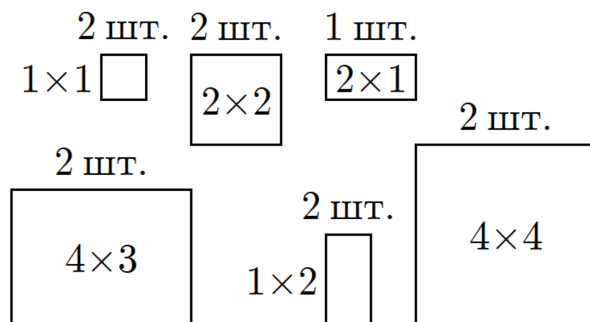
8.2.6. («Ломоносов», 2023, 7–8.2) Есть три одинаковых кубика, грани каждого из которых покрашены в одни и те же 6 цветов одинаковым образом (каждая грань — полностью в один цвет, разные грани одного кубика — в разные цвета, взаимное расположение цветов на гранях всех кубиков одинаково). Ангелина ставит эти кубики друг на друга и получает башню в форме прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 3$ кубика. Сколько разных раскрасок может иметь получившаяся башня? Раскраски считаются одинаковыми, если получаются друг из друга поворотом всей башни вокруг вертикальной оси.

8.2.7. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 7–8.3, 9.2) Будем обозначать \overline{abc} трехзначные числа, записанные цифрами a, b, c . Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

8.2.8. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 8.3) Сколькими способами можно разместить в фигуре на рисунке числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы число в каждой закрашенной клетке было хотя бы на 2 больше, чем каждое из его соседей? Способы, переводимые друг в друга симметрией или поворотом, считаются разными.



8.2.9. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 8.5) Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 11 различных картин (см. рис.): одна горизонтальная размерами 2×1 , и по две штуки размерами 1×1 , 1×2 (вертикальные), 2×2 , 4×3 (горизонтальные) и 4×4 . Сколькими способами все 11 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя.



8.2.10. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 8.5) В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел образует сет, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.

Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет (в первом порядке встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры). А числа 1123, 2231, 3311 не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).

Сколько всего сетов существует в игре?

(Перестановка чисел не приводит к образованию нового сета: 1232, 2213, 3221 и 2213, 1232, 3221 — один и тот же сет.)

8.2.11. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 8.6, 9.6, 10.6, 11.6) Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m -угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m . Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k -угольника. Их оказалось 2015. Найдите m .

8.2.12. (Открытая олимпиада, 2016, 8.6) Аня посчитала все девятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 9. Коля посчитал все десятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 5. Кто из них насчитал больше чисел?

8.2.13. (Всеросс., 2022, ШЭ, 8.8) Сколькими способами можно покрасить все натуральные числа от 1 до 200 в красный и синий цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не равнялась степени двойки?

8.3 Перестановки с повторениями

Дополнительные задачи — в листке [Размещения, перестановки и сочетания](#).

8.3.1. («Бельчонок», 2021, 8.3) Сколько различных восьмизначных чисел можно составить из двух единиц, двух двоек, двух троек, трёх четвёрок? (Каждый раз одна из цифр не используется).

8.3.2. («Бельчонок», 2021, 8.3) Из десяти букв $a, b, b, c, c, c, d, d, d, d$ выбирают 9 и записывают в ряд. Сколько различных последовательностей можно получить?

8.4 Сочетания

Дополнительные задачи — в листке [Размещения, перестановки и сочетания](#).

8.4.1. (САММАТ, 2021, 8.2) Сумма числа сторон выпуклого многоугольника и числа его диагоналей равна 21. Определите число сторон многоугольника.

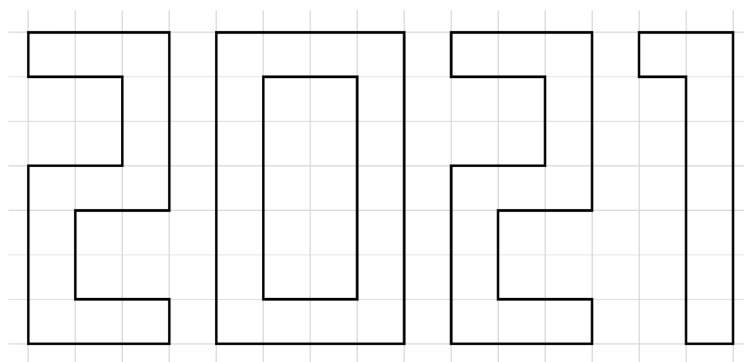
8.4.2. («Бельчонок», 2021, 8.2) Аня записывает в тетради четырёхзначные числа, а Тоня записывает пятизначные числа. В каждом числе Тони и Ани нет нуля и нет одинаковых цифр, и цифры расположены в порядке убывания. Сколько разных чисел может написать Аня, и сколько — Тоня?

8.4.3. («Бельчонок», 2023, 8.5) В соревнованиях по бегу соревновались 4 спортсмена. Сколько вариантов результатов может быть с учетом того, что любое число участников может прийти к финишу одновременно? Например, один из способов: 2-й выиграл, 4-й и 3-й поделили следующие места между собой, 1-й последний.

8.4.4. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6) Есть 7 красных, 6 белых и 8 желтых шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

8.4.5. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.5, 9.3) Есть 7 красных, 6 белых, 8 желтых и 5 черных шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

8.4.6. («Ломоносов», 2021, 7–8.6) Наташа хочет выложить мозаикой число 2021, показанное на рисунке. У неё есть 4 одинаковые плитки размером 1×1 клетку и 24 одинаковые плитки размером 1×2 клетки. Сколькими способами Наташа может осуществить задуманное?



8.4.7. (*Всеросс., 2023, МЭ, 8.7*) Сколько существует способов расположить в ряд n крестиков и 13 ноликов так, чтобы среди любых трёх подряд идущих значков нашёлся хотя бы один нолик, если

1. $n = 27$;

2. $n = 26$?

8.4.8. (*«Курчатов», 2021, 8.5, 9.5*) На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

8.4.9. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2020.8*) В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». Словом считается любая последовательность из $2n$ букв У и $2n$ букв Ы (число n дано и фиксировано). Языковеды называют слова *похожими*, если одно можно получить из другого **одной** перестановкой двух соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи?

В записи ответы допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий, и число использованных операций не должно зависеть от n .

8.4.10. (*«Высшая проба», 2022, 8.6*) Натуральное число N называется *интересным*, если в системе счисления с основанием t оно задаётся четырёхзначным числом \overline{abcd} (то есть,

$$N = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

$0 \leq a, b, c, d \leq t - 1, a \neq 0$) таким, что $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом? Ответ, конечно, должен зависеть от числа t .

8.5 Функции делителей

Дополнительные задачи — в листке [Функции делителей](#).

8.5.1. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.2*) Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}?$$

8.5.2. (*«Росатом», 2015, 8.3*) Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a , если общее число его возможных делителей на 63 меньше числа всех делителей a^2 .

8.5.3. (*«Росатом», 2017, 8.2*) Найти сумму всех делителей числа $a = 540$.

8.6 Формула включений и исключений

8.6.1. («Росатом», 2023, 8.3) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих

$$496125 = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2,$$

кратных 49, но не делящихся ни на 3, ни на 5?

8.6.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6, 7–8.5, 9.4) Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

8.6.3. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 8.1) В некотором языке есть 3 гласных и 8 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

8.6.4. («Бельчонок», 2023, 8.4) Пятеро бельчат (рыжий, серый, белый, чёрный, полосатый) встали в ряд. Рыжий не рядом с серым. Чёрный не рядом с полосатым. Серый не рядом с белым. Сколькими способами бельчата могли встать в ряд?

8.7 Принцип Дирихле

Дополнительные задачи — в листке [Принцип Дирихле](#).

8.7.1. («Росатом», 2018, 8.2) В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет одного цвета?

8.7.2. (Открытая олимпиада, 2020, 8.2) В подарок на Восьмое марта Вася и Петя заказали пятнадцати одноклассницам воздушные шарик. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе четыре шарика, причём девочка будет довольна, только если её шарик все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарик четырех цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки остались довольны?

8.7.3. («Курчатов», 2020, 8.2) У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

8.7.4. («Надежда энергетики», 2017, 8.3) На завод привезли несколько энергосберегающих приборов суммарным весом 120 кг. Известно, что общий вес трёх самых лёгких приборов составил 31 кг, а трёх самых тяжёлых — 41 кг. Сколько энергосберегающих приборов привезли на завод, если веса любых двух приборов различны?

8.8 Взаимно-однозначные соответствия

Дополнительные задачи — в листке [Биекции](#).

8.8.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 8.5, 9.5) На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а S — количество способов положить так 16 доминошек. Что больше — N или S ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

8.9 Знакомства

8.9.1. («Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 8.4) В отряде космонавтов 20 человек, у каждого — не менее 15 друзей в отряде. В космос требуется отправить экипаж, в котором все дружат между собой. Обязательно ли удастся сформировать экипаж

- а) из четырех человек?
- б) из пяти человек?

8.9.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.5, 7–8.5, 9.4) Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т. е. если A знает B , то и B знает A). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов. Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

8.9.3. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.3) В группе из 79 школьников у каждого не более 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? Все знакомства — взаимные.

8.9.4. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2020.2) В лагерь приехали 99 школьников, причём все приехавшие имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу ребят, обладающую тем свойством, что любой из приехавших, не входящий в эту группу, знаком с кем-то из этой группы, будем называть *популярной*. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят.

8.10 Графы

Дополнительные задачи — в листке [Графы](#).

8.10.1. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 7.6, 8.6) Шахматный конь проскакал по доске 3×4 , причём на первой клетке своего пути написал число n , на второй — число $n + 1, \dots$, на последней — $n + 11$. Могло ли оказаться, что сумма чисел в каждой строке кратна трём и сумма чисел в каждом столбце кратна трём?

8.10.2. (Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2022.8) В кружке 42 человека, любые двое из которых имеют среди кружковцев не менее десяти общих друзей. Докажите, что найдутся двое, имеющие среди кружковцев не менее двенадцати общих друзей.

8.10.3. (ММО, 2021, 8.6) В некотором государстве 32 города, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Министр путей сообщения, тайный злодей, решил так организовать движение, что покинув любой город, в него нельзя будет вернуться. Для этого он каждый день, начиная с 1 июня 2021 года, может менять направление движения на одной из дорог. Докажите, что он сможет добиться своего к 2022 году (т. е. за 214 дней).

Глава 9

Алгоритмы, процессы, игры

9.1 Алгоритмы и операции

Дополнительные задачи — в листке [Процессы и операции](#).

9.1.1. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2023, 5–6.2, 7–8.1, 9.3) На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

9.1.2. («*Бельчонок*», 2020, 8.2) В прошлом году первокурсник Сибирского федерального университета Миша прогуливался по лесу и заметил, что в субботу на одном из деревьев в лесу количество зелёных и красных листьев совпадало, а жёлтых листьев было в 7 раз больше, чем красных. В воскресенье на этом же дереве количество зелёных и жёлтых листьев совпадало, а красных листьев было в 7 раз больше, чем жёлтых. Докажите, что за ночь количество листьев на этом дереве уменьшилось хотя бы в 4 раза. (Зелёный лист может пожелтеть и покраснеть. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают.)

9.1.3. («*Будущие исследователи — будущее науки*», 2020, 8.3) n фишек с номерами $1, 2, \dots, n$ расставлены в ряд по возрастанию. За один ход разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно две фишки. Существует ли такое n , для которого удастся за несколько ходов расставить все фишки в обратном порядке?

9.1.4. («*Будущие исследователи — будущее науки*», 2016, 8.3, 9.3) На доске вначале было записано n чисел: $1, 2, \dots, n$. Разрешается стереть любые два числа на доске, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может оказаться на доске после $(n - 1)$ таких операций

а) при $n = 111$;

б) при $n = 110$?

9.1.5. (*Всесиб., 2021, 8.3*) В городе живут четыре ювелира, которым царь выслал 13 мешков с золотом. В первом мешке лежал один слиток золота, во втором — два, в третьем — три, ..., в тринадцатом — 13 золотых слитков. Один из мешков сразу куда-то потерялся, а оставшиеся ювелиры распределили так, что каждому досталось и равное количество золотых слитков, и равное количество мешков. При этом мешок с одним слитком достался первому ювелиру, с тремя — второму, с одиннадцатью — третьему. Определите, какие мешки достались четвёртому ювелиру, если слитки из мешков не доставали.

9.1.6. (*«Высшая проба», 2023, 8.3*) За один ход можно выбрать натуральное число x и вычеркнуть все натуральные числа y такие, что $|x - y|$ — натуральное составное число. При этом в качестве x можно выбирать уже вычеркнутые числа.

Какое наименьшее количество ходов понадобится, чтобы вычеркнуть из натурального ряда все числа?

9.1.7. (*Открытая олимпиада, 2020, 8.5*) На доске было написано число, состоящее из 99 пятёрок. С числом на доске разрешается совершать следующие операции:

1. уменьшать две соседние ненулевые цифры на 1;
2. уменьшать две ненулевые цифры, между которыми стоят ровно две цифры, на 1;
3. менять местами две цифры, между которыми стоит ровно 5 цифр.

Если после выполнения такой операции в начале числа оказались нули, они исчезают.

После выполнения некоторого количества таких операций на доске оказалось однозначное число. Какое именно?

9.1.8. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.5, 9.4*) На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на центральном квадратике одной из его граней, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

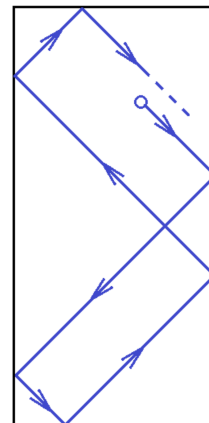
1. При 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал.
2. При 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Завершил жучок свое движение через 2023 с после его начала. Через сколько секунд после начала движения жучок впервые оказался на том квадратике, на котором он в конце остановился?

9.1.9. (*Всесиб., 2021, 8.5*) Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромов стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёт на один из островов, а затем проплыть на $n - 1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёт можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

9.1.10. (*Всесиб., 2018, 8.5*) В большом вольере живёт сто попугайчиков. В некоторый момент оказалось, что каждый из них за свою жизнь клюнул ровно пять других попугайчиков из этого вольера. Докажите, что можно выпустить на волю десять таких попугайчиков, что никто из них друг друга не клевал.

9.1.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 8.6*) Дан прямоугольник размером 2021×4300 . В какой-то точке внутри него стоит бильярдный шар. Его запускают по прямой, образующей угол 45° со сторонами прямоугольника. Достигая стороны, шар отражается также под углом 45° ; если шар попадает в угол, то выходит из него по той же линии, по которой вошёл. (Пример начала пути шара показан на рисунке.)



- Для любой ли точки верно, что если выпустить из неё шар по таким правилам, он вернётся туда ещё раз?
- Допустим, что стартуя в некоторой точке A , шар через некоторое время в неё возвращается. Какое максимальное количество ударов о бортики он может совершить, прежде чем впервые вернётся в точку A ?

9.1.12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.6, 7–8.6, 9.6*) К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах. От каждой планеты расходуется 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т.е. если есть портал, ведущий из A в B , то нет портала, ведущего из B в A . Мистер Риггз хочет добраться с Галатеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

9.1.13. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.10*) В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \dots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?

9.1.14. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2023.4*) В $2n$ бочках налито $2n$ различных реактивов (в каждой — один реактив). Они разбиваются на n пар конфликтующих реактивов, но неизвестно, какая бочка конфликтует с какой. Инженеру нужно узнать это разбиение. У него есть n пустых пробирок. За одно действие он может долить в любую пробирку (пустую или непустую) реактив из любой бочки, других действий с реактивами он делать не может. Пока в пробирке нет конфликтующих соединений, в ней ничего не происходит. Как только среди реактивов, содержащихся в ней, появляются конфликтующие, она лопается, и больше её использовать не получится. Выливать из пробирки ничего нельзя. Как инженеру добиться своей цели?

9.1.15. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2021.2*) Кошей Бессмертный открыл счет в банке «Спёрбанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кошей кладёт на счёт k ($k > 0$) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет $k + 1$ рублей, на третий — $k + 2$ рубля и т. д.) Каждый раз сразу после того, как Кошей вносит деньги на счёт, общая величина счёта уменьшается банком в два раза. Найдите все такие k , при которых сумма на счёте всегда будет выражаться целым числом рублей.

9.1.16. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2021.8*) Дано натуральное число n . За одну операцию можно либо вычесть из имеющегося числа любое натуральное число, меньшее его наименьшего простого делителя, либо разделить его на его наименьший простой делитель. Существует ли такое составное n , что из него нельзя получить простое число менее, чем за 2021 операцию?

9.1.17. (*ММО, 2021, 8.3*) В комнате находится несколько детей и куча из 2021 конфеты. Каждый из них по очереди подходит к куче, делит количество конфет в ней на количество детей в комнате (включая себя), округляет (если получилось нецелое число), забирает полученное число конфет и покидает комнату. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

9.2 Таблицы

Дополнительные задачи — в листке [Числовые таблицы](#).

9.2.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 8.2*) Числа от 1 до 9 расставили в клетки таблицы 3×3 так, что сумма чисел на одной диагонали равна 7, а на другой — 21. Чему равна сумма чисел в пяти закрашенных клетках?

9.2.2. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 8.6*) В таблице 3×3 расставлены действительные числа. Оказалось, что произведение чисел в любой строке и любом столбце равно 10, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 3. Найдите число, стоящее в центральной клетке.

9.2.3. (*Всеросс., 2023, МЭ, 8.4*) В клетках таблицы 2×35 (2 строки, 35 столбцов) расставлены ненулевые действительные числа, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце, выполнено следующее условие: одно число является квадратом другого.

1. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть в этой таблице?
2. Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

9.2.4. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 7.5, 8.4) В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?

9.2.5. («Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 8.5) В каждую клетку клетчатого квадрата 9×9 записаны нули. Требуется за несколько ходов составить магический квадрат (сумма во всех строках и столбцах должна быть равна одному и тому же числу). Можно ли это сделать, если за один ход разрешается

- а) выбрать строку и прибавить положительное число к любым двум соседним клеткам в выбранной строке, причем прибавляемое число разрешается менять от хода к ходу;
- б) прибавить единицу к любым двум соседним по стороне клеткам?

9.2.6. («Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 8.5) а) Дана прямоугольная таблица размера 4×10 (клеток). Какое наибольшее количество крестиков можно поставить в клетки этой таблицы, чтобы выполнялось такое условие: в каждой строке и в каждом столбце таблицы должно стоять нечетное количество крестиков?

б) Можно ли поставить несколько крестиков в таблицу размера 5×10 , чтобы выполнялось указанное условие?

9.2.7. (Всесиб., 2019, 8.5) Пусть m и n — нечётные натуральные числа. Каждую клетку таблицы из m строк и n столбцов покрасили в жёлтый или синий цвет. Назовём строку в этой таблице *желтоватой*, если в ней больше жёлтых клеток, чем синих. Назовём столбец *синеватым*, если в нём больше синих клеток, чем жёлтых. Чему равно наибольшее возможное общее количество желтоватых строк и синеватых столбцов?

9.2.8. (Открытая олимпиада, 2022, 8.6) В таблице 8×10 (8 строк, 10 столбцов) какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней в одной строке; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

9.2.9. (Открытая олимпиада, 2015, 8.7) В клетках таблицы 5×13 расставлены числа 0, 1 и 2, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

9.2.10. В клетках доски 8×8 расставлены натуральные числа от 1 до 64 (каждое по разу) так, что числа, отличающиеся на 1, стоят в соседних по стороне клетках. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на диагонали из левого нижнего в правый верхний угол?

9.2.11. (Всеросс., 2021, МЭ, 8.8) (Открытая олимпиада, 2021, 8.8) Можно ли в прямоугольной таблице 8×8 расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?

9.2.12. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.3*) В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа $1, 2, \dots, 99, 100$. Назовём **уголком** фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2 . Назовем уголок **хорошим**, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших уголков? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться.)

9.2.13. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.10*) В квадратной таблице 2021×2021 стоят натуральные числа. Можно выбрать любой столбец или любую строку в таблице и выполнить одно из следующих действий:

- 1) прибавить к каждому выбранному числу 1;
- 2) разделить каждое из выбранных чисел на какое-нибудь натуральное число.

Можно ли за несколько таких действий добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1?

9.2.14. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2021.7*) При каких натуральных n можно так отметить несколько клеток доски $n \times n$, чтобы во всех строках и столбцах было чётное число отмеченных клеток, а на всех $4n - 6$ диагоналях, длина которых больше одной клетки, — нечётное?

9.3 Взвешивания

Дополнительные задачи — в листке [Взвешивания](#).

9.3.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 8.1*) Имеется n кг крупы (n — целое число), чашечные весы и одна трехкилограммовая гиря.

- а) Докажите, что если n не делится на 3, то за несколько взвешиваний можно отмерить 1 кг крупы;
- б) Можно ли при $n = 19$ отмерить 1 кг крупы за три взвешивания?

9.3.2. (*САММАТ, 2021, 8.8*) Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. Как, воспользовавшись весами 11 раз, взвесить 2021 грамм сахара-песка, если после каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную ёмкость? Приведите последовательность взвешиваний.

9.3.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.4, 8.4*) Имеется десять монет разного веса и чашечные весы без гирь. Требуется выделить две монеты — самую тяжелую и самую легкую. Можно ли этого добиться за 13 взвешиваний?

9.3.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.5, 8.5*) У Пети есть 4 медных советских монеты — по одной номиналом 1, 2, 3 и 5 копеек. Он узнал из интернета такой факт: эти монеты должны весить ровно столько граммов, каков их номинал. Петя хочет проверить этот факт с помощью чашечных весов. Сможет ли он это сделать, если у него есть всего одна гирька в 9 граммов?

9.3.5. (*Олимпиада Эйлера, 39, 2022.2*) У царя Гиерона есть 13 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, . . . , 13 кг. Ещё у него есть прибор, в который можно положить один или несколько из имеющихся 13 слитков, и он просигналит, если их суммарный вес равен ровно 46 кг. Архимед, знающий веса всех слитков, хочет написать на двух слитках их веса и за два использования прибора доказать Гиерону, что обе надписи правильны. Как действовать Архимеду?

9.3.6. (*ММО, 2022, 8.4*) У входа на рынок есть двухчашечные весы без гирек, которыми каждый может воспользоваться по 2 раза в день. У торговца Александра есть 3 неотличимые внешне монеты весом 9, 10 и 11 грамм.

— Как жаль, что я не могу за 2 взвешивания разобраться, какая из моих монет сколько весит!

— Да! — поддакнул его сосед Борис. — У меня совершенно та же ситуация — тоже 3 неотличимые на вид монеты весом 9, 10 и 11 грамм!

Докажите, что если они объединят усилия, то за отведённые им 4 взвешивания определят веса всех шести монет.

9.3.7. (*ММО, 2021, 8.5*) В каждом из 16 отделений коробки 4×4 лежит по золотой монете. Коллекционер помнит, что какие-то две лежащие рядом монеты (соседние по стороне) весят по 9 грамм, а остальные по 10 грамм. За какое наименьшее число взвешиваний на весах, показывающих общий вес в граммах, можно определить эти две монеты?

9.4 Турниры

Дополнительные задачи — в листке [Турниры](#).

9.4.1. (*«Надежда энергетики», 2018, 8.2*) В футбольном турнире каждая команда должна сыграть по одному матчу с каждой из остальных. Но в ходе турнира половина всех команд была дисквалифицирована и выбыла из дальнейшего участия. В результате оказалось сыграно 77 матчей, а выбывшие команды успели сыграть все матчи между собой, причем число всех матчей, сыгранное каждое выбывшей командой, одинаково. Сколько команд было в начале турнира?

9.4.2. (*«Бельчонок», 2019, 8.5*) В шахматном турнире участвовали 50 бельчат-шахматистов. Перед обеденным перерывом на турнире была сыграна 61 партия, причём каждый бельчонок сыграл либо 2, либо 3 партии и никто из бельчат не играл друг с другом дважды. Возможно ли, что никакие два бельчонок, сыгравшие по 3 партии, не играли между собой?

9.4.3. (*«Бельчонок», 2019, 8.5*) В шахматном турнире участвовали 52 бельчонок-шахматиста. Перед обеденным перерывом на турнире было сыграно 64 партии, причём каждый бельчонок сыграл либо 2, либо 3 партии и никто из бельчат не играл друг с другом дважды. Возможно ли, что никакие два бельчонок, сыгравшие по 3 партии, не играли между собой?

9.4.4. (*«Бельчонок», 2022, 8.5*) Шесть команд провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?

9.4.5. (*«Бельчонок», 2022, 8.5*) Шесть команд провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?

9.4.6. (*«Бельчонок», 2022, 8.5*) Несколько команд провели турнир по гандболу — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Если по итогам две команды набрали одинаковое число очков, более высокое место присуждалось команде, у которой больше разница между числом забитых и пропущенных мячей. Три первые команды набрали соответственно 7, 5 и 3 очков. Сколько очков набрала последняя команда?

9.4.7. (*«Бельчонок», 2022, 8.5*) Несколько команд провели турнир по хоккею — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» одержала больше всех побед и набрала меньше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло принимать участие в турнире?

9.4.8. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2021.4*) Несколько команд сыграли турнир в один круг, причём ничьих не было. Оказалось, что среди любых 100 команд есть команда, выигравшая у всех остальных 99 команд, но нет команды, проигравшей всем остальным 99 командам. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире?

9.5 Игры и стратегии

Дополнительные задачи — в листке [Игры и стратегии](#).

9.5.1. (*Всесиб., 2017, 8.2*) Однажды Алексей и Данил играли в такую игру. Если на доске записано некоторое число x , то его можно стереть, а вместо него записать $2x$ или $x - 1000$. Проигрывает тот, кто получил число не больше 1000 или не меньше 4000. Оба игрока стремятся победить. В какой-то момент ребята перестали играть. Кто проиграл, если первым числом было 2017?

9.5.2. (*Открытая олимпиада, 2015, 8.3*) Петя, Вася и Тёма играют в игру. Первым ходит Петя, затем Вася, потом Тёма, затем снова Петя и т. д. Изначально на доске было написано число 123456789...123456789 (последовательность 123456789 повторяется 2015 раз). Своим ходом каждый игрок может стереть одну из цифр написанного на доске числа и прибавить её к получившемуся числу. Игра заканчивается, когда на доске остаётся одна цифра. Петя выигрывает, если это цифра 1, 4 или 7, Вася — если 2, 5 или 8, в остальных случаях выигрывает Тёма. Кто выиграет при правильной игре?

9.5.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 8.4, 10.1*) На доске написано число 2. Двое играют в игру, делая ходы по очереди: каждый из игроков своим ходом может написать на доске любую степень двойки (то есть число вида 2^k , $k \geq 1$). Игрок, после хода которого на доске появятся две одинаковые цифры, проигрывает. У кого из игроков (у того, кто начинает, или у его соперника) есть способ выиграть при любой игре другого? Как он должен действовать?

9.5.4. (*Всесиб.*, 2018, 8.4) Дядя Андрей и девочка Маша играют в игру. У них имеются две упаковки сока по 24 литра: один грушевый, другой вишнёвый. Кроме того, у Андрея есть кружка в 500 мл, а у Маши — две кружки по 240 мл. Игроки пьют сок по очереди по следующим правилам: они наполняют все свои кружки до краёв, а затем выпивают налитое до дна. При этом запрещается смешивать два вида сока в одной ёмкости. Если кто-то не может сделать ход, то ходит его соперник. Игра заканчивается, когда никто не может сделать ход. Побеждает тот, кто выпил больше сока. Может ли кто-либо обеспечить себе победу, если Андрей выбирает, кто ходит первым?

9.5.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»*, 2019, 8.5) Двое играют в такую игру. Первый загадывает 8 действительных чисел (не обязательно различных) и пишет на листочке все их попарные суммы в произвольном порядке (некоторые из них могут совпадать). Второй по полученным 28 суммам должен определить исходные числа. Всегда ли он может гарантированно это сделать?

9.5.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»*, 2018, 8.5, 10.4) Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 10 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Однако ходят они не по очереди. Сначала Петя делает столько ходов, сколько захочет (но меньше 10); потом он просит Васю сделать один ход; после этого Петя делает все оставшиеся ходы. Петя выигрывает, если результирующее число окажется точным квадратом; в противном случае выигрывает Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

9.5.7. (*«Курчатов»*, 2022, 8.5, 10.4) Покупатель пришел в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

9.5.8. (*«Покори Воробьевы горы!»*, 2023, 7–8.6, 9.5) Алиса и Боря по очереди зачёркивают буквы в надписи «Покори Воробьевы горы». За ход разрешается зачеркнуть одну букву или несколько одинаковых букв (большие и маленькие буквы не различаются). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Алиса ходит первой. Есть ли у одного из игроков стратегия, гарантированно позволяющая выиграть?

9.5.9. (*Открытая олимпиада*, 2023, 8.6) Шахматная доска 8×8 заполнена ладьями. Петя и Вася по очереди убирают с доски по одной ладье, начинает Петя. Убирать ладью, для которой не осталось бьющих её ладей, нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9.5.10. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.7, 9.8, 10.8*) Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа $0, 1, 2, \dots, 7, 8, 7, 6, \dots, 2, 1$. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1?

9.5.11. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.10*) На столе есть две кучки камней, в которых соответственно 100 и 101 камень. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается взять кучку, убрать из неё какое-то количество камней (хотя бы один) и разбить оставшиеся в этой кучке камни на две непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник?

9.5.12. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.4*) Петя и Вася играют в игру. Вася кладёт в ряд 150 монет: некоторые «орлом» вверх, некоторые — «решкой». Петя своим ходом может показать на любые три лежащие подряд монеты, после чего Вася обязан перевернуть какие-то две монеты из этих трёх по своему выбору. Петя хочет, чтобы как можно больше монет лежали «решкой» вверх, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет независимо от действий Васи добиться того, чтобы хотя бы k монет лежали «решкой» вверх?

9.5.13. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.8*) Сначала Саша прямолинейными разрезами, каждый из которых соединяет две точки на сторонах квадрата, делит квадрат со стороной 2 на 2020 частей. Затем Дима вырезает из каждой части по кругу. Докажите, что Дима всегда может добиться того, чтобы сумма радиусов этих кругов была не меньше 1.

9.5.14. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.4*) На полуокружности расположены 50 точек. Любые две точки, между которыми не более 9 других точек, соединены отрезком. Степенью точки назовём количество отрезков, выходящих из неё. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Панда своим ходом может стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых чётна. Вомбат может своим ходом стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых нечётна. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

9.5.15. (*«Высшая проба», 2023, 8.6*) На столе лежит 55 кучек конфет. В одной кучке лежит 1 конфета, в другой — две, в третьей — 3, ..., в последней — 55. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди; начинает Петя. За один ход игрок берёт одну конфету из любой кучки. Если игрок забрал из кучки последнюю конфету, то он её съедает, а иначе выбрасывает. Игра продолжается до тех пор, пока все конфеты из кучек не будут съедены или выброшены. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно съесть Петя?

9.6 Шахматные доски и фигуры

9.6.1. (*«Надежда энергетики», 2015, 8.3*) На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей?

9.6.2. (*Всесиб., 2015, 8.3*) Какое максимальное число ладей можно расположить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая ладья была не более чем одну другую? Ладья бьет все клетки вертикали и горизонтали, на которых стоит.

9.6.3. (*«Бельчонок», 2020, 8.4*) На шахматной доске 8×8 расставляют два чёрных и n белых ферзей так, что одноцветные ферзи не бьют друг друга. При каком наибольшем n это возможно? (Ферзь ходит на любое число полей по вертикали, горизонтали или диагонали и не бьет насквозь через другую фигуру.)

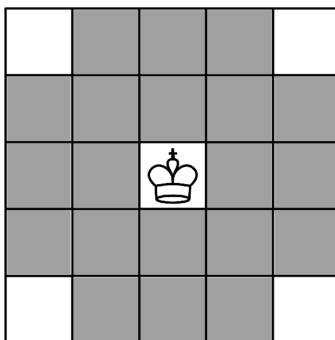
9.6.4. (*«Бельчонок», 2020, 8.4*) На шахматной доске 8×8 расставляют n королей и n ладей так, что никакие две фигуры не бьют друг друга. При каком наибольшем n это возможно? (Ладья ходит на любое число полей по вертикали или горизонтали. Король ходит на одно поле по вертикали, горизонтали или диагонали.)

9.6.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.5, 8.4*) На шахматной доске отметили центры некоторых клеток так, что никакой из треугольников с отмеченными вершинами не является прямоугольным. Какое наибольшее число точек могло быть отмечено?

9.6.6. (*Олимпиада КФУ, 2023, 8.5*) На шахматной доске стоят 12 ферзей. Докажите, что можно выбрать четыре строчки и четыре столбца так, чтобы ни на одной из 16 клеток, стоящих на их пересечениях, ферзей не было. Доска имеет размеры 8×8 .

9.6.7. (*«Курчатов», 2020, 8.5*) В клетках шахматной доски 8×8 стоят 8 белых и 8 чёрных фишек так, что никакие две фишки не стоят в одной клетке. Кроме того, ни в одном столбце и ни в одной строке не стоят одноцветные фишки. Для каждой белой фишки посчитали расстояние до чёрной фишки, стоящей с ней в одном столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих расстояний? Расстоянием между фишками будем считать расстояние между центрами клеток, которые они занимают.

9.6.8. (*Открытая олимпиада, 2020, 8.8*) Шахматная фигура великий султан бьёт клетки, закрашенные на рисунке серым. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга великих султанов можно расставить на клетчатой доске 9×9 ?



9.6.9. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.8*) Дана клетчатая доска 7×7 , длина стороны каждой клетки которой один сантиметр. Шахматная фигура Пифагор, стоящая на клетке A бьёт клетку B , если расстояние между центрами клеток A и B составляет пять сантиметров. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга Пифагоров можно расставить на доске?

Глава 10

Рассуждения и методы

10.1 Логика

Дополнительные задачи — в листке [Логические задачи](#).

10.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 8.3*) Четверо ребят гуляли вдоль аллеи и решили посчитать количество елей, высаженных вдоль неё.

- Аня сказала: «Вдоль аллеи всего 15 елей».
- Боря сказал: «Количество елей делится на 11».
- Вера сказала: «Елей точно меньше 25».
- Гена сказал: «А я уверен, что их количество делится на 22».

Один мальчик и одна девочка сказали правду, а остальные двое ошиблись. Сколько елей растёт вдоль аллеи?

10.1.2. (*Всесиб., 2016, 8.1*) На олимпиаде встретились гимназисты, лицеисты и обычные школьники. Некоторые из них встали в круг. Гимназисты всегда врут обычным школьникам, лицеисты — гимназистам, а обычные школьники — лицеистам. Во всех остальных случаях учащиеся говорят правду. Каждый сказал своему правому соседу: «Я — гимназист». Сколько ребят из обычных школ было в этом круге?

10.1.3. (*«Надежда энергетики», 2020, 8.1*) Если на педсовете Мария Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух — Александра Варфоломеевна или Петр Петрович — сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других — Ивана Ильича и Марьи Ивановны — сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

10.1.4. (*ММО, 2023, 8.2*) На столе в ряд стоят 23 шкатулки, в одной из которых находится приз. На каждой шкатулке написано либо «Здесь приза нет», либо «Приз в соседней шкатулке». Известно, что ровно одно из этих утверждений правдиво. Что написано на средней шкатулке?

10.1.5. (*«Бельчонок», 2021, 8.4*) В классе учатся 28 человек: отличники, троечники и двоечники. Всем ученикам было задано по два вопроса: «Отличников больше, чем двоечников?», «Троечников больше чем двоечников?». На каждый вопрос ответ «Да» дала ровно половина учеников, остальные сказали «Нет». Отличники на все вопросы отвечают правильно, двоечники всегда ошибаются. Троечник может на первый вопрос ответить верно, тогда на второй вопрос он отвечает неверно. Если же троечник на первый вопрос отвечает неверно, тогда на второй вопрос он отвечает верно. Что ответил на первый вопрос отличник?

10.1.6. (*«Шаг в будущее», 2018, 8.4*) В одной коробке лежат два ботинка 42 размера, в другой — два ботинка 43 размера, а в третьей — один ботинок 42, а другой 43 размера. Каждая коробка подписана (указан размер 42, 43 или 42 – 43), но надпись неправильно указывает содержимое коробки. Неверная информация написана на всех коробках. Из какой коробки, не глядя, надо вынуть ботинок, чтобы можно было определить содержимое каждой коробки?

10.1.7. (*«Надежда энергетики», 2022, 8.5*) Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали Торопыжка, Пончик и Сиропчик. Незнайка опросил свидетелей и установил следующее.

- Если Пончик ел корм, то Сиропчик не ел его.
- Свидетельства о том, что Пончик не ел и что Торопыжка не ел корм не могут быть истинными одновременно.
- Если Сиропчик не ел корм, то Пончик не ел его, а Торопыжка ел.

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить или оправдать в поедании ночью целого куля собачьего корма?

10.1.8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 6.6, 7.6, 8.5*) На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту.

10.1.9. (*Всеросс., 2021, МЭ, 8.7*) В городе Буквинске люди знакомы, только если в их именах есть одинаковые буквы, а иначе — нет. У нескольких жителей Буквинска спросили, сколько у них знакомых в городе. Мартин сказал, что 20, Клим — 15, Инна — 12, Тамара — 12. Что ответила Камилла?

10.1.10. (Всеросс., 2022, МЭ, 8.8) В ряд встали 7 гномов: Весельчак, Ворчун, Простачок, Скромник, Соня, Умник и Чихун. На каждом из них кофта с первой буквой его имени и колпак. У некоторых из них сегодня плохое настроение, и они при любой просьбе делают всё наоборот (остальные гномы делают то, что их попросят).

Белоснежка попросила снять колпак тех, рядом с которыми стоит хотя бы один гном с плохим настроением. Получилось так, как изображено на следующем рисунке: колпак сняли все гномы.



Удивившись, Белоснежка переставила гномов, всем надела колпаки и повторила свою просьбу. Получилось так, как изображено на следующем рисунке: колпак снял только Простачок.



У кого из гномов сегодня плохое настроение?

10.2 Рыцари и лжецы

Дополнительные задачи — в листках

- [Рыцари и лжецы. Рассуждения](#)
- [Рыцари и лжецы. Уравнения](#)

10.2.1. (Всесиб., 2015, 8.1) Оля, Олег и Паша заняли первые три места в соревновании. Каждый из них сказал, что занял первое место. Оля, кроме этого, сказала, что все нечетные места заняли мальчики, а Олег, что Оля не права. Известно, что дети либо всегда врут, либо всегда говорят правду. Кто какое место занял?

10.2.2. (*«Покори Воробьёвы горы!»*, 2022, 5–6.1, 7–8.1) На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды они собирали бананы и кокосы. Оказалось, что количество собранных бананов и количество собранных кокосов у всех разное. Каждый житель острова высказал два утверждения:

1. «Нет шести жителей, которые собрали бананов больше, чем я»,
2. «Хотя бы у семи жителей больше кокосов, чем у меня».

Могло ли это быть и, если да, сколько и каких жителей могло быть на острове? Укажите все возможные ответы.

10.2.3. (*«Росатом»*, 2023, 8.1) Ученики 8^А класса разделились на три категории. В первую вошли ученики, любящие свою школу, во вторую — «любящие, но не очень», а в третью — те, кто не любит свою школу. Ученики из первой категории на вопросы анкеты всегда дают правдивые ответы, из третьей — всегда лгут. Ученики второй группы обманывают и говорят правду при ответе на вопросы строго «через раз». На три вопроса анкеты

- 1) Любишь ли ты школу?
- 2) Любишь ли ты школу, но не очень?
- 3) Ты не любишь школу?

учеников просили ответить «Да» или «Нет». Оказалось, что «Да» на первый вопрос ответили 25, на второй — 21, на третий — 6 учеников. Сколько учеников класса «любят школу, но не очень», если в классе 31 ученик?

10.2.4. (*Всесиб.*, 2023, 8.2) На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 1001 житель этого острова встали в круг, и каждый из них сказал: «Все десять человек, следующие за мной по часовой стрелке, являются лжецами». Сколько среди вставших в круг могло быть рыцарей?

10.2.5. (*Всесиб.*, 2021, 8.2) В сказочной стране каждый поросёнок либо всегда врёт, либо всегда говорит правду, причём каждому поросёнку достоверно известно про каждого, лжец ли он. Однажды Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф встретились за чашечкой чая, и двое из них сделали по заявлению, однако, неизвестно, кто именно что произнёс. Один из трёх поросят сказал: «Ниф-Ниф и Наф-Наф оба всегда врут». Другой: «Ниф-Ниф и Нуф-Нуф оба всегда врут». Определите, сколько врунов среди трёх поросят.

10.2.6. (*«Бельчонок»*, 2021, 8.2) В финал шоу вышли 4 девушки: Саша, Аня, Женя, Даша. Каждый из 60 зрителей выбрал ровно одну девушку победительницей, и нажал кнопку с её именем. Затем всем 60 зрителям задали 4 вопроса. 1) Кто выбрал Сашу, поднимите руку! Было 20 поднятых рук. 2) Кто выбрал Аню, поднимите руку! Было 13 поднятых рук. 3) Кто выбрал Женю, поднимите руку! Была 21 поднятая рука. 4) Кто выбрал Дашу, поднимите руку! Было 10 поднятых рук. Две руки враз никто не поднимал. Однако некоторые зрители поднимали руку честно, а другие — обманывали, поднимали руку наоборот. Если, например, обманщик выбрал Аню, то он не поднимал руки, когда называли её имя, но поднимал, когда называли Сашу, Женю, Дашу. Сколько было обманщиков?

10.2.7. (*«Бельчонок», 2021, 8.2*) Каждый из 100 школьников записался ровно в один летний отряд: или «Робинзоны», или «Мушкетёры», или «Алые паруса», или «Улыбка». Потом всем школьникам задали 4 вопроса. 1) Ты записался в отряд «Робинзоны»? Было 24 ответа «Да». 2) Ты записался в отряд «Мушкетёры»? Было 29 ответов «Да». 3) Ты записался в отряд «Алые паруса»? Было 27 ответов «Да». 4) Ты записался в отряд «Улыбка»? Было 30 ответов «Да». Среди школьников были шутники, которые на все четыре вопроса отвечали неверно («Да» вместо «Нет», «Нет» вместо «Да»). Сколько было шутников?

10.2.8. (*Открытая олимпиада, 2016, 8.2*) На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: «Ровно 1 процент из присутствующих в этой комнате — лжецы».

Второй сказал: «Ровно 2 процента из присутствующих в этой комнате — лжецы».

...

Человек с номером n сказал: «Ровно n процентов из присутствующих в этой комнате — лжецы».

Сколько человек могло быть в комнате, если точно известно, что хотя бы один из них рыцарь?

10.2.9. (*Олимпиада КФУ, 2022, 8.3*) В ряд стоят 30 детей, одетых в синие и красные шапки. Известно, что мальчики в синих шапках и девочки в красных шапках говорят правду, а остальные дети лгут. Каждый мальчик сказал: «Все мои соседи — в красных шапках». Каждая девочка сказала: «Все мои соседи — в синих шапках». Докажите, что детей в синих шапках не меньше десяти. Соседями друг другу считаются два ребенка, стоящие рядом.

10.2.10. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.6*) На клетчатой доске 3×3 стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из них сказал: «Среди моих соседей ровно три лжеца». Сколько лжецов на доске?

Соседями считаются люди, находящиеся на клетках, имеющих общую сторону.

10.2.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 8.6*) В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве?

10.2.12. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 8.8*) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Однажды собрались 10 жителей острова, все они надели на себя футболки с номерами от 1 до 10 (у разных жителей разные номера). Каждый из них сказал одну из фраз:

- «Среди собравшихся нет рыцаря, номер футболки которого больше моего».
- «Среди собравшихся нет лжеца, номер футболки которого меньше моего».

Известно, что каждая из этих фраз прозвучала ровно 5 раз. Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 жителей? Укажите все возможные варианты.

10.2.13. (*Открытая олимпиада, 2017, 8.8*) На острове Глазном живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Кроме того, все жители острова либо синеглазые, либо кареглазые. Однажды встретились 100 жителей острова, после чего каждый сказал каждому одну из двух фраз: «Ты лжец» или «Ты синеглазый», причём фраз «Ты лжец» было больше половины. Какое количество кареглазых могло быть на острове? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

10.3 Оценка плюс пример

Дополнительные задачи — в листке [Оценка плюс пример](#).

10.3.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 8.2*) Малыши Коля и Маша учатся считать. В первую секунду Коля назвал число 1, во вторую — 2, в третью — 3 и т. д. Если Маше нравится число, названное Колей, то она записывает его себе в тетрадь, в конец текущей строки (одно число за другим, без пробелов и запятых). Спустя n секунд у Маши в тетради оказалось записано

$$2\ 7\ 2\ 6\ 2\ 5\ 2\ 4\ 2\ 3.$$

Какое наименьшее значение может принимать n ?

10.3.2. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 8.3*) В классе учатся 29 школьников: несколько отличников и несколько хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут. Все ученики этого класса сели за круглый стол.

- Несколько учеников сказали: «Рядом со мной ровно один хулиган».
- Все остальные ученики сказали: «Рядом со мной ровно два хулигана».

Какое наименьшее количество хулиганов может быть в классе?

10.3.3. (*Всеросс., 2022, МЭ, 8.1*) Числа x, y, z таковы, что $x \in [-3, 7]$, $y \in [-2, 5]$, $z \in [-5, 3]$.

1. Найдите наименьшее возможное значение величины $x^2 + y^2$.
2. Найдите наименьшее возможное значение величины $xyz - z^2$.

10.3.4. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 8.4*) По кругу стоят 36 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Известно, что рядом с каждым мальчиком стоит девочка, а рядом с каждой девочкой стоит человек в синей кофте. Найдите наибольшее возможное количество девочек в красных кофтах.

10.3.5. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 8.4*) В классе учатся 20 человек. Размышляя, каким девочкам отправить валентинку на 14 февраля, каждый мальчик составил список из всех симпатичных ему девочек-одноклассниц (возможно, пустой). Известно, что не существует трёх мальчиков, у которых списки совпадают по количеству девочек. Какое наименьшее количество девочек может быть в классе?

10.3.6. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 8.5*) На доске были написаны числа $1, 2, 3, \dots, 235$. Петя стёр несколько из них. Оказалось, что среди оставшихся чисел никакое не делится на разность никаких двух других. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

10.3.7. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.1*) Найдите наибольшее трёхзначное число АБВ, которое делится на двузначные числа АБ и БВ. (Разные буквы не обязательно обозначают разные цифры)

10.3.8. (*«Бельчонок», 2018, 8.1*) Ученики физматклассов Сибирского федерального университета выстроились в ряд. Рядом с каждым десятиклассником обязательно стоит одиннадцатиклассник. Сколько десятиклассников может стоять в ряду, если всего в ряду 47 учеников, и известно, что десятиклассников не меньше 6?

10.3.9. (*«Росатом», 2017, 8.1*) В вершинах четырехугольника размещены четыре целых положительных числа таких, что их произведение не превосходит 144, при этом сумма чисел, принадлежащих каждой стороне четырехугольника, одинаковая. Найти максимально возможное значение суммы чисел, расположенных в вершинах четырехугольника.

10.3.10. (*Открытая олимпиада, 2023, 8.1*) Какое наибольшее количество равных прямоугольных треугольников, длины катетов которых равны 6 и 8, можно разместить в прямоугольнике 10×40 ? Треугольники не должны иметь общих внутренних точек.

10.3.11. (*САММАТ, 2021, 8.10*) Какое наименьшее неотрицательное число можно получить путем расстановки знаков «+» и «-» между числами 1, 2, 3, ..., 2020, 2021?

10.3.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 8.2, 9.2*) Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Какое максимальное количество равновесных клеток может оказаться на доске? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

10.3.13. (*Открытая олимпиада, 2017, 8.2*) Мальчики собирали яблоки. Каждый собрал либо 10 яблок, либо 10% от общего количества собранных яблок, причём были и те, и другие. Какое наименьшее количество мальчиков могло быть?

10.3.14. (*Всеросс., 2022, МЭ, 8.3*) В ряд лежат 127 шариков, каждый из которых либо красный, либо зелёный, либо синий. Известно, что

- есть хотя бы один красный, хотя бы один зелёный и хотя бы один синий шарик;
- слева от каждого синего шарика лежит красный шарик;
- справа от каждого зелёного шарика лежит красный шарик.

1. Какое наибольшее количество красных шариков может лежать в ряду?

2. Какое наименьшее количество красных шариков может лежать в ряду?

10.3.15. (*«Росатом», 2020, 8.3*) Имеются шесть чисел ab , $a(a+4)$, $a(b+4)$, $b(a+4)$, $b(b+4)$, $(a+4)(b+4)$ для любой пары натуральных a и b , $a \neq b$. Среди них, при некоторых a и b , можно обнаружить квадраты целых чисел. При каких a и b количество квадратов будет максимально возможное?

10.3.16. (*Всеросс., 2022, МЭ, 8.4*) Ваня выписал в ряд без пропусков друг за другом все натуральные числа от 1 до N в следующем порядке:

$$1 \quad N \quad 2 \quad N-1 \quad 3 \quad N-2 \quad \dots$$

Например, при $N = 5$ получилось бы 15243, а при $N = 10$ получилось бы 11029384756. При каком наименьшем N в такой записи встретится последовательность цифр 301?

10.3.17. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 8.4, 9.4*) В клетчатом квадрате $n \times n$ каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем n всегда (т. е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

10.3.18. (*Открытая олимпиада, 2022, 8.4*) Внутри пятиугольника отметили 1000 точек и разделили пятиугольник на треугольники так, чтобы каждая из отмеченных точек оказалась вершиной хотя бы одного из них. Какое наименьшее число треугольников могло получиться?

10.3.19. (*САММАТ, 2021, 8.8*) На Юпитере 2020 стран, и для любой их четверки хотя бы одна страна из этой четверки враждует с тремя другими. Найти наименьшее возможное количество стран, которые враждуют сразу со всеми.

10.3.20. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 8.4*) На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если каждый прямоугольник содержит больше 2010, но меньше 2020 клеток.

10.3.21. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 6.4, 8.4, 10.3*) У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

10.3.22. (*Всесиб., 2023, 8.4*) Назовём число *замечательным*, если его можно разложить в сумму 2023 слагаемых (не обязательно различных), каждое из которых является натуральным составным числом. Найдите наибольшее целое число, не являющееся замечательным.

10.3.23. (*Всесиб., 2022, 8.4*) На кубической планете живут кубические мыши, причём живут они только на гранях куба, но никак не на рёбрах или вершинах. Известно, что на разных гранях живёт разное количество мышей, причём на любых соседних гранях это количество отличается по крайней мере на 2. Какое минимальное количество кубических мышей может жить на этой планете, если на каждой грани хоть кто-то да живёт?

10.3.24. (*Всесиб., 2016, 8.4*) В стране 15 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждому городу присваивается номер, равный количеству выходящих из него дорог. Оказалось, что между городами с одинаковыми номерами дорог нет. Какое наибольшее количество дорог может быть в стране?

10.3.25. («Курчатов», 2021, 8.4) На доске написано N натуральных чисел, где $N > 5$. Известно, что сумма всех чисел равна 80, а сумма любых пяти из них не больше 19. Какое наименьшее значение может принимать N ?

10.3.26. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.6, 7–8.4, 9.2) В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть «перекрёстком». Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрёстками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрёстка можно было проехать на любой другой?

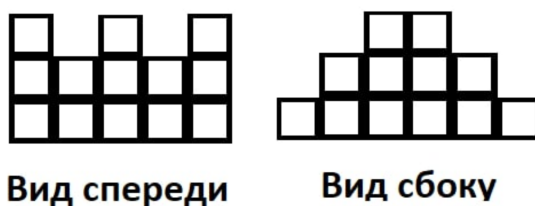


10.3.27. («Бельчонок», 2018, 8.5) На плоскости выбрали 35 точек. Середины отрезков, соединяющих каждую пару точек, покрасили в красный цвет. Каково наименьшее возможное число красных точек?

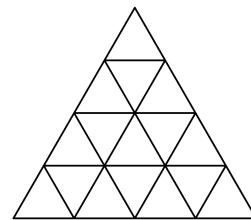
10.3.28. («Будущие исследователи – будущее науки», 2022, 8.5, 9.5) Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке.

- а) Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек?
- б) Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

10.3.29. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.5, 7–8.5, 9.4) Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?



10.3.30. (*Всеросс., 2020, МЭ, 8.6*) Треугольник разбит на треугольные ячейки так, как показано на рисунке. В каждую ячейку вписали натуральное число. Для каждой стороны треугольника есть четыре слоя, параллельных этой стороне, содержащие семь, пять, три и одну ячейку соответственно. Оказалось, что сумма чисел в каждом из этих двенадцати слоёв — простое число. Какова наименьшая возможная сумма всех записанных чисел?



10.3.31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.7, 7–8.6, 9.5*) Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5 м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

10.3.32. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.6*) В квадратной комнате на каждой стене есть лампочка, которая может гореть одним из семи цветов радуги. В комнате нет лампочек, которые горели бы одним цветом. За один ход человек может поменять цвет одной из лампочек, на тот, которым не горит ни одна лампочка в комнате на момент совершения хода, при этом он тоже изменит цвета на два оставшихся не использованных цвета. (После этого в комнате по-прежнему нет двух лампочек с одинаковыми цветами.) Какое наименьшее число ходов нужно совершить, чтобы в результате каждая лампочка погорела каждым из семи цветов?

10.3.33. (*Открытая олимпиада, 2017, 8.6*) Четырёхугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наибольшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

10.3.34. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 8.6, 11.4*) Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:

- нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
- нельзя проводить две диагонали с общим концом.

Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машинном рисунке?

10.3.35. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.7*) На острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. 50 жителей острова, среди которых есть как женщины, так и мужчины, собрались у костра. Каждый из них произнёс либо «Все мужчины у этого костра — каннибалы», либо «Все женщины у этого костра — вегетарианки», причём обе фразы прозвучали. Какое наибольшее число вегетарианок могло быть у костра?

10.3.36. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.7*) Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт, после чего зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, ..., 2019 (в некотором порядке, не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?

10.3.37. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.5*) При каком наибольшем n существует выпуклый n -угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?

10.3.38. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2023.3*) Среди натуральных чисел a_1, \dots, a_k нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем k может случиться, что все квадратные уравнения $a_i x^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0$, где $1 \leq i \leq k - 2$, не имеют корней?

10.3.39. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2023.6*) В Тридевятом царстве 100 городов, и каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Однажды царь приказал ввести на каждой дороге одностороннее движение, а заодно покрасить каждую дорогу в белый или черный цвет. Министр транспорта с гордостью сообщил, что после выполнения приказа из любого города в любой другой можно добраться по дорогам, чередуя их цвета, причем так, что первая дорога в пути будет белой. Какое наименьшее количество дорог могло быть в этой стране? Добираясь из города в город, можно проезжать через промежуточные города любое число раз.

10.3.40. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.2*) На доске написано n целых чисел, любые два из которых отличаются хотя бы на 3. Сумма квадратов двух наибольших из них меньше 500. Сумма квадратов двух наименьших из них также меньше 500. При каком наибольшем n это возможно?

10.3.41. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2020.7*) Дано натуральное число n . Множество A , составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа m , не превосходящего n , во множестве A есть число, делящееся на m . Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A ?

10.3.42. (*«Высшая проба», 2021, 8.6*) В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если: а) $n = 404$; б) $n = 406$?

10.3.43. (*ММО, 2023, 8.6*) На каждую клетку доски 8×8 поставили по сторожу. Каждый сторож может смотреть в одном из четырёх направлений (вдоль линий доски) и сторожить всех сторожей на линии своего взгляда. Для какого наибольшего k можно так направить взгляды сторожей, чтобы каждого сторожа сторожили не менее k других сторожей?

10.3.44. (*ММО, 2022, 8.6*) По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — максимальная разность между номерами соседних (по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение M ?

10.4 От противного

Дополнительные задачи — в листке [Доказательство от противного](#).

10.4.1. (*САММАТ, 2023, 8.6*) Среди чисел от 1 до 500 выбрали 430. Докажите, что произведение каких-то двух делится на 35.

10.4.2. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 8.2) Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены $2n$ городов, соединённых между собой дорогами так, что из каждого города выходит больше n дорог. Турист услышал в новостях, что какие-то два города пришлось закрыть на карантин, поэтому все дороги, ведущие к этим городам, были перекрыты. К сожалению, он не смог разобрать названия городов. Докажите, что турист, несмотря на перекрытия, всё ещё может доехать из любого незакрытого города в любой другой.

10.4.3. («Высшая проба», 2023, 8.4) В классе учатся поровну мальчиков и девочек. Назовём непустую группу мальчиков **популярной**, если каждая девочка в классе дружит хотя бы с одним мальчиком из этой группы (все дружбы взаимны). Оказалось, что в классе ровно 63 популярные группы. Докажите, что каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой.

10.4.4. («Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 8.4) В 8 классе 30 человек, из них 22 посещают кружок французского языка, 21 — кружок немецкого языка и 18 — кружок китайского языка. Докажите, что в классе есть ученик, посещающий все три кружка.

10.4.5. (Всесиб., 2023, 8.5) После удачного ограбления поезда 102 разбойника поделили добытые рубины, сапфиры и изумруды таким образом, что каждому суммарно досталось ровно 100 драгоценных камней. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих двух утверждений:

- Найдутся два разбойника, у которых поровну и рубинов, и сапфиров, и изумрудов;
- Найдутся два разбойника, у которых разное количество и рубинов, и сапфиров, и изумрудов.

10.4.6. (Открытая олимпиада, 2023, 8.8) В классе учатся 20 ребят, у каждого хотя бы 7 друзей среди одноклассников (дружба взаимна). Докажите, что есть двое, у которых не менее трёх общих друзей.

10.5 Разбиение на пары и группы

Дополнительные задачи — в листке [Разбиения на пары и группы](#).

10.5.1. (Всесиб., 2019, 8.1) Юра задумал четыре числа и выписал на доску все их попарные суммы. Когда Юра отвернулся, Сева стёр одну из сумм, после чего на доске остались написаны числа 19, 21, 22, 26 и 28. Какое число было стёрто?

10.6 Принцип крайнего

Дополнительные задачи — в листке [Принцип крайнего](#).

10.6.1. (Всесиб., 2019, 8.2) Про число N известно, что оно равно произведению десяти простых чисел (не обязательно различных). Кроме того, оказалось, что если каждый из этих десяти множителей увеличить на единицу, то полученное произведение будет делиться на N . Чему может быть равно N ?

10.6.2. (*Олимпиада Эйлера, 3Э, 2020.4*) Натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_k ($k < 2020$) удовлетворяют такому условию: для любого из них можно выбрать из остальных чисел одно или несколько так, чтобы сумма их 1024-х степеней делилась на его 1024-ю степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

Глава 11

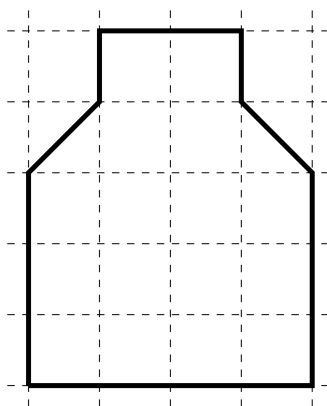
Комбинаторная геометрия

11.1 Разрезания

Дополнительные задачи — в листке [Разрезания](#).

11.1.1. (*Всесиб., 2021, 8.1*) Из квадрата 5 на 5 вырезана угловая клетка. Разрежьте его по линиям сетки на шесть многоугольников равной площади таким образом, чтобы среди них была ровно одна пара одинаковых.

11.1.2. (*Всесиб., 2022, 8.1*) Разрежьте данную фигуру на четыре попарно различных части так, чтобы у всех этих частей был одинаковый периметр. Напомним, что фигуры считаются различными, если их нельзя совместить наложением.



11.1.3. (*Олимпиада КФУ, 2023, 8.1*) Клетчатый прямоугольник, длины обеих сторон которого — чётные числа, разрезали на фигурки вида



так, что присутствуют фигурки обоих видов. Какую наименьшую площадь мог иметь такой прямоугольник? Приведите пример соответствующего разрезания и объясните, почему меньшая площадь невозможна. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Длина стороны прямоугольника равна количеству клеточек, прилегающих к ней. Площадь клетчатого прямоугольника — это количество клеток, которые он содержит.

11.1.4. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.1*) Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8×8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.

11.1.5. (*Олимпиада КФУ, 2022, 8.2*) Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может разрезать квадрат тремя прямыми так, чтобы получилось ровно семь частей — три треугольника и четыре четырёхугольника. Прав ли барон? Обоснуйте свой ответ. Разрезы должны идти от края до края.

11.1.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.2, 8.2*) Двумя перпендикулярными разрезами прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника. Известно, что у трёх из них периметр выражается целым числом. Обязательно ли и у четвертого прямоугольника периметр будет целым?

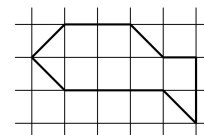
11.1.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 8.2*) Можно ли разрезать квадрат на четыре выпуклых многоугольника с разным числом сторон?

11.1.8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 8.2*) Докажите, что прямоугольник 1×10 можно разрезать на 7 частей и составить из них квадрат.

11.1.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.4, 8.3*) Клетчатый прямоугольник со стороной клетки 1 см и площадью 2021 см^2 двумя перпендикулярными разрезами вдоль линий сетки разрезали на четыре прямоугольные части. Докажите, что хотя бы у одной из частей площадь не менее 528 см^2 .

11.1.10. (*«Бельчонок», 2018, 8.3*) Можно ли разрезать квадрат 13×13 с вырезанной центральной клеткой на прямоугольники 1×4 ?

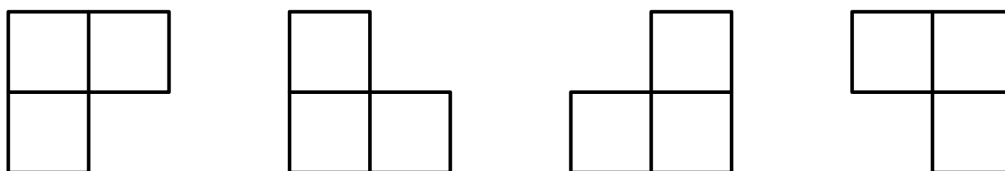
11.1.11. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.5*) На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рис.). Можно ли разрезать её на 5 треугольников и сложить из них квадрат? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



11.1.12. (*Всеросс., 2020, МЭ, 8.5*) Кузя разрезал выпуклый бумажный 67-угольник по прямой на два многоугольника, затем таким же образом разрезал один из двух получившихся многоугольников, затем один из трёх получившихся, и так далее. В итоге у него получилось восемь n -угольников. Найдите все возможные значения n .

11.1.13. (Всеросс., 2022, МЭ, 8.5) Клетчатый прямоугольник площади S таков, что:

- его целиком можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×13 ;
- его целиком можно разрезать по линиям сетки на трёхклеточные уголки (примеры уголков изображены на рисунке ниже);
- не существует клетчатого прямоугольника меньшей площади, удовлетворяющего двум предыдущим условиям.



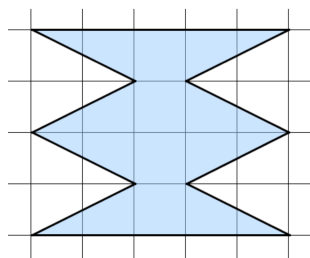
1. Найдите S .
2. Чему может быть равен периметр этого прямоугольника? Укажите все возможные варианты.

11.1.14. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2021.6) У уголка из трёх клеток *центральной* назовём клетку, соседнюю по стороне с двумя другими. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разбить на уголки из трех клеток тремя способами так, чтобы каждая ее клетка в одном из разбиений была центральной в своем уголке?

11.2 Геометрия на клетчатой бумаге

Дополнительные задачи — в листке [Геометрия на клетчатой бумаге](#).

11.2.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.4) Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Площадь каждого квадрата сетки равна 1 см^2 .



11.2.2. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2023.8) Назовем два числа **почти равными** друг другу, если они равны друг другу или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Клетчатый прямоугольник со сторонами, равными натуральным числам a и b , таков, что из него нельзя по линиям сетки вырезать прямоугольник, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника. Какое наименьшее значение может принимать число $|a - b|$?