

# Олимпиадная математика. 6 класс

## Задачник 6.2023

Данное пособие содержит задачи для шестиклассников, которые предлагались в последние годы на следующих олимпиадах:

1. [Всероссийская олимпиада школьников](#) (школьный этап в Москве, 2021–2023)
2. [Математический праздник](#) (2021–2023)
3. Математический праздник в Математической вертикали (2020–2023)
4. [Московская устная олимпиада для 6–7 классов](#) (2021–2023)
5. [Ломоносов](#) (2020–2023)
6. [Покори Воробьёвы горы!](#) (2020–2023)
7. [Курчатов](#) (2020–2023)
8. [Формула Единства / Третье тысячелетие](#) (2015–2023)
9. [САММАТ](#) (2021–2023)
10. [Бельчонок](#) (2018–2023)
11. [Олимпиада КФУ](#) (2022–2023)
12. [Надежда энергетики](#) (2019–2023)

Годы, являющиеся левой границей промежутка дат для каждой олимпиады, выбраны из следующих соображений.

- Более ранние задачи олимпиад, имеющих номера 1–7 в приведённом списке, можно найти в [олимпиадных листках](#) и в [Задачнике 6–7.2019](#). Кстати, многие пункты оглавления настоящего задачника дублируют названия указанных листков, и тогда раздел задачника начинается со ссылки на соответствующий листок.
- В остальных случаях нижняя граница определялась либо наличием соответствующих материалов на сайтах олимпиад, либо моими личными возможностями :-)

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее.

Распределение задач по темам зачастую сделано «на глаз»; в дальнейшем (по мере моего осмысления) некоторые задачи могут переместиться в другие темы. Актуальная версия задачника находится по адресу: <http://mathus.ru/math/6math2023.pdf>.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Начало</b>	<b>4</b>
1.1	Примеры и конструкции	4
1.2	Да или нет?	5
<b>2</b>	<b>Арифметика</b>	<b>9</b>
2.1	Десятичная запись	9
2.2	Арифметические действия	10
2.3	Ребусы	11
2.4	Делимость	13
2.5	Основная теорема арифметики	14
2.6	НОД и НОК	14
2.7	Дроби	14
2.8	Последняя цифра	15
2.9	Числовые неравенства	16
2.10	Остатки	16
<b>3</b>	<b>Текстовые задачи</b>	<b>17</b>
3.1	Движение	17
3.2	Работа	19
3.3	Стоимость	21
3.4	Части и отношения	21
3.5	Проценты	22
3.6	Смеси и концентрации	22
3.7	Часы, время, календарь	23
3.8	Возраст	24
3.9	Неравенства	24
3.10	Средние величины	26
3.11	Разные арифметические задачи	26
<b>4</b>	<b>Комбинаторика</b>	<b>29</b>
4.1	Перебор вариантов	29
4.2	Круги Эйлера	30
4.3	Правило произведения	30
4.4	Сочетания	32
4.5	Принцип Дирихле	32
4.6	Подсчёт двумя способами	33
4.7	Взаимно-однозначное соответствие	33
4.8	Дружбы	34

<b>5</b>	<b>Алгебра</b>	<b>35</b>
5.1	Суммирование . . . . .	35
5.2	Целая и дробная части . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Алгоритмы, процессы, игры</b>	<b>36</b>
6.1	Алгоритмы и операции . . . . .	36
6.2	Взвешивания . . . . .	40
6.3	Переливания . . . . .	41
6.4	Таблицы . . . . .	41
6.5	Игры и стратегии . . . . .	42
6.6	Турниры . . . . .	44
6.7	Шахматные доски и фигуры . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Рассуждения и методы</b>	<b>45</b>
7.1	Логика . . . . .	45
7.2	Рыцари и лжецы . . . . .	50
7.3	Оценка плюс пример . . . . .	52
7.4	Обратный ход . . . . .	56
7.5	От противного . . . . .	56
7.6	Разбиения на пары и группы . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Наглядная геометрия</b>	<b>58</b>
8.1	Наглядная геометрия на плоскости . . . . .	58
8.2	Наглядная геометрия в пространстве . . . . .	60
8.3	Прямоугольники и квадраты . . . . .	61
<b>9</b>	<b>Комбинаторная геометрия</b>	<b>63</b>
9.1	Разрезания . . . . .	63
9.2	Замощения плитками . . . . .	66
9.3	Геометрия на клетчатой бумаге . . . . .	67
9.4	Целочисленные решетки . . . . .	68

# Глава 1

## Начало

### 1.1 Примеры и конструкции

Дополнительные задачи — в листке [Примеры и конструкции](#).

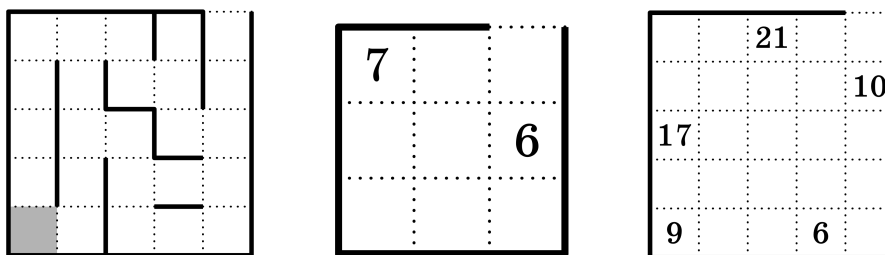
**1.1.1.** (*Олимпиада КФУ, 2022, 6.1*) Расставьте по кругу цифры от 1 до 9, каждую по одному разу, так, чтобы каждое двузначное число, составленное из двух идущих подряд по часовой стрелке цифр, делилось на 3 или 4.

**1.1.2.** (*Математический праздник, 2022, 6.1*) Тане и Ване дали одинаковые многоугольники из бумаги. Таня отрезала от своего листа кусок, и остался квадрат. Ваня отрезал точно такой же (и по форме, и по размеру) кусок по-другому, и у него остался треугольник. Нарисуйте пример, как это могло быть.

**1.1.3.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.2, 6.1*) Каждая клетка доски  $10 \times 10$  покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

**1.1.4.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 6.2*) На доске записано натуральное число. Каждую минуту с ним делают следующую операцию: если в нём есть две одинаковых цифры, то стирают любую из них; если же все цифры различны, то стирают всё число и вместо него пишут втрое большее число. Например, из числа 57 можно за две минуты получить  $57 \rightarrow 171 \rightarrow 71$  или  $57 \rightarrow 171 \rightarrow 17$ . Мария написала двузначное число и через несколько минут снова получила его же. Приведите пример, как она могла это сделать.

**1.1.5.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 6.4*) На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: квадрат (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки.

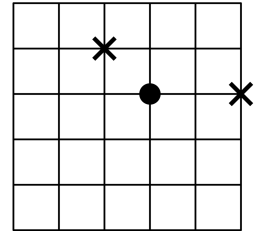


а) Найдите наименьшее количество шагов, за которое можно покинуть лабиринт (см. рис.

слева), стартовав из закрашенной клетки.

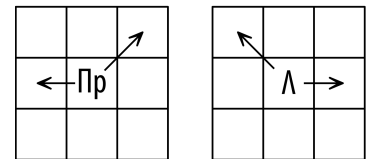
- б) На рисунке по центру мы скрыли от вас все внутренние стенки в лабиринте  $3 \times 3$ . Нарисуйте, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было покинуть лабиринт, стартовав из этой клетки.
- в) То же задание для лабиринта  $5 \times 5$  (см. рис. справа).

**1.1.6.** (*Математический праздник, 2022, 6.4, 7.4*) Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат  $5 \times 5$  метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.



1. Отметьте ещё пять перекрёстков, где могла бы задумчиво сидеть мышка (откуда до обоих кусочков сыра ей нужно пробежать одинаковое расстояние).
2. Придумайте, на каких двух перекрёстках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышкы перекрёстков оказалось как можно больше.

**1.1.7.** (*Математический праздник, 2023, 6.5*) Фигура «скрипач» бьёт клетку слева по стороне (локтем) и справа вверху по диагонали (смычком), если он правша, и, наоборот, правую клетку по стороне и левую верхнюю по диагонали, если левша (все скрипачи сидят лицом к нам). Посадите как можно больше «скрипачей» в «оркестр»  $8 \times 8$  клеток, чтобы они не били друг друга. (Вы можете использовать любое количество как правой, так и левой.)



**так бьёт  
правша**

**а так  
левша**

## 1.2 Да или нет?

Дополнительные задачи — в листке [Да или нет?](#)

**1.2.1.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.1*) Вершины правильного 222-угольника покрасили в красный и синий цвет. Будем называть сторону одноцветной, если вершины покрашены в один цвет, и разноцветной, если они покрашены в разные цвета. Можно ли так раскрасить вершины, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну?

**1.2.2.** (*«Бельчонок», 2020, 6.1*) Можно ли расставить вместо звездочек в выражении

$$0, ** + 0, ** + 0, ** + 0, ** = 1$$

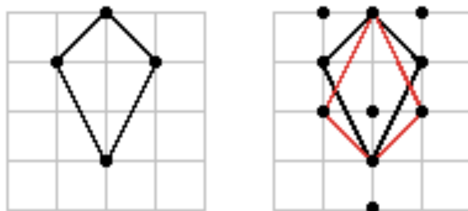
цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, используя каждую только один раз так, чтобы получилось верное равенство?

**1.2.3.** («Бельчонок», 2020, 6.1) Можно ли, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, составить три несократимые дроби  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$  и  $\frac{e}{f}$  такие, что  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$ ? Каждую цифру можно использовать один раз или не использовать вовсе.

**1.2.4.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.1, 6.1, 7.1) За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить  $142 + 2 = 144$ ,  $142 - 4 = 138$  и несколько других чисел).

- а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?
- б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021?

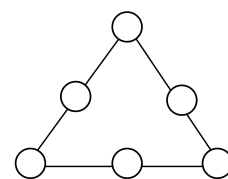
**1.2.5.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 6.1) Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги. Ему нравится, если четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную на рисунке (змей должен быть именно такой формы и размера, но может быть повернут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея.



Можно ли нарисовать некоторое количество точек так, чтобы количество змеев было больше, чем количество самих точек?

**1.2.6.** (Московская устная олимпиада, 2021, 6.1) Найдётся ли шестизначное число, кратное 31, из которого можно удалить две одинаковые цифры и при этом получить 2020?

**1.2.7.** (САММАТ, 2022, 6.2) Можно ли расставить в вершинах и на серединах сторон треугольника шесть различных целых чисел так, чтобы каждое число, стоящее в вершине, было равно сумме чисел в двух других вершинах и числа, стоящего на середине противоположной стороны? Приведите хотя бы один пример.



**1.2.8.** (САММАТ, 2021, 6.5) На 15 карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 13, 14, 15. Можно ли распределить эти карточки между Мишей, Сашей и Ваней таким образом, что сумма чисел на карточках у каждого из них была одинаковой? Ответ обоснуйте.

**1.2.9.** (САММАТ, 2021, 6.10) Имеется тринадцать плиток с одинаковой шириной в 10 см, но с разными длинами: 10 см, 20 см, 30 см, ..., 120 см, 130 см. Можно ли из всех плиток сложить прямоугольник со сторонами, превосходящими 40 см? Если да, то приведите пример расположения плиток.

**1.2.10.** («Бельчонок», 2018, 6.2) В художественном кружке дети занимаются рисованием или лепкой, а некоторые занимаются и тем и другим. Может ли быть так, что средний возраст тех, кто рисует, меньше 10 лет, и средний возраст тех, кто лепит, меньше 10 лет, а средний возраст всех детей в кружке больше 10 лет? (Средний возраст находится как сумма возрастов, поделенная на число детей.)

**1.2.11.** («Бельчонок», 2022, 6.2) У Волка в наборе имеются гири массами 90 г, 91 г, 92 г, ..., 100 г. Заяц положил на одну чашу весов гирьку массой 121 г. Может ли Волк уравновесить чаши весов, используя несколько гирь из своего набора?

**1.2.12.** («Бельчонок», 2022, 6.2) На доске подряд записаны все целые числа от 1 до 20. Заяц посчитал сумму всех этих чисел, получил число 210 и заметил, что оно делится на 1, 2, 3, 5, 6, 7. Может ли Волк стереть с доски не более шести чисел так, чтобы новая сумма делилась на 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**1.2.13.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 6.2, 7.3, 8.1) Полина написала восемь последовательных натуральных чисел и обвела четыре из них чёрной ручкой, а четыре — красной. Может ли произведение красных чисел оказаться в 20 раз больше произведения чёрных?

**1.2.14.** («Курчатова», 2022, 6.3) На доске по кругу записаны 5 различных натуральных чисел. Каждое из них Петя поделил на следующее за ним по часовой стрелке, а затем 5 полученных чисел (не обязательно целых) выписал себе на бумажку. Может ли сумма 5 чисел на бумажке оказаться целым числом?

**1.2.15.** («Бельчонок», 2018, 6.4) На поляне были 5 серых, 8 рыжих, 7 чёрных бельчат. Каждую минуту убегает два бельчонка любых разных цветов, а вместо них прибегают бельчонок третьего цвета. Может ли через несколько минут остаться а) один серый бельчонок; б) один рыжий бельчонок?

**1.2.16.** («Надежда энергетика», 2021, 6.4) Имеется 2021 целое число, их произведение равно 1. Может ли сумма всех этих чисел быть равной нулю?

**1.2.17.** («Бельчонок», 2022, 6.3) Все 10 гантелей веса 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 19, 23, 24 килограммов необходимо разложить на три стойки так, чтобы вес гантелей на первой стойке был в два раза меньше, чем вес гантелей на второй стойке. А вес гантелей на второй стойке в два раза меньше, чем вес гантелей на третьей стойке. Можно ли это сделать?

**1.2.18.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.4, 6.4) Шестеро школьников решили посадить в школьном дворе 5 деревьев. Известно, что каждое дерево сажало разное число школьников и каждый школьник участвовал в посадке одинакового количества деревьев. Могло ли так случиться?

**1.2.19.** («Бельчонок», 2019, 6.4) Утром ученики 6А, 6Б классов в рамках зимней универсиады пошли смотреть биатлон, а ученики 6В, 6Г — лыжные гонки. Оказалось, что на биатлоне было на 15 шестиклассников больше, чем на лыжных гонках. Вечером 6А и 6В пошли в кино, а 6Б и 6Г — в театр. Оказалось, что в кино было на 8 шестиклассников меньше, чем в театре. Могло ли такое быть?

**1.2.20.** (*«Надежда энергетики», 2020, 6.4*) В современных условиях считается актуальной **цифровизация** — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое **кодом буквы**. Тогда можно определить **вес слова** как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы О, П, С, Т, Ъ, Я элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ПЯТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то сколькими способами его можно осуществить? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

**1.2.21.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.5*) Существуют ли три попарно различные натуральные числа  $a, b, c$  такие, что  $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$  является квадратом целого числа?

**1.2.22.** (*Московская устная олимпиада, 2021, 6.6*) В ряд стоят семь коробок, в которых по порядку лежат 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 орехов. За один шаг можно выбрать любые две коробки А и Б, подсчитать общее количество орехов в коробках, стоящих между ними, и такое количество орехов перенести из А в Б. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы во всех коробках орехов стало поровну?

**1.2.23.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.7, 7–8.6, 9.5*) Можно ли так расставить знаки «+» и «−» на месте звездочек так, чтобы получилось верное равенство

$$* 1^2 * 2^2 * \dots * 2020^2 = 2020?$$



# Глава 2

## Арифметика

### 2.1 Десятичная запись

Дополнительные задачи — в листке [Десятичная система счисления](#).

**2.1.1.** («Ломоносов», 2022, 5–6.1) Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого все цифры различны, причём никакие две из них нельзя поменять местами так, чтобы получилось меньшее число.

**2.1.2.** (САММАТ, 2022, 6.1) Разность между двузначным числом и произведением его цифр равна утроенному произведению суммы его цифр. Найдите это число.

**2.1.3.** (САММАТ, 2021, 6.4) Найдите все трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

**2.1.4.** (САММАТ, 2022, 6.8) Задано двузначное число. Разность между этим числом и двузначным числом, которое получено перестановкой местами чисел десятков и единиц исходного числа, равна 18. Найти разность между максимальным и минимальным значениями таких заданных двузначных чисел.

**2.1.5.** («Бельчонок», 2019, 6.2) На доске записано число 679854, в котором использованы 6 последовательных цифр. Найдите следующее за ним большее число, в записи которого также используются 6 последовательных цифр (может быть, других).

**2.1.6.** («Курчатов», 2021, 6.2) В двузначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

**2.1.7.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 6.3*) Ваня написал на доске четырёхзначное число. Таня записала цифры этого числа в обратном порядке и получила другое четырёхзначное число. Потом Ваня и Таня вместе нашли сумму записанных чисел.

- а) Приведите пример числа Вани, при котором сумма будет равна 4004.
- б) Какая наибольшая сумма могла получиться?
- в) Приведите пример числа Вани, когда такая сумма получается.
- г) Какое число мог написать Ваня, если сумма равна 18777? Найдите все варианты.

**2.1.8.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2022, 6.3*) Найдите шестизначное число, у которого первая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё и вторая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё.

**2.1.9.** (*«Ломоносов», 2021, 5–6.4*) Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

**2.1.10.** (*«Ломоносов», 2020, 5–6.5*) Вовочка складывает числа в столбик следующим образом: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр в одинаковых разрядах пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, для суммы  $248 + 208$  он получил бы значение 4416.

- а) В скольких случаях Вовочка получит правильный ответ, складывая всевозможные пары трёхзначных чисел? (Если некоторые два различных числа Вовочка уже складывал ранее в другом порядке, то он этого не замечает.)
- б) Найдите наименьшую возможную разность между верным ответом и ответом Вовочки для всех остальных пар трёхзначных чисел.

## 2.2 Арифметические действия

Дополнительные задачи — в листке [Арифметические действия](#).

**2.2.1.** (*САММАТ, 2021, 6.7*) Петя и Маша купили лотерейные билеты с номерами 462758 и 439224 и обнаружили, что в каждом из номеров можно расставить знаки арифметических действий и скобки так, что в каждом случае результат будет равным 100. Как это можно сделать?

**2.2.2.** («Надежда энергетики», 2019, 6.1) Задано правило, по которому каждой паре целых чисел  $X$  и  $Y$  ставится в соответствие число  $X \nabla Y$ . (Значок « $\nabla$ » означает применение правила к числам  $X$  и  $Y$ .) Известно, что для любых целых чисел  $X, Y$  верны свойства

1.  $X \nabla 0 = X$ ,
2.  $X \nabla (Y - 1) = (X \nabla Y) - 2$ ,
3.  $X \nabla (Y + 1) = (X \nabla Y) + 2$ .

Найдите формулу, которая описывает действие заданного правила, и решите уравнение

$$X \nabla X = -2019.$$

**2.2.3.** («Бельчонок», 2022, 6.2) Поставьте вместо точек (•) числа 6, 7, 8, 9, 52, 100 (надо использовать все числа), а вместо звёздочек (\*) какие-нибудь знаки арифметических операций из набора (+, −, ×, :) так, чтобы получилось верное равенство

$$\bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet = 623.$$

Если потребуется, можно расставить скобки.

**2.2.4.** (Московская устная олимпиада, 2022, 6.4) На доске записаны числа 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Поставьте между некоторыми из них знаки «+» и «−» так, чтобы значение получившегося выражения было равно 2022, используя наименьшее количество минусов.

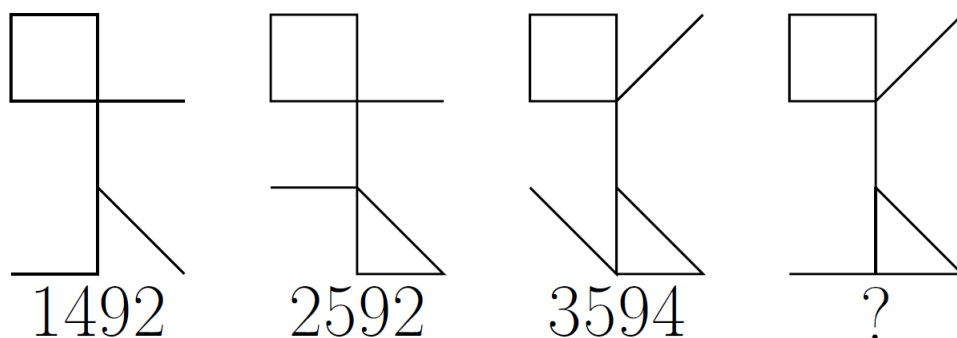
## 2.3 Ребусы

Дополнительные задачи — в листке [Ребусы](#).

**2.3.1.** («Бельчонок», 2022, 6.1) Найдите три решения ребуса  $MA = P \times K = E + P$ , в котором буквы заменены цифрами так, чтобы равенства стали верными (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры).

**2.3.2.** («Бельчонок», 2022, 6.1) Найдите три решения ребуса  $** + ** = 17*$ , в котором звёздочки заменены цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр различные.

**2.3.3.** («Ломоносов», 2023, 5–6.2) В одном средневековом монастыре пользовались такой системой записи чисел:



Какое число стоит на четвёртом месте? Ответ поясните.

**2.3.4.** (САММАТ, 2021, 6.3) В примере на сложение  $a, b, c, d, e, f, g$  — цифры, причем различным буквам соответствуют различные цифры,  $a, c, e$  — не нули. Найти, какой цифре соответствует каждая буква, если справедливо

$$+ \begin{array}{r} a \ b \\ c \ d \\ \hline e \ f \ g \end{array}$$

**2.3.5.** (САММАТ, 2022, 6.3) Восстановите поврежденную запись

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \ 6 \\ \quad * \ * \\ \hline + \quad 5 \ * \\ \quad * \ * \\ \hline 8 \ * \ * \end{array}$$

В ответ запишите результат произведения.

**2.3.6.** (САММАТ, 2023, 6.7) Найдите решение ребуса

$$A \cdot B + A + B = \overline{AB},$$

$A$  и  $B$  — различные цифры; запись  $\overline{AB}$  означает двузначное число (то есть  $A \neq 0$ ), составленное из цифр  $A$  и  $B$ . В качестве ответа напишите числа  $\overline{AB}$ .

**2.3.7.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.5, 6.5) Экран калькулятора изначально выглядел так:



Но потом некоторые палочки на нём перегорели. Поэтому получилось, что  $275 \times 9 = 1279$  (см. рис.). Восстановите, что вводили на самом деле и какое число получилось (найдите все возможные варианты и объясните, почему никаких других быть не может).



**2.3.8.** (Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.5, 7.5) Вася решил зашифровать номер своего телефона. Для этого он заменил каждую цифру на символ, состоящий из одной или двух сторон/диагоналей квадрата, причём у каждой цифры свой уникальный код. Оказалось, что если у кодов двух цифр есть общий отрезок, то эти цифры отличаются не более, чем на два.



Пете удалось расшифровать номер телефона Васи, когда он догадался, что номер начинается с 8. Расшифруйте и Вы.

**2.3.9.** («Ломоносов», 2023, 5–6.6, 7–8.6) До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 1, \bar{b} = 2, \bar{r} = 3, \bar{d} = 4, \bar{e} = 5, \bar{y} = 8; \\ \bar{k} &= 20, \bar{l} = 30, \bar{m} = 40, \bar{n} = 50, \bar{o} = 70, \bar{p} = 80, \bar{c} = 90; \\ \bar{p} &= 100, \bar{c} = 200, \bar{t} = 300, \bar{y} = 400, \bar{f} = 500, \bar{x} = 600, \bar{h} = 900. \end{aligned}$$

С помощью букв числа записываются так: например,  $\overline{цла} = \bar{c} + \bar{l} + \bar{a} = 900 + 30 + 1 = 931$ . Или  $\overline{мд} = 44$ . Или  $\overline{ра} = 101$ .

Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи  $\overline{да}$ ,  $\overline{чух}$ ,  $\overline{или}$ ,  $\overline{ал}$ ,  $\overline{oooo}$  запрещены.

Найдите хотя бы одно решение ребуса в современных буквах

$$(\overline{**} + \overline{*} \times \overline{***}) \times \overline{*} = \overline{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

## 2.4 Делимость

Дополнительные задачи — в листке [Делимость](#).

**2.4.1.** (САММАТ, 2023, 6.3) К числу 2023 приписали слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, делящееся на 27. Найдите все такие числа.

**2.4.2.** (САММАТ, 2023, 6.9) Произведение пятизначного числа на 8 есть куб натурального числа. Найти наименьшее из таких пятизначных чисел.

**2.4.3.** (Олимпиада КФУ, 2023, 6.4) Назовем натуральное число *интересным*, если оно представляется как в виде суммы двух последовательных целых чисел, так и в виде суммы трех последовательных целых чисел. Коля перемножил пять различных натуральных чисел. Оказалось, что результат — интересное число. Докажите, что хотя бы один из множителей тоже был интересным числом.

**2.4.4.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.4, 6.3) В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов?

**2.4.5.** («Покори Воробьевы горы!», 2021, 5–6.4, 7–8.3) Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37.

**2.4.6.** («Покори Воробьевы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

**2.4.7.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 6.5) В весенний математический лагерь приехали от 50 до 70 детей. В честь дня числа  $\pi$  (14 марта) они решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей подсчитал, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя обнаружила, что всего кругов и квадратов было подарено одинаковое количество. Сколько детей приехали в лагерь?

**2.4.8.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 6.5) Существует ли такое натуральное число  $x$ , что среди утверждений « $x + 1$  кратно 19», « $x + 2$  кратно 18», « $x + 3$  кратно 17», ... « $x + 17$  кратно 3», « $x + 18$  кратно 2» ровно половина верных?

**2.4.9.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 6.5, 7.4) Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т. д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число орен, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч орен. Кто именно дружит с продавцом?

## 2.5 Основная теорема арифметики

Дополнительные задачи — в листке [Основная теорема арифметики](#).

**2.5.1.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.2, 6.2) Приведите пример таких целых чисел  $a$  и  $b$ , что  $ab(2a + b) = 2015$ .

**2.5.2.** («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.4, 7–8.3, 9.1) Найдите все пары простых чисел  $p$  и  $q$ , для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.

## 2.6 НОД и НОК

Дополнительные задачи — в листке [НОД и НОК](#).

**2.6.1.** (САММАТ, 2022, 6.10) Каким минимальным количеством плиток квадратного сечения можно замостить площадь в форме прямоугольника со сторонами 462 и 510 метров?

## 2.7 Дроби

Дополнительные задачи — в листке [Дроби](#).

**2.7.1.** (*Математический праздник, 2021, 6.1*) а) Впишите в клеточки четыре различные цифры, чтобы произведение дробей равнялось  $\frac{20}{21}$ :

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{20}{21}.$$

Решите эту задачу для трёх других арифметических действий: б) деления; в) вычитания; г) сложения.

**2.7.2.** (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.1*) Найдутся ли семь различных правильных несократимых дробей со знаменателями от 2 до 6 и с суммой 4?

**2.7.3.** (*Всеросс., 2022, ШЭ, 6.5*) Несколько одноклассников вместе съели торт. Лёша съел больше всех —  $\frac{1}{11}$  от всего торта, а Алёна — меньше всех —  $\frac{1}{14}$  от всего торта. Сколько одноклассников ели торт? Укажите все возможные варианты.

**2.7.4.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.3, 7–8.2*) Пусть  $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$  и дробь  $\frac{a}{b}$  несократима. Какой остаток даёт  $a$  при делении на 601?

**2.7.5.** (*Московская устная олимпиада, 2022, 6.7*) Для натуральных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , среди которых нет одинаковых, выполняется равенство  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{b}{d} - \frac{a}{c}$ . Докажите, что произведение чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  является квадратом целого числа.

## 2.8 Последняя цифра

Дополнительные задачи — в листке [Последняя цифра](#).

**2.8.1.** (*«Надежда энергетики», 2020, 6.2*) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$6^{2020} + 2019^{2020}?$$

**2.8.2.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Найдите последнюю цифру числа

$$202^{303^{404}}.$$

**2.8.3.** (*САММАТ, 2023, 6.8*) Найдите две последние цифры, на которые оканчивается сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2.$$

## 2.9 Числовые неравенства

**2.9.1.** (*Математический праздник, 2023, 6.1*) На доске написаны две суммы:

$$1 + 22 + 333 + 4444 + 55555 + 666666 + 7777777 + 88888888 + 999999999,$$

$$9 + 98 + 987 + 9876 + 98765 + 987654 + 9876543 + 98765432 + 987654321.$$

Определите, какая из них больше (или они равны).

**2.9.2.** (*«Надежда энергетики», 2019, 6.2*) Что больше: сумма всех нечетных чисел от 1 по 2019 (включительно) или сумма всех четных чисел от 2 по 2018 (включительно)?

**2.9.3.** (*«Надежда энергетики», 2021, 6.3*) Сравните дроби

$$\frac{202120202021}{202120212022} \quad \text{и} \quad \frac{202120192020}{202120202021}.$$

**2.9.4.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.3, 9.2*) Сравните числа

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad 2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

**2.9.5.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.6, 7–8.4, 9.3*) Сравните числа

$$\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023} \quad \text{и} \quad \frac{5}{16}.$$

## 2.10 Остатки

Дополнительные задачи — в листке [Деление с остатком](#).

**2.10.1.** (*САММАТ, 2021, 6.1*) Найти минимальное пятизначное число, все цифры которого различны и при делении которого на 91 в остатке имеем 4.

**2.10.2.** (*САММАТ, 2022, 6.5*) Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт в остатке 3, при делении на 6 — в остатке 4, а при делении на 7 — в остатке 5.

**2.10.3.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.2, 7–8.1*) Определите, является ли число

$$N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$$

простым или составным. Ответ обоснуйте.



# Глава 3

## Текстовые задачи

### 3.1 Движение

Дополнительные задачи — в листке [Движение](#).

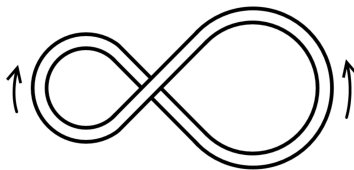
**3.1.1.** (*САММАТ, 2023, 6.1*) Две окружности радиусами  $R_1 = 16$  и  $R_2 = 24$  соприкасаются в одной точке, из которой одновременно начинают двигаться два муравья, каждый по своей окружности, с одинаковой скоростью. Какой путь пройдет каждый из муравьев до первой встречи в начальной точке, из которой они стартовали?

**3.1.2.** (*Олимпиада КФУ, 2022, 6.2*) Водитель поехал по шоссе из Казани в Нижний Новгород с постоянной скоростью. К сожалению, на некоторых частях пути дорога ремонтировалась, и на таких участках ему приходилось снижать скорость на четверть. Поэтому в тот момент, когда он должен был бы приехать в Нижний Новгород, он проехал лишь  $6/7$  пути. Какую часть времени водитель ехал по ремонтируемым участкам, если на оставшемся пути ремонтируемых участков не было? Обоснуйте свой ответ.

**3.1.3.** (*«Ломоносов», 2021, 5–6.2*) Баба-Яга должна прибыть на Лысую Гору ровно в полночь. Она рассчитала, что если полетит на ступе со скоростью  $50$  км/ч, то опоздает на  $2$  часа, а если на электровенике со скоростью  $150$  км/ч, то прилетит на  $2$  часа раньше. А чтобы прибыть на Лысую Гору точно в срок, Баба-Яга воспользовалась метлой. В котором часу Баба-Яга вылетела и с какой скоростью летела на метле?

**3.1.4.** (*«Покори Воробьевы горы!», 2020, 5–6.2, 7–8.1*) Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист прибыл в пункт  $B$ , сразу же развернулся и отправился обратно в пункт  $A$ . В этот момент велосипедист уже проехал  $10$  км. Когда велосипедист проехал еще  $2$  км, он встретил возвращающегося мотоциклиста. Найдите расстояние между пунктами  $A$  и  $B$ .

**3.1.5.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 6.2, 7.1) Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рис.).



Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?

**3.1.6.** (Математический праздник, 2021, 6.3, 7.2) Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каждый из них идет из дома в школу — Вася шел 8 минут, а Петя шел 5 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным. Получился ролик, на котором Вася идет из дома в школу, а потом в какой-то момент вдруг превращается в Петю и идет домой задом наперед. А какой длительности получился ролик?

**3.1.7.** («Покори Воробьевы горы!», 2021, 5–6.3, 7–8.2, 9.2) Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

**3.1.8.** (Всеросс., 2023, ШЭ, 6.7) Амурский и бенгальский тигры начали бегать по кругу в 12:00, каждый со своей постоянной скоростью. К 14:00 амурский тигр пробежал на 6 кругов больше бенгальского. Затем амурский тигр увеличил свою скорость на 10 км/ч, и к 15:00 он суммарно пробежал уже на 17 кругов больше бенгальского. Сколько метров составляет длина круга?

**3.1.9.** (Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.4) Петя наблюдает, как два муравья ползут с постоянными скоростями по прямой дорожке. Через 3 мин после начала наблюдения расстояние между муравьями было 9 м, через 5 мин — 5 м, через 9 мин — 3 м. Каким было расстояние между муравьями через 8 мин после начала наблюдения?

**3.1.10.** («Бельчонок», 2021, 6.4) В 12:50 из «тихого» леса в «шумный» лес выбежал бельчонок. Через 45 минут вслед за ним выбежал второй бельчонок и догнал первого, когда до «тихого» леса было в два раза ближе, чем до «шумного». Добежав до «шумного» леса, второй бельчонок сразу же повернул назад и встретил первого, когда до «шумного» леса было в два раза ближе, чем до «тихого». Найдите время, когда второй бельчонок вернется в «тихий» лес. Скорости бельчат постоянны.

**3.1.11.** («Бельчонок», 2021, 6.4) От деревни «Ёлкино» к деревне «Палкино» ходит автобус. Однажды, проехав ровно треть пути, он сломался, и простоял 12 минут. Чтобы наверстать время, на остатке пути автобус увеличил скорость в полтора раза, и прибыл в «Палкино» вовремя. Сколько времени идет автобус из «Ёлкино» в «Палкино»?

**3.1.12.** («Бельчонок», 2021, 6.4) Красная Шапочка несла пирожки бабушке. Она вышла в 10 часов утра. Пройдя три четверти пути, она встретила Серого Волка, поговорила с ним и угостила пирожками, это заняло 10 минут. Зато Серый Волк подвёз её до дома бабушки, а скорость у Волка была в три раза больше, чем у Красной Шапочки. Если бы Красная Шапочка не встретила волка, и шла бы, не останавливаясь, и с постоянной скоростью, она затратила бы на дорогу такое же время. В какое время Красная Шапочка пришла к бабушке?

## 3.2 Работа

Дополнительные задачи — в листке [Работа](#).

**3.2.1.** (САММАТ, 2021, 6.2) Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный кран, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды наполнилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

**3.2.2.** (САММАТ, 2021, 6.6) Две коровы за два дня дают 18 литров молока. Сколько литров молока дают четыре коровы за шесть дней?

**3.2.3.** (Матпраздник в Матвертикали, 2020, 6.1) Таня сфотографировала четырёх котиков, поедающих сосиски (рис. 1). Через 6 минут она сделала ещё один кадр (рис. 2). Каждый котик ест свои сосиски с постоянной скоростью, а на чужие не покушается.

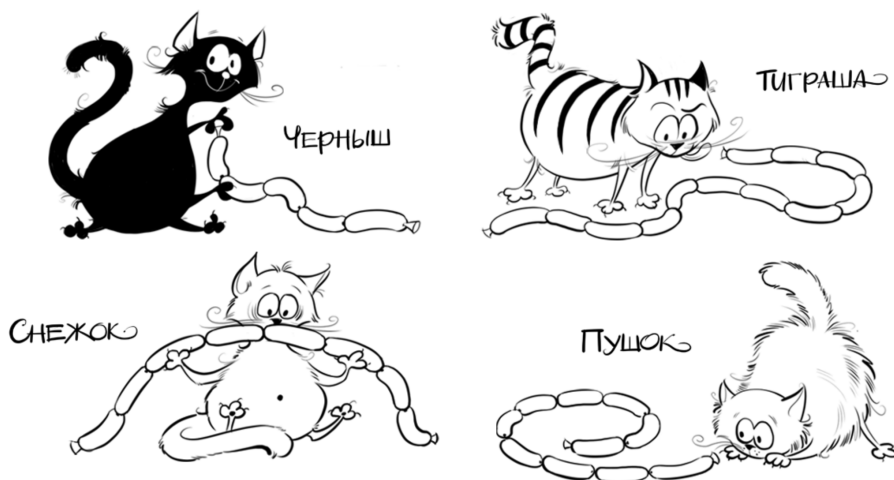


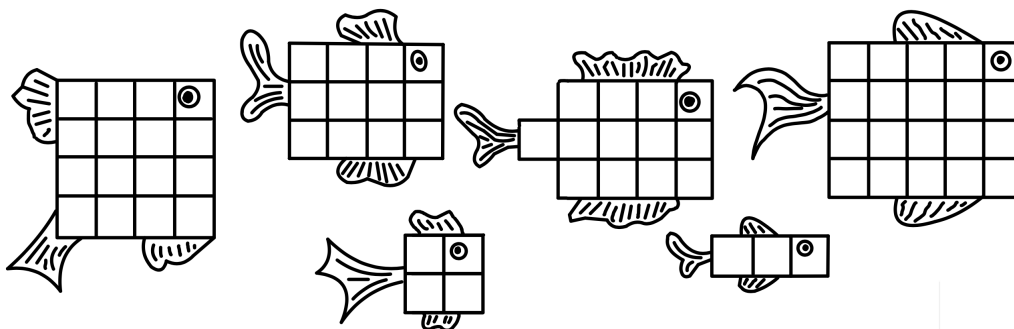
Рис. 1



Рис. 2

- а) Сколько всего сосисок съели котики за это время?
- б) Сколько времени понадобится Тиграше, чтобы доест свои сосиски?
- в) Кто доест последним?
- г) Кто доест первым?

**3.2.4.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 6.2*) Кот за полминуты съел половинку самой маленькой рыбки, а всего он съел 5 рыбок и потратил на это целое число минут (кот ест рыбу с постоянной в «клеточках» скоростью). На рисунке изображены все рыбки, которые были у кота. Какую рыбку кот не стал есть?



**3.2.5.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.3*) Коля делал домашнюю работу: за 2 часа он успел сделать половину заданий по математике,  $\frac{3}{4}$  заданий по физике и все задания по химии.

А когда он полностью закончил работу, то обнаружил, что на задания по химии ушло 25% от общего времени. Известно, что если бы он делал только физику, то сделал бы все задания по ней за час.

За какое время Коля сделал все задания?

**3.2.6.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.5, 6.4) Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны.

**3.2.7.** («Надежда энергетики», 2021, 6.5) Снегоплавильный комбинат работает 4 часа и 30 минут в день. Известно, что в течение любого промежутка времени длительностью в один час (в течение этих четырех с половиной часов) он плавит ровно 30 т снега. Можно ли утверждать, что средняя производительность снегоплавления составляет 30 т/час?

**3.2.8.** («Надежда энергетики», 2020, 6.5) За 10 минут Женя съедает 5 ватрушек с творогом, а Саша — только 3. В субботу все испеченные ватрушки достались Жене, а в воскресенье — Саше. При этом всего было съедено 35 ватрушек за полтора часа чистого времени. Сколько ватрушек с творогом досталось каждому из детей?

### 3.3 Стоимость

Дополнительные задачи — в листке [Стоимость](#).

**3.3.1.** («Бельчонок», 2018, 6.3) Буратино, Лиса Алиса и Кот Базилио решили вместе поесть рыбки. Буратино принес 7 рыбок, а Лиса Алиса — 4 рыбки. Кот Базилио внёс свой вклад деньгами, отдав 11 монеток. Лиса Алиса предложила поделить монетки пополам между ней и Буратино. А как надо справедливо поделить монетки между Буратино и Лисой Алисой, если они втроем съели всю рыбу, и ели поровну?

**3.3.2.** (САММАТ, 2023, 6.4) В кондитерском магазине продаются конфеты трех видов: карамельки по 3 рубля, ириски по 5 рублей и шоколадки по 10 рублей. Варя хотела приобрести ровно по 8 конфет каждого вида и захватила с собой 200 рублей. Утром она увидела в магазине объявления: «При оплате трех шоколадок получи на кассе бесплатную ириску» и «При оплате трех ирисок получи на кассе бесплатную карамельку». Сколько денег останется у Вари, когда у нее окажется по 8 конфет каждого вида?

**3.3.3.** («Бельчонок», 2021, 6.5) Два пирата делили между собой кучу в  $n^2$  монет. Каждый по очереди брал из общей кучи 10 монет. После того, как в очередной раз первый пират взял 10 монет, остаток в куче оказался меньше 10 монет. Чтобы обеспечить равный делёж, первый пират отдал второму свой кинжал. Сколько монет стоит кинжал? (Пираты не знают дробей, и кинжал стоит целое число монет).

### 3.4 Части и отношения

Дополнительные задачи — в листке [Части и отношения](#).

**3.4.1.** («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.1) У Пети есть 10 конфет и еще половина количества конфет, которые есть у Миши. А у Миши 15 конфет и еще 75% количества конфет, которые есть у Пети. Найдите общее количество конфет у Миши и Пети.

**3.4.2.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.3, 6.1, 7.1) Двум воронам как-то бог послал немного сыру. Первой вороне досталось 100 г, из которых часть отняла лисица. Кусочек у второй вороны оказался вдвое больше, чем у первой, но и съесть она успела вдвое меньше, чем первая ворона. Доставшаяся же лисице часть сыра от второй вороны оказалась втрое больше, чем от первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

**3.4.3.** («Бельчонок», 2023, 6.2) Трём братьям подарили коробку с фигурками Лего, и они решили поделить между собой эти фигурки в пропорции 1 : 3 : 4. Все они приходили к коробке в разное время, каждый думал, что он пришёл первым, и брал свою долю. Какое наименьшее целое число фигурок могло остаться после того, как все трое забрали свою долю?

**3.4.4.** (САММАТ, 2023, 6.10) В корзине находится не более 48 шаров четырех цветов: красные, белые, черные и синие. Красные составляют  $\frac{1}{3}$  от их количества, белые —  $\frac{1}{5}$  и черные —  $\frac{1}{9}$ . Сколько в корзине синих шаров?

**3.4.5.** («Покори Воробьевы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.2, 9.1) На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что не знают ни одного языка программирования. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем  $\frac{1}{6}$  из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила  $\frac{5}{12}$ . Сколько всего участников кружка?

**3.4.6.** («Надежда энергетики», 2023, 6.5) В понедельник Пончик приступил к поеданию пирожков с энергетическим повидлом. Каждый день он съедал одинаковое их количество и однажды обнаружил, что от начального запаса из 340 пирожков осталась только четверть ежедневной порции. В какой день недели это произошло?

## 3.5 Проценты

Дополнительные задачи — в листке [Проценты](#).

**3.5.1.** (Московская устная олимпиада, 2022, 6.1, 7.1) В водоёмах некоторой страны водятся крокодилы и бегемоты. В 20% водоёмов с крокодилами есть и бегемоты, в 25% водоёмов с бегемотами есть и крокодилы. 20% водоёмов свободны от животных. Какой процент водоёмов страны составляют те, в которых есть и крокодилы, и бегемоты?

## 3.6 Смеси и концентрации

Дополнительные задачи — в листке [Смеси и концентрации](#).

**3.6.1.** («Ломоносов», 2020, 5–6.3) В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе кислота будет составлять  $\frac{1}{20}$  часть, а во второй доля кислоты будет равна  $\frac{7}{30}$ . Какую часть будет составлять кислота в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

## 3.7 Часы, время, календарь

Дополнительные задачи — в листке [Разные арифметические задачи](#).

**3.7.1.** («Бельчонок», 2019, 6.1) Бельчонок празднует свой день рождения 4-го февраля. Чтобы хорошо отдохнуть, он лёг спать в полдень 17 января. В полдень в среду он проснулся, сразу же заснул снова, проспал в два раза дольше и проснулся в полдень 4-го февраля. На какой день недели приходится день рождения бельчонка?

**3.7.2.** («Ломоносов», 2020, 5–6.1) В некоторой семье папа работает по графику «2 через 2» (2 дня работает, 2 дня выходные), мама — по графику «1 через 2» (1 день работает, 2 дня выходные), а дети учатся по пятидневной рабочей неделе (с понедельника по пятницу). В субботу 2 сентября мама навещала бабушку в деревне, а следующий день вся семья провела дома. В какой день у них снова будет общий выходной?

**3.7.3.** (Матпраздник в Матвертикали, 2022, 6.1) Электронные часы показывают время: часы, минуты и секунды, например 18:00:00. Однажды на часах две цифры погасли, и остались только цифры 2, 0, 2, 2 (именно в таком порядке). Назовите самый поздний момент в сутках, когда это могло произойти.

**3.7.4.** (Матпраздник в Матвертикали, 2023, 6.1) Аня называет дату красивой, если все 6 цифр её записи различны. Например, 19.04.23 красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 нет.

а) Сколько красивых дат будет в апреле 2023 года?

б) Сколько всего красивых дат в 2023 году?

**3.7.5.** («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.2) Назовем дату «палиндромом» если она слева направо и справа налево читается одинаково (точки не учитываются). Например, дата 22.02.2022 является палиндромом. Когда наступит ближайшая следующая дата-палиндром?

**3.7.6.** («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.2, 7–8.1) Часы со стрелками показывают полдень. Сколько минут пройдет до ближайшего момента времени, когда прямая, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелкой, пройдет через отметку на циферблате, соответствующую 43 минутам?

**3.7.7.** (САММАТ, 2022, 6.7) Часы пробили полночь. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 2022 минуты?

**3.7.8.** («Ломоносов», 2023, 5–6.4) Гагара вылетела из населённого пункта Уэлен на Чукотке 1 июля ровно в 3 часа утра по местному времени и прилетела в населённый пункт Уэйлс на Аляске 30 июня ровно в 10 часов утра по местному времени. Оттуда гагара вылетела 1 июля в 3 часа дня по местному времени и прилетела обратно в Уэлен 2 июля в 4 часа дня по местному времени. Определите длительность полёта гагары в одну сторону, если известно, что в обе стороны она летела с одной и той же постоянной скоростью одним и тем же кратчайшим маршрутом, который пересекает линию перемены дат.

**3.7.9.** («Ломоносов», 2023, 5–6.5, 7–8.1) Некто раздобыл вот такие часы. Чтоб от них был хоть какой-то прок, он отломал все стрелки, кроме часовой, и настроил ход механизма так, чтоб часовая стрелка действительно делала оборот за 11 (общепринятых) часов, как утверждает циферблат. Например, если в полночь они показывали 00:00, то за следующие сутки такие часы успеют сделать два полных оборота, и ещё пройти до двух.



Ночью с 28 февраля на 1 марта, в полночь, этот человек настроил часы на 00:00. Какую долю времени в марте показания этих часов будут совпадать с показаниями нормальных?

**3.7.10.** («Ломоносов», 2022, 5–6.5) Кощей Бессмертный подарил Бабе-Яге электроступу. На приборной панели электроступы есть дисплей, который показывает время в формате ЧЧ:ММ (например, 13:56) и заряд ступы по стобалльной шкале (в целых числах от 1 до 100). Ступа расходует заряд равномерно и полностью разряжается за 10 часов. Дисплей в качестве наибольшего значения заряда показывает 100, а вместо того, чтобы показать 0, ступа опускается на землю из-за недостатка энергии. В 00:00 Баба-Яга отправилась в полёт на полностью заряженной ступе, и на протяжении всего времени до приземления ступа не получала питания. В какое время в течение полёта значения заряда ступы и число минут на дисплее совпадают?

## 3.8 Возраст

Дополнительные задачи — в листке [Разные арифметические задачи](#).

**3.8.1.** («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.1) Аня и Таня — сёстры, им вместе 28 лет. Сейчас Ане вдвое больше лет, чем было Тане в момент, когда Ане было столько лет, сколько Тане сейчас. Найдите возраст старшей из сестёр.

**3.8.2.** (САММАТ, 2022, 6.6) Сколько лет брату, если в прошлом году брат был старше сестры в 4 раза, а в будущем году сестра будет младше брата в три раза?

## 3.9 Неравенства

Дополнительные задачи — в листке [Неравенства](#).

**3.9.1.** («Ломоносов», 2023, 5–6.1) В тарелке 28 яблок и груш. Среди любых 11 фруктов есть хотя бы одно яблоко, а среди любых 19 фруктов есть хотя бы одна груша. Сколько яблок и сколько груш в тарелке?



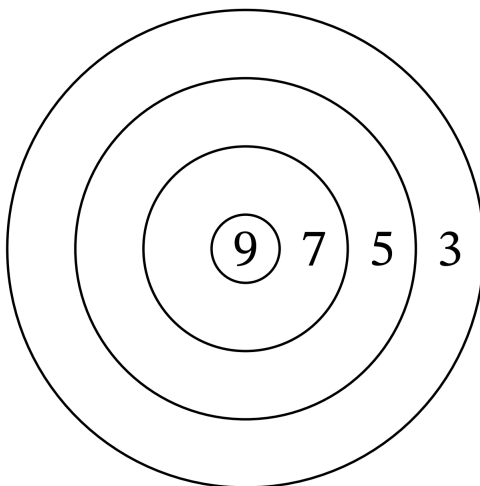
**3.9.2.** (*Всеросс., 2023, ШЭ, 6.2*) Петя и Вася решили получить как можно больше пятёрок за 1 и 2 сентября.

- 1 сентября они суммарно получили 10 пятёрок, причём Петя получил пятёрку больше, чем Вася;
- 2 сентября Вася получил 3 пятёрки, а Петя не получил ни одной;
- по итогам этих двух дней Вася получил больше пятёрок, чем Петя.

Кто сколько пятёрок получил за эти два дня?

**3.9.3.** (*Всеросс., 2022, ШЭ, 6.4*) Миша летом на даче изготовил себе самодельный дартс. Круглая доска разделена окружностями на несколько секторов — в неё можно кидать дротики. За попадание даётся столько очков, сколько написано в секторе, как указано на рисунке.

Миша кидал 3 раза по 8 дротиков. Во второй раз он выбил в 2 раза больше очков, чем в первый, а в третий раз в 1,5 раза больше, чем во второй. Сколько он выбил очков во второй раз?



**3.9.4.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 6.3*) Вася в течение 15 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач.

- а) Какая погода была на 10-й день? Сколько задач он решил в этот день?
- б) Какое наибольшее число задач мог решить Вася в 15-й день?

**3.9.5.** (*Математический праздник, 2023, 6.2*) Вася в течение 10 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач. Какая погода была на десятый день?

**3.9.6.** («Курчатов», 2023, 6.2) В школьной столовой есть несколько столов, за каждым из которых может сидеть не более 6 человек. На первой перемене в столовую пришли 50 школьников и расселись за столами так, что осталось ровно 3 свободных стола, после чего они ушли на урок. На второй перемене в столовую пришли 8 школьников и расселись за столами так, что осталось ровно 4 свободных стола. Сколько столов в столовой? (Стол называется свободным, если за ним никто не сидит.)

## 3.10 Средние величины

**3.10.1.** (САММАТ, 2023, 6.2) В классе 30 учеников. Средний рост всех учеников 160 см. Когда из класса перевелся в другой класс ученик с ростом 145 см, а в класс пришел новый ученик, то средний рост учеников в этом классе стал 161 см. Какой рост у пришедшего ученика?

## 3.11 Разные арифметические задачи

Дополнительные задачи — в листке [Разные арифметические задачи](#).

**3.11.1.** (Всеросс., 2022, ШЭ, 6.1) Пять последовательных натуральных чисел написаны в ряд. Сумма трёх самых маленьких из них равна 60. Чему равна сумма трёх самых больших?

**3.11.2.** (Олимпиада КФУ, 2023, 6.2) Амир тяжелее Ильнура на 8 кг, а Данияр тяжелее Булата на 4 кг. Сумма весов самого тяжелого и легкого мальчиков на 2 кг меньше, чем сумма весов двоих остальных. Все четверо весят вместе 250 кг. Сколько килограммов весит Амир?

**3.11.3.** (Всеросс., 2021, ШЭ, 6.3) Три купца: Фома, Ерёма и Юлий встретились в Новгороде. Если Фома отдаст Ерёме 70 золотых монет, то у Ерёмы и Юлия будет поровну денег. Если Фома отдаст Ерёме 40 золотых монет, то у Фомы и Юлия будет поровну денег. Сколько золотых монет должен отдать Фома Ерёме, чтобы у них двоих стало поровну денег?

**3.11.4.** (Всеросс., 2021, ШЭ, 6.4) В прибрежной деревне 7 человек рыбачат каждый день, 8 человек рыбачат через день, 3 человека рыбачат раз в три дня, а остальные не рыбачат вовсе. Вчера рыбачили 12 человек, сегодня рыбачат 10 человек. Сколько людей будет рыбачить завтра?

**3.11.5.** (Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.1) На ферме имеется водопой, пастбище и сарай. Утром в сарае находились 3 зебры и 2 страуса, а у водопоя — 1 зебра и 3 страуса. В полдень шесть ног перебежали из сарая на пастбище. А в час дня восемь ног перебежали от водопоя в сарай. После никто никуда не бегал.

а) Кто перебежал в полдень?

б) Сколько зебр и страусов будет в сарае после часа дня?

**3.11.6.** («Надежда энергетики», 2022, 6.1) Пять фиксиков собрали для утилизации отработанные энергосберегающие лампочки. Каждый из них подсчитал, сколько собрали все остальные (взяты вместе, без считающего). У первого вышло 25 лампочек, у второго — 30, у третьего — 45, у четвертого — 33, а у пятого — 27. Сколько всего энергосберегающих лампочек собрали все пятеро?

**3.11.7.** («Курчатов», 2023, 6.1) Два обжоры едят конфеты. Сначала первый ест 1 конфету, потом второй ест 2 конфеты, потом первый ест 3, потом второй ест 4, . . . , первый ест  $N$  конфет. Оказалось, что первый обжора съел суммарно на 100 конфет больше, чем второй. Найдите  $N$ .

**3.11.8.** («Курчатов», 2022, 6.1) У Деда Мороза было 120 шоколадных конфет и 200 мармеладных. На утреннике он раздавал детям конфеты: каждому досталось по одной шоколадной и одной мармеладной конфете. Пересчитывая конфеты после утренника Дед Мороз выяснил, что мармеладных конфет осталось в 3 раза больше, чем шоколадных. Сколько детей было на утреннике?

**3.11.9.** («Бельчонок», 2021, 6.2) Три бельчонок делили шишки. Сначала первый отдал половину своих шишек, поделив их поровну между вторым и третьим. Потом второй отдал две шишки третьему, и одну шишку первому. Потом третий отдал половину своих шишек, поделив их поровну между первым и вторым. После этого у каждого оказалось по 10 шишек. Сколько шишек было у каждого бельчонок в начале?

**3.11.10.** («Бельчонок», 2021, 6.2) Три бельчонок за неделю набрали вместе 100 шишек. За следующую неделю первые два бельчонок утроили свои запасы, а третий, наоборот, съел из своего запаса 20 шишек. Теперь у них вместе стало 160 шишек. Сколько шишек набрал в первую неделю третий бельчонок?

**3.11.11.** («Бельчонок», 2021, 6.2) В трёх бочках вместе было 90 литров воды. Потом в первой и второй бочке количество воды увеличилось в 2 раза, а в третьей уменьшилось на 7 литров, тогда в трёх бочках вместе стало 145 литров воды. Сколько литров воды изначально было в третьей бочке?

**3.11.12.** («Надежда энергетики», 2021, 6.2) В заповеднике «Зеленая гуща» установлены различные вышки наблюдения за животными. На каждой вышке есть несколько площадок наблюдения. Каждые две соседние по высоте площадки вышки соединены между собой двумя лестничными пролетами. Кроме того, еще один лестничный пролет соединяет самую нижнюю площадку каждой вышки с землей. Сколько таких вышек установлено в заповеднике, если общее количество площадок в них — 1021, а лестничных пролетов — 2021?

**3.11.13.** («Бельчонок», 2020, 6.3) На спортивные соревнования среди шестиклассников пришло несколько учеников, причем некоторые из них были с папами, а всего учеников и пап было 56 человек. Оказалось, что учеников, пришедших без пап, на 10 меньше, чем остальных учеников. Сколько пап присутствовало на соревнованиях? (Папы не приходили без детей, у каждого папы на соревнованиях по одному ребёнку.)

**3.11.14.** («Бельчонок», 2020, 6.3) У шестиклассниц Настя и Оксаны одинаковое количество тетрадей. Они купили одинаковые наборы наклеек. Настя наклеила на 7 тетрадей по одной наклейке, а на оставшиеся тетради — по 7 наклеек. Оксана наклеила на 13 тетрадей по одной наклейке, а на оставшиеся тетради — по 13 наклеек. Сколько наклеек было в наборе, если Настя и Оксана использовали свои наборы наклеек полностью?

**3.11.15.** («Бельчонок», 2023, 6.3) Ваня задумал 5 натуральных чисел (не обязательно разных). Если он складывает любые два из этих чисел, то получает только три значения: или 43, или 56, или 69. Какие числа задумал Ваня?

**3.11.16.** (*САММАТ, 2022, 6.9*) Алиса и Базилио продали за 3 дня 20 порций мороженого. Сегодня Алиса продала столько порций, сколько Базилио вчера и сегодня, но зато позавчера он продал на две порции больше, чем Алиса вчера и позавчера. Сколько порций мороженого продал каждый?

**3.11.17.** (*«Надежда энергетики», 2022, 6.3*) От электростанции отходит несколько линий электропередачи. Все линии, кроме трех, ведут в город П. Все, кроме трех, ведут в поселок Б. Все линии, ведущие не в П и не в Б, ведут на подземные секретные объекты. Какое минимальное и какое максимальное количество линий может отходить от электростанции?

**3.11.18.** (*Московская устная олимпиада, 2021, 6.3*) На полке стояло пять стопок чистых тарелок. В них было 11, 3, 10, 18 и 7 тарелок, а ещё много грязных тарелок лежало в мойке. Сначала пришёл Петя, помыл несколько тарелок и добавил их в одну из стопок. Потом пришёл Вася, помыл несколько тарелок и также добавил их в одну из стопок. В конце пришла Таня, не стала мыть тарелки, а просто объединила две стопки в одну. В итоге получилось четыре стопки с одинаковым количеством тарелок. Сколько всего тарелок вымыли?

**3.11.19.** (*Математический праздник, 2023, 6.3, 7.3*) Сто сидений карусели расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в жёлтый, синий или красный цвет. Сиденья одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Синее сиденье №7 противоположно красному №3, а жёлтое №7 — красному №23. Найдите, сколько на карусели жёлтых сидений, сколько синих и сколько красных.

**3.11.20.** (*«Бельчонок», 2023, 6.5*) Между деревнями Осиновкой и Еловкой, Еловкой и Сосновкой, Сосновкой и Осиновкой проложены дороги (между двумя деревнями может быть много разных дорог, но есть хотя бы одна). Все дороги с двусторонним движением. От Осиновки до Еловки можно добраться по 15 маршрутам (некоторые маршруты проходят через Сосновку), а от Осиновки до Сосновки можно добраться по 20 маршрутам (некоторые маршруты проходят через Еловку). Сколько всего может быть способов добраться от Еловки до Сосновки? Найдите все решения и покажите, что других нет.

**3.11.21.** (*«Бельчонок», 2018, 6.5*) В семье трое детей: Аня, Галя, Саша. Аня моет посуду раз в три дня, Саша — раз в четыре дня, Галя — раз в пять дней. В один из дней они мыли посуду втроём. Сколько будет дней из следующих 365 дней, когда хотя бы один из детей будет мыть посуду?

**3.11.22.** (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.6, 7.6*) Ученики писали олимпиаду в двух залах. Ни в одном из залов не было трёх тёзок. У 100 учеников были два тёзки в другом зале. У 144 учеников было хотя бы по одному тёзке в каждом зале. У скольких учеников было ровно по одному тёзке в каждом зале? (*Напомним, что тёзками считаются люди с одинаковыми именами.*)

# Глава 4

## Комбинаторика

### 4.1 Перебор вариантов

Дополнительные задачи — в листке [Перебор вариантов](#).

**4.1.1.** («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6, 7–8.5, 9.4) Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку  $[1200; 2020]$ .

**4.1.2.** («Ломоносов», 2023, 5–6.3) На уроке труда школьника попросили склеить подставку под горячее: это квадрат, составленный из 9 маленьких квадратиков разной окраски. На нижнюю сторону подставки клеится пробковый слой, чтобы не поцарапать столешницу. Соединить квадратики нужно так, чтобы квадратики одинакового цвета не имели общей стороны. Сколько разных вариантов подставок можно получить, имея 4 зелёных, 3 красных и 2 жёлтых квадратика? Подставки считаются разными, если их нельзя повернуть на столе так, чтобы расположение цветов совпало.

**4.1.3.** («Бельчонок», 2022, 6.4) Сколькими способами можно переставить буквы слова «ВЕКТОР» так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?

**4.1.4.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 6.6) Сколько чисел от 1 до 999 записываются в римской системе счисления тем же количеством символов, что и в десятичной?

1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

**Справка.** Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей  $800 = DCCC$ ,  $90 = XC$ ,  $9 = IX$ , получаем  $DCCCXCIX$ .

## 4.2 Круги Эйлера

4.2.1. (*САММАТ, 2023, 6.6*) На доске написали последовательно натуральные числа от 1 до 2023. Далее из них вычеркнули числа, кратные 3, числа, кратные 5, и числа, кратные 12. Сколько незачеркнутых чисел осталось на доске?

## 4.3 Правило произведения

Дополнительные задачи — в листке [Правило произведения](#).

4.3.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 6.1*) В некотором языке есть 5 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

4.3.2. (*«Надежда энергетики», 2023, 6.1*) Известно четыре способа приготовления волшебной пылицы, чтобы из полученного продукта создать эликсиры добра, радости, ума, везения, здоровья, дружелюбия и творчества. Но эликсиры добра, радости и ума делаются из пылицы фей, а эликсиры везения, здоровья, дружелюбия и творчества делаются из пылицы эльфов. Среди инструкций приготовления пылицы — два способа для пылицы фей и два способа для пылицы эльфов. Сколько существует вариантов приготовления всех эликсиров?

4.3.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.3, 7.1*) Сколько есть способов разрезать квадрат  $10 \times 10$  по клеткам на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 398? Способы, совмещаемые поворотом или переворотом, считаются различными.

4.3.4. (*«Ломоносов», 2020, 5–6.2, 7–8.2, 9.2*) Сколькими способами можно прочитать слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

Р О Т О Р  
О Т О Р  
Т О Р  
О Р  
Р

**4.3.5.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 6.2, 7.2) В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Известно, что все буквы в загаданном слове различны.

1)	T	I	G	E	R
2)	L	I	F	T	S
3)	H	O	T	E	L

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный на рисунке. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв.

**4.3.6.** (Всеросс., 2021, ШЭ, 6.8) Натуральное число  $n$  назовём *хорошим*, если 2020 при делении на  $n$  даёт остаток 22. Сколько существует хороших чисел?

**4.3.7.** («Курчатов», 2020, 6.3, 7.2) У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы каждое из них делилось на 9?

**4.3.8.** («Ломоносов», 2022, 5–6.4) У Маши есть семь разных кукол, которых она рассаживает по шести разным кукольным домикам так, чтобы в каждом домике оказалась хотя бы одна кукла. Сколькими способами Маша может это сделать? Важно, какая кукла в каком домике окажется. Как именно сидят куклы в том домике, где их две, неважно.

**4.3.9.** («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.4, 7–8.3, 9.2) Будем обозначать  $\overline{abc}$  трёхзначные числа, записанные цифрами  $a, b, c$ . Сколько существует трёхзначных чисел, таких, что разность  $\overline{abc} - \overline{acb}$  делится на 72 без остатка?

**4.3.10.** («Бельчонок», 2022, 6.4) Кузнечик прыгает по числовой прямой вправо на 2 или на 3. Ему запрещено попадать на простые числа. Сколькими способами он может попасть с 1 на 36? Простое число — это натуральное число больше 1, у которого есть всего два делителя: единица и само число.

**4.3.11.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 6.4) Сколькими способами можно разместить в квадрате  $3 \times 3$  числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы число в каждой угловой клетке было хотя бы на 4 больше, чем каждое из его соседей? Числа называются соседями, если у клеток, в которых они стоят, есть общая сторона. Способы, переводимые друг в друга симметрией или поворотом, считаются разными.

**4.3.12.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 6.5, 7.4, 9.3) Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

**4.3.13.** (*«Ломоносов», 2021, 5–6.5*) Марсианский светофор состоит из шести одинаковых лампочек, расположенных в двух горизонтальных рядах (один под другим) по три лампочки в каждом. Водитель марсохода в тумане может различить количество и взаимное расположение горящих лампочек светофора (например, если горят две лампочки, — находятся ли они в одном горизонтальном ряду или в разных, находятся ли они в одном вертикальном ряду, или в соседних вертикальных рядах, или в двух крайних вертикальных рядах). Однако он не может различить негорящие лампочки и корпус светофора. Поэтому, если, например, горит всего одна лампочка, невозможно определить, какая именно из шести). Сколько сигналов марсианского светофора может отличить друг от друга в тумане водитель марсохода? Если ни одна лампочка светофора не горит, водитель его не видит.

**4.3.14.** (*Московская устная олимпиада, 2022, 6.8, 7.6*) Имеется два набора полосок, в каждом из которых есть по одной полоске с размерами  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ , ...,  $1 \times 10$ . В первом наборе все полоски красные, а во втором — синие. Требуется, используя некоторые из этих полосок, сложить квадрат размером  $10 \times 10$  так, что все красные полоски горизонтальные, а все синие — вертикальные. Сколькими способами это можно сделать?

## 4.4 Сочетания

Дополнительные задачи — в листке [Сочетания](#).

**4.4.1.** (*Всеросс., 2023, ШЭ, 6.4*) На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 202020. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

**4.4.2.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6*) Есть 7 красных, 6 белых и 8 желтых шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

**4.4.3.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.5, 9.3*) Есть 7 красных, 6 белых, 8 желтых и 5 черных шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

## 4.5 Принцип Дирихле

Дополнительные задачи — в листке [Принцип Дирихле](#).

**4.5.1.** (*«Надежда энергетики», 2023, 6.2*) На слёт любителей мадагаскарских руконожек приехало 23 человека, и некоторые из них подружились между собой. Докажите, что найдутся два участника слёта, которые подружились с одинаковым числом коллег.

**4.5.2.** (*«Надежда энергетики», 2019, 6.3*) Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник и наметил в нем двадцать отверстий для колес. Шпунтик разделил прямоугольник на отсеки, начертив две линии, параллельные одной стороне прямоугольника, и еще две, параллельные другой. При этом ни одно отверстие Винтика не попало на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек с тремя или более отверстиями.



**4.5.3.** (*Всеросс., 2021, ШЭ, 6.6*) На фотографирование класса пришли 4 девочки и 8 мальчиков. Дети по двое подходят к фотографу и делают совместное фото. Среди какого наименьшего количества фотографий обязательно есть либо фотография двух мальчиков, либо фотография двух девочек, либо две фотографии с одними и теми же детьми?

**4.5.4.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.5, 9.4*) В правильном 2017-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то  $N$  диагоналей. При каком наименьшем  $N$  среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

**4.5.5.** (*«Ломоносов», 2017, 5–6.5*) На окружности отмечено 25 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

**4.5.6.** (*Олимпиада КФУ, 2022, 6.5*) Клетки квадрата  $4 \times 4$  раскрашены в три цвета. Назовем пару клеток *удачной*, если они не имеют общих точек границы (ни по сторонам, ни по углам) и покрашены в одинаковый цвет. Докажите, что можно выбрать восемь клеток, которые разбиваются на четыре удачные пары.

**4.5.7.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 6.5, 7.4*) В 100 пакетах лежат 2018 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Докажите, что в каком-то пакете есть пакет с пакетом внутри.

## 4.6 Подсчёт двумя способами

Дополнительные задачи — в листке [Подсчёт двумя способами](#).

**4.6.1.** (*«Надежда энергетики», 2019, 5.4, 6.4, 7.4*) В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

## 4.7 Взаимно-однозначное соответствие

Дополнительные задачи — в листке [Биекции](#).

**4.7.1.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.6, 6.5*) Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных?

**4.7.2.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 5.5, 6.5) На доске  $8 \times 8$  клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников  $2 \times 1$ ), не накладывающихся друг на друга. Пусть  $N$  — количество способов положить так 32 доминошки, а  $T$  — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше —  $N$  или  $T$ ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

## 4.8 Дружбы

**4.8.1.** (Всеросс., 2023, ШЭ, 6.8) В 6 «А» классе учатся несколько мальчиков и девочек. Известно, что в 6 «А»

- девочка Таня дружит с 12 мальчиками;
- девочка Даша дружит с 12 мальчиками;
- девочка Катя дружит с 13 мальчиками;
- у любой девочки найдётся друг среди любых трёх мальчиков.

Сколько мальчиков может быть в 6 «А» классе? Укажите все возможные варианты.

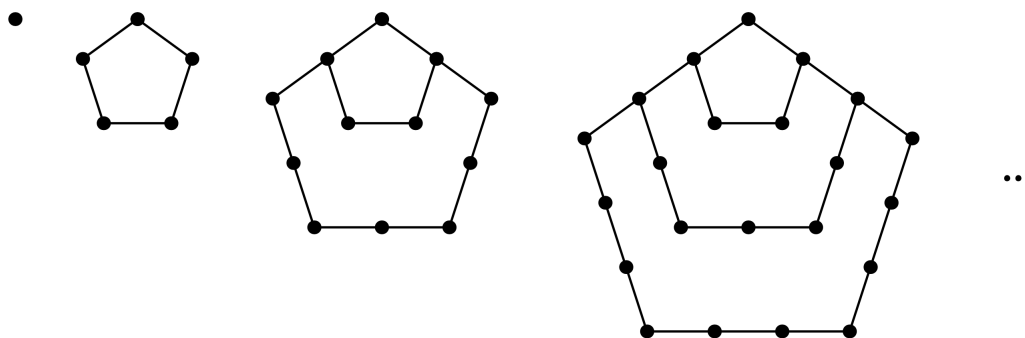
# Глава 5

## Алгебра

### 5.1 Суммирование

Дополнительные задачи — в листке [Вычисление сумм](#).

**5.1.1.** (*Всеросс., 2022, ШЭ, 6.7*) Аня расставляет камешки на песке. Сначала она поставила один камень, потом добавила камешки, чтобы получился пятиугольник, затем сделала из камешков внешний большой пятиугольник, после этого ещё один внешний пятиугольник и т. д., как на рисунке. Количество камней, которые у неё были расставлены на первых четырёх картинках: 1, 5, 12 и 22. Если продолжать составлять такие картинку дальше, то сколько камней будет на 10-й картинке?



### 5.2 Целая и дробная части

**5.2.1.** (*«Надежда энергетики», 2022, 6.2*) Целой частью  $[x]$  числа  $x$  называется наибольшее целое  $m$  такое, что  $m \leq x$ . Например,  $[-4/3] = -2$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[2] = 2$ . Решите в целых числах уравнение

$$\left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{x+1}{2} \right] = 2x + 4.$$

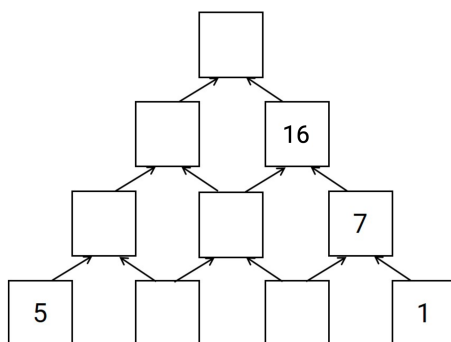
# Глава 6

## Алгоритмы, процессы, игры

### 6.1 Алгоритмы и операции

Дополнительные задачи — в листке [Алгоритмы и операции](#).

**6.1.1.** (Всеросс., 2023, ШЭ, 6.1) Клеточки пирамиды заполнили по следующему правилу: над каждым двумя соседними числами записали их сумму. Некоторые числа стёрли, и получилась конструкция, изображённая на рисунке. Какое число было в самой верхней клеточке?



**6.1.2.** (Всеросс., 2021, ШЭ, 6.1) В квадрате  $4 \times 4$  в отмеченной серым фоном клетке стоит фишка. За одно действие фишка перемещается в соседнюю по стороне клетку, по направлению стрелочки, на которой стоит. Также после каждого перемещения стрелочка в клетке, где только что была фишка, меняется на противоположную. С какой клетки фишка выйдет за границу квадрата? В ответе укажите строку и столбец этой клетки.

	1	2	3	4
A	→	↑	→	↓
B	↑	↓	↑	←
C	↑	→	↑	↑
D	→	↑	←	↑

**6.1.3.** («Курчатов», 2020, 6.1) Трое путников подошли к широкой реке, у берега которой им удалось найти старый плот. Надпись на плоту гласит, что он может перевозить не более 7 пудов за раз. Как путникам переправиться через реку, если двое из них весят по 3 пуда, а третий — 5 пудов?

**6.1.4.** («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.2, 7–8.1, 9.3) На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

**6.1.5.** (Всеросс., 2023, ШЭ, 6.3) Фишку поставили на некоторую клетку доски  $5 \times 5$ . Передвигая фишку на соседнюю по стороне клетку, обошли всю доску за исключением одной клетки и вернулись на стартовую позицию. В каждой клетке, кроме начальной, фишка побывала не более одного раза.

На рисунке изображены стрелочки, показывающие, куда передвигали фишку из некоторых клеток.

Выберите на картинке клетку, в которую фишка *не* заходила.

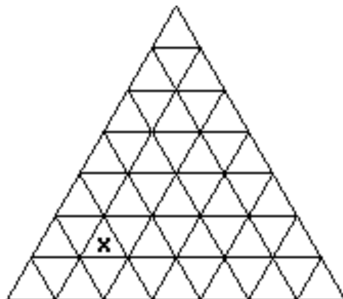
	1	2	3	4	5
A			↑	↓	
B	→		↑	↓	
C		↓		→	
D		↓	←		
E					

**6.1.6.** («Ломоносов», 2022, 5–6.3) На доске записаны все такие натуральные числа от 3 до 223 включительно, которые делятся на 4 с остатком 3. Каждую минуту Боря стирает какие-то два из написанных чисел и вместо них записывает их сумму, уменьшенную на 2. В конце концов на доске остается одно число. Каким оно может быть?

**6.1.7.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.5, 6.3) У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить  $n$  конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа  $n$ . Например, если было 137 конфет, то станет  $137 + 1 + 3 + 7 = 148$ . Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?

**6.1.8.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 6.4) Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны, а при сложении всяких двух соседних цифр получается простое число.

**6.1.9.** («Бельчонок», 2023, 6.4) Треугольник разделён на 49 маленьких треугольников (см. рис.). В маленьком треугольнике, отмеченном крестиком, сидит бельчонок, а в остальных 48 находится по одному ореху. Бельчонок может перепрыгнуть в соседний по стороне треугольник, если в нём есть орех (и забрать его). Сколько орехов удастся собрать бельчонку? Нарисуйте его путь.

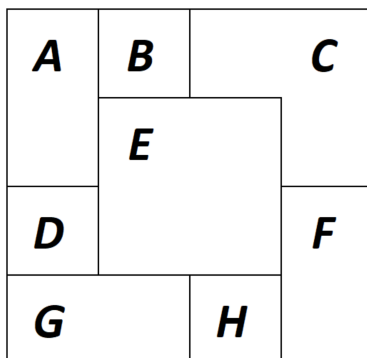


**6.1.10.** («Курчатова», 2020, 6.4) На доске по кругу написаны пять чисел 2, 0, 1, 9, 0 в указанном порядке по часовой стрелке (последний ноль написан рядом с первой двойкой). За ход между парами соседних чисел вписывается их сумма. Например, такое расположение чисел (справа) будет после первого хода:

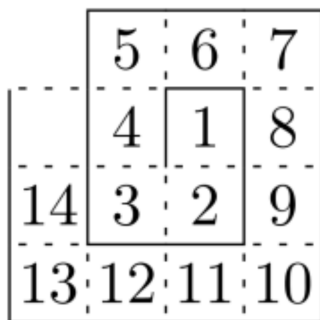
$$\begin{array}{cccc}
 9 & 0 & & \\
 & & 2 & \\
 1 & 0 & & \\
 & & & 
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{cccc}
 9 & 9 & 0 & 2 \\
 & 10 & & 2 \\
 & 1 & & 2 \\
 & & 1 & 0 & 2
 \end{array}$$

Спустя 5 ходов Полина вычислила сумму всех чисел от первого нуля (того, который первоначально был между 2 и 1) до второго нуля (того, который первоначально был между 9 и 2) при обходе круга по часовой стрелке, а Алина — сумму всех остальных чисел. Чему равняется разность чисел Алины и Полины?

**6.1.11.** (*Всеросс., 2021, ШЭ, 6.7*) Восемь бумажных квадратов  $2 \times 2$  последовательно выкладывали на стол, пока не получился большой квадрат  $4 \times 4$ . Последним на стол положили квадрат  $E$ . На рисунке изображено, как видны квадраты: квадрат  $E$  видно полностью, остальные квадраты видно частично. Какой квадрат положили на стол третьим по счёту?



**6.1.12.** (*«Бельчонок», 2020, 6.5*) Вася расставляет в клетки бесконечного клетчатого листа по спирали натуральные числа, начиная с 1 (см. рис.). Какое число будет написано в клетке справа от числа 521?



**6.1.13.** (*«Бельчонок», 2020, 6.5*) Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на несколько равных частей по 1 см. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Вася расставляет по строкам слева направо натуральные числа, начиная с 1 (см. рис.). Его друг Петя выбрал горизонтальный отрезок, являющийся общей стороной двух маленьких треугольников. В одном из этих треугольников оказалось число 335. Какое число стоит в другом?



**6.1.14.** (*«Курчатов»*, 2023, 6.5) У Пети есть 2023 камня, массы любых двух из которых различаются не более чем в 2 раза. Петя называет кучу камней странной, если в ней найдутся два камня, масса одного из которых больше массы другого более чем на 10%. Докажите, что Петя может разложить все камни по кучам так, чтобы в каждой куче было ровно 7 камней, причём странных куч оказалось не больше 7.

**6.1.15.** (*«Формула Единства»* / *«Третье тысячелетие»*, 2015, 6.6) Дима варит кашу. Чтобы каша получилась вкусной, ему нужно варить крупу ровно 24 минуты. Обычных часов у Димы нет, но есть двое песочных часов: один — на 20 минут, другие — на 7 минут. Как Диме точно отмерить требуемое время?

**6.1.16.** (*«Покори Воробьёвы горы!»*, 2022, 5–6.6, 7–8.6, 9.6) К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах. От каждой планеты расходится 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т. е. если есть портал, ведущий из  $A$  в  $B$ , то нет портала, ведущего из  $B$  в  $A$ . Мистер Риггз хочет добраться с Галатей-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

**6.1.17.** (*Математический праздник*, 2022, 6.6, 7.6) Шеренга солдат-новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, остальные — направо. Оказалось, что в затылок соседу смотрит в шесть раз больше солдат, чем в лицо. Затем по команде «кругом» все развернулись в противоположную сторону. Теперь в затылок соседу стали смотреть в семь раз больше солдат, чем в лицо. Сколько солдат в шеренге?

**6.1.18.** (*«Покори Воробьёвы горы!»*, 2020, 5–6.7) Дан набор из 100 гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньший, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите массу самой тяжелой гири.

## 6.2 Взвешивания

Дополнительные задачи — в листке [Взвешивания](#).

**6.2.1.** (*САММАТ*, 2021, 6.9) Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. Как, воспользовавшись весами 11 раз, взвесить 2021 грамм сахара-песка, если после каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость. Приведите последовательность взвешиваний.

**6.2.2.** (*«Курчатов»*, 2021, 6.3) У мудреца есть 11 внешне одинаковых алмазов: 10 обычных и 1 волшебный. Мудрец знает, что все обычные алмазы весят одинаково, а волшебный отличается от них по весу. Также у мудреца есть чашечные весы, на которых можно сравнить вес двух кучек алмазов.

Как за два взвешивания мудрецу определить, тяжелее или легче волшебный алмаз по сравнению с обычным? Определять, какой именно алмаз является волшебным, не требуется.

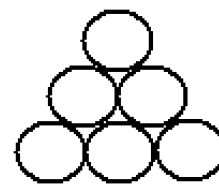


**6.2.3.** («Надежда энергетики», 2019, 6.5) Как-то раз Баба Яга и Кощей Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кощей заподозрил, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину.

**6.2.4.** (Матпраздник в Матвертикали, 2023, 6.6) У царя есть 5 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 10 г, во втором 11 г, в третьем 12 г, в четвёртом 13 г, в пятом 14 г, но не помнит, где какие. Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее).

- а) Может ли мудрец за одно взвешивание проверить, верно ли, что в указанном мешке хранятся монеты по 10 г?
- б) Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний?

**6.2.5.** (Московская устная олимпиада, 2021, 6.8) Шесть монет лежат так, как показано на рисунке. Две из них фальшивые, они весят одинаково и легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты касаются друг друга. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно гарантировано определить фальшивые монеты?



**6.2.6.** (Московская устная олимпиада, 2022, 6.9) У царя есть 12 различных украшений из чистого золота. Царь и ювелир знают, что украшения весят 28, 29, 30, ..., 39 граммов, но только ювелир помнит, какое украшение сколько весит. Царь не доверяет ювелиру и считает, что тот всё напутал. Сможет ли ювелир за два взвешивания на чашечных весах без гирь доказать царю, что выбранное им украшение действительно весит 39 граммов?

## 6.3 Переливания

Дополнительные задачи — в листке [Переливания](#).

**6.3.1.** (САММАТ, 2023, 6.5) У продавца имеется емкость с молоком объемом 24 литра, а также две пустые емкости объемом 10 и 14 литров. Каким образом отмерить 12 литров?

## 6.4 Таблицы

Дополнительные задачи — в листке [Таблицы](#).

**6.4.1.** (Всеросс., 2022, ШЭ, 6.3) В клетках таблицы  $4 \times 4$  расставлены числа 1, 2, 3, 4 так, что

- каждое из чисел встречается в каждой строке и в каждом столбце;

- во всех четырёх частях, изображённых на рисунке, суммы чисел равны.

По двум числам на рисунке определите, в каких клетках стоят двойки.

	1	2	3	4
A				
B				
C		1		
D	4			

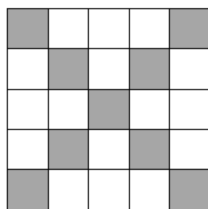
Постройте соответствие.

- |                            |                          |
|----------------------------|--------------------------|
| • В строчке A двойка стоит | • в столбце с номером 1. |
| • В строчке B двойка стоит | • в столбце с номером 2. |
| • В строчке C двойка стоит | • в столбце с номером 3. |
| • В строчке D двойка стоит | • в столбце с номером 4. |

**6.4.2.** (Московская устная олимпиада, 2022, 6.3, 7.3) Дана таблица размером  $100 \times 100$  клеток. Петя выбирает строку и в каждую из её клеток ставит число 1. Затем Вася выбирает столбец и в каждую его свободную клетку ставит число  $-1$ . Затем Петя выбирает другую строку и в каждую её свободную клетку ставит 1. И так далее, пока в таблице есть свободные клетки. Чему равна сумма чисел в таблице, заполненной таким образом?

**6.4.3.** («Бельчонок», 2019, 6.5) Во всех клетках квадратной таблицы  $5 \times 5$  написаны числа. Известно, что сумма всех чисел равна 77. В любой фигурке из трёх клеток вида  $\square \square \square$  сумма чисел равна 10 (фигурку можно поворачивать). Найдите сумму чисел, написанных

- в угловых клетках таблицы;
- в клетках, выделенных серым цветом на рисунке.



## 6.5 Игры и стратегии

Дополнительные задачи — в листке [Игры и стратегии](#).

**6.5.1.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 6.1) Игорь и Паша играют в игру, по очереди ставя натуральные числа в вершины правильного шестиугольника (каждый может выбрать любую свободную вершину и поставить в неё любое натуральное число). После шести ходов, когда игра заканчивается, судья записывает на каждой стороне шестиугольника произведение чисел, стоящих в двух её концах. Затем все 12 чисел складываются. Если сумма нечётная, то выигрывает Игорь, а если чётная, то Паша.

Известно, что первым ходит Игорь. Кто из игроков сумеет выиграть при любых действиях соперника и как ему нужно действовать?

**6.5.2.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.3, 6.3) Двое играют в игру. Первый игрок пишет на пустой доске произвольное натуральное число, не кратное 10. Дальше игроки по очереди (начиная со второго) пишут на доске какую-нибудь степень любого из чисел, написанного на доске. (Например, если на доске написаны числа 3 и 81, то можно написать любое из чисел  $3 = 3^1$ ,  $9 = 3^2$ ,  $27 = 3^3$ ,  $81 = 3^4$ ,  $243 = 3^5$  и т. д., а также  $81 = 3^4$ ,  $6561 = 3^{12}$  и т. д.) Выигрывает тот из игроков, после хода которого сумма каких-нибудь чисел, написанных на доске, делится на 10. У кого из игроков есть способ выиграть при любой игре соперника? Как он должен действовать?

**6.5.3.** («Бельчонок», 2021, 6.3) В квадрате  $7 \times 7$  двое игроков ходят по очереди, закрашивая белые клетки в разный цвет (Вася – в красный, Петя – в зелёный). Каждый может закрасить одну или несколько белых клеток, идущих подряд по горизонтали или вертикали. В конце все клетки будут покрашены. Столбец или строку, в которых окажется больше зелёных клеток, будем называть зелёным, в противном случае – красным. Если общее число красных строк и столбцов больше, чем зелёных, выигрывает Вася, в противном случае – Петя. Если поровну, то ничья. Начинает Вася. Может ли кто-нибудь из них выиграть при любых ходах другого?

**6.5.4.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 6.3) Люба и Андрей играют в такую игру. Люба называет натуральное число. После этого игроки по очереди (начиная с Андрея) либо увеличивают его на 7, если оно нечётно, либо делят пополам, если оно чётно. Тот, кто снова назовёт первоначальное число, выигрывает. Может ли Люба первым ходом назвать такое число, чтобы выиграть ровно на третьем своём ходу?

**6.5.5.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 6.3, 11.1) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 — 1539 — 9756 — 6561... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

**6.5.6.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 6.3) На столе лежат три конфеты. У Ани и Лены есть мешок с неограниченным количеством конфет, и они играют в игру. Каждая из них своим ходом добавляет некоторое количество конфет из мешка на стол, но при этом не может положить больше конфет, чем уже лежит на столе. Девочки ходят по очереди, начинает Аня. Выигрывает та, после хода которой на столе окажется ровно 2015 конфет. Кто из девочек может обеспечить себе победу, как бы ни играла соперница?

**6.5.7.** («Курчатов», 2021, 6.4) На доске написано выражение

$$7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1.$$

Маша вместо звёздочек расставляет знаки «+» и «−». За один ход Ваня может поменять два подряд идущих знака на противоположные. Ваня хочет, чтобы спустя несколько его ходов получилось выражение, значение которого делится на 7. Может ли Маша расставить знаки так, чтобы Ваня не мог добиться желаемого?

**6.5.8.** (Московская устная олимпиада, 2023, 6.7) Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя выписывает на доску  $N \geq 3$  чисел. Васе разрешается выбрать несколько чисел на доске и заменить каждое из них на среднее арифметическое выбранных чисел. При каких  $N$  Вася за несколько ходов сможет сделать все числа равными, независимо от того, какие числа выпишет Петя?

## 6.6 Турниры

Дополнительные задачи — в листке [Турниры](#).

**6.6.1.** (Московская устная олимпиада, 2023, 6.3, 7.3) В турнире участвовали десять шахматистов. Каждый сыграл с каждым два раза: один раз белыми и один раз чёрными, причём какую-то из этих партий он выиграл, а другую проиграл (ничьих не было). Могло ли оказаться так, что половину всех партий выиграла белая, а половину — чёрная?

**6.6.2.** (Математический праздник, 2022, 6.5) Среди 20 школьников состоялся турнир по теннису. Каждый участник проводил каждый день по одной встрече; в итоге за 19 дней каждый сыграл ровно по одному разу со всеми остальными. Теннисный корт в школе один, поэтому матчи шли по очереди. Сразу после своего первого выигрыша в турнире участник получал фирменную майку. Ничьих в теннисе не бывает. Петя стал одиннадцатым участником, получившим майку, а Вася — пятнадцатым. Петя получил свою майку в одиннадцатый день турнира. А в какой день получил майку Вася?

## 6.7 Шахматные доски и фигуры

Дополнительные задачи — в листке [Шахматные доски и фигуры](#).

**6.7.1.** (Московская устная олимпиада, 2021, 6.9) Две клетки шахматной доски назовём смежными, если они имеют хотя бы одну общую вершину. Можно ли королём обойти всю доску, посетив каждую клетку ровно один раз так, чтобы все ходы, кроме первого, совершались в клетки, смежные с чётным числом клеток, на которых король уже побывал?

# Глава 7

## Рассуждения и методы

### 7.1 Логика

Дополнительные задачи — в листке [Логика](#).

**7.1.1.** (*Всеросс., 2022, ШЭ, 6.2*) Аркадий, Борис, Вера, Галя, Даня и Егор встали в хоровод.

- Даня встал рядом с Верой, справа от неё,
- Галя встала напротив Егора,
- Егор встал рядом с Даней,
- Аркадий и Галя не захотели стоять рядом.

Кто стоит рядом с Борисом?

**7.1.2.** (*Всеросс., 2021, ШЭ, 6.2*) В соревновании по бегу участвовали пять спортсменов:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ . Было сделано два прогноза, в каком порядке они финишируют.

- Первый прогноз:  $A$  — первый,  $B$  — второй,  $C$  — третий,  $D$  — четвёртый,  $E$  — пятый.
- Второго прогноз:  $C$  — первый,  $E$  — второй,  $A$  — третий,  $B$  — четвёртый,  $D$  — пятый.

Оказалось, что первом прогнозе было верно предсказано ровно про троих спортсменов, а во втором — ровно про двоих. Кто какое место занял в забеге?

**7.1.3.** (*САММАТ, 2021, 6.8*) В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Маша, Даша, Наташа и Коля. Сколько лет каждому ребёнку, если известно, что одна девочка ходит в детский сад, Маша старше Коли, а сумма лет Маши и Наташи делится на 3.

**7.1.4.** (*«Ломоносов», 2021, 5–6.1*) Всякий раз, когда мой брат говорит правду, наша бабушка чихает. Однажды брат сказал, что он получил по математике «5», но бабушка не чихнула. Тогда он, слегка засомневавшись в своих первых словах, сказал, что получил «4», и бабушка чихнула. Приободрившись от бабушкиного чихания, он подтвердил, что уж точно получил не менее 3, но бабушка больше не чихала. Так какую же всё-таки оценку получил брат по математике?

**7.1.5.** (*«Бельчонок», 2023, 6.1*) Встретились однажды Пупсень, Вупсень и Лупсень. Один из них всегда говорит правду, другой всегда врёт, а третий может и правду сказать, и соврать. Они встали в ряд, и самый левый сказал: Лупсень врёт. Следующий сказал: Вупсень и Лупсень одновременно говорят правду или одновременно лгут. А правый заявил: Пупсень врёт. (Про себя никто не говорил). Кто из них говорил правду, и в каком порядке они стояли?

**7.1.6.** (*«Надежда энергетики», 2020, 6.1*) Охотник Пулька для своей собаки Бульки получил с «АлиЭкспресс» два куля корма. Наутро один куль оказался пуст. Незнайка взялся за расследование и выявил троих подозреваемых, которые заявили следующее.

- Сиропчик сказал, что он не ел собачий корм.
- Торопыжка заявил, что корм съел либо Пончик, либо Сиропчик.
- Пончик же подтвердил, что Сиропчик корм не ел.

Как выяснилось позже, невинные сказали правду, а виновный солгал. Определите, кто же съел за ночь весь куль собачьего корма.

**7.1.7.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 6.1*) На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись один или два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.

На очередное голосование пришли пятеро: Красный, Синий, Зелёный, Фиолетовый и Жёлтый. Каждый из них произнёс по два утверждения.

*Красный:* Синий — мирный. Жёлтый — предатель.

*Синий:* Я мирный. Фиолетовый — мирный.

*Зелёный:* Я мирный. Красный — предатель.

*Фиолетовый:* Красный — мирный. Зелёный — предатель.

*Жёлтый:* Зелёный — мирный. Фиолетовый — предатель.

Известно, что мирные космонавты всегда говорят правду, а предатели всегда врут. Объясните, кто же из них является предателем (или предателями) и почему.

**7.1.8.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 6.2*) На уроке математики учительница показала первоклассникам картинку. На ней несколько одинаковых фигур. Затем она убрала картинку и спросила, что там было изображено. Дети дали такие ответы:

Аня: «Три синих квадрата».

Таня: «Четыре синих треугольника».

Ваня: «Четыре красных овала».

Даня: «Два зеленых овала».

- а) Какой формы фигуры на картинке, если каждый указал верно только одно: цвет или форму?
- б) Кто-то верно назвал количество, кто-то — цвет, кто-то — форму, но каждый из четверых указал верно только одно. Что на картинке?

**7.1.9.** («Курчатое», 2020, 6.2, 7.1) Поезд состоит из 20 вагонов, которые пронумерованы от 1 до 20, начиная от начала поезда. Некоторые вагоны являются почтовыми. Известно, что

- всего почтовых вагонов — чётное число;
- номер ближайшего к началу поезда почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов;
- номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов;
- любой почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном.

Найдите номера всех почтовых вагонов в поезде.

**7.1.10.** (Математический праздник, 2022, 6.3, 7.3) Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$  в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить « $A + B = ?$ », то в случае, когда  $A = 9, B = 1, C = 0$ , ответом будет « $A + B = BC$ ». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют?

**7.1.11.** («Ломоносов», 2021, 5–6.3) В одной школе учатся четверо приятелей — все в разных классах: самый младший — в первом классе, а самый старший — в четвёртом. Определите имя, фамилию и класс каждого из них, если известно, что:

1. Боря — не первоклассник;
2. когда Вася идёт в бассейн на соседнюю с его улицей улицу Южную, Иванов гуляет с собакой у себя во дворе на улице Зелёной;
3. Миша на год старше Димы;
4. Боря и Орлов — соседи и живут на улице Северной;
5. Крылов познакомился с Петровым ровно год назад, будучи еще первоклассником;
6. Вася отдал Боре учебник, по которому сам занимался в прошлом году.

**7.1.12.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 6.3) Восемь мальчиков (Вася, Дима, Егор, Илья, Коля, Петя, Тема и Федя) встали друг за другом в каком-то порядке, после чего рассчитались от 1 до 8, при этом:

- номер Димы оказался втрое больше номера Ильи;
- Федя встал где-то после третьего мальчика, но до Коли;
- номер Васи вдвое меньше номера Пети;
- четвёртый мальчик сразу за Тёмой и где-то до Пети.

В каком порядке встали мальчики? Объясните, почему Вы так считаете.

**7.1.13.** (*«Надежда энергетики», 2023, 6.3*) Аксинья, Дарина, Милана, Ратибор и Ярополк — цирковые дрессировщики. Их возраст — 18, 19, 20, 22, 25 лет. Их подопечные — лисица, попугай, тигр, морж и коза. Номера дрессировщиков называются «Восточная сказка», «Вокруг света», «Прыжок над бездной», «Весенняя мелодия», «Загадка сфинкса». Репетируют со своими питомцами они в разное время: 9:00, 10:00, 11:00, 12:00, 14:00. Определите возраст, питомца, название номера и время репетиции каждого из дрессировщиков, если известно следующее.

- Лиса Ратибора репетирует раньше питомца Ярополка, но позже козы, которая работает не с Дариной.
- У 19-летнего дрессировщика морж в «Весенней мелодии» репетирует позже, чем питомец Аксиньи.
- Репетиция номера «Вокруг света», начинающаяся позже 10:00, проходит не с лисицей. Артист цирка в этом номере младше дрессировщика из «Восточной сказки», но старше Ярополка.
- Подопечный Аксиньи выступает позже тигра, но раньше животного из номера «Загадка сфинкса».
- Милана, питомец которой не коза и которая не участвует в номере «Прыжок над бездной», младше Ратибора.
- Тигр, дрессирует которого не Дарина, начинает репетировать в четный час.

**7.1.14.** (*Московская устная олимпиада, 2021, 6.4*) У Андрея, Бори и Вовы есть несколько конфет. Когда у любого из мальчиков чётное число конфет, он говорит правду, а когда нечётное — врёт. Андрей сообщил, что у него с Борей вместе нечётное число конфет. После этого Боря отдал три конфеты Вове и заявил, что произведение чисел конфет у Андрея и Вовы теперь равно 35, а Вова сказал, что у него конфет больше, чем у Андрея. Сколько конфет у Андрея?

**7.1.15.** (*Олимпиада КФУ, 2022, 6.4*) Андрей спрятал монету под одну из восьми положенных в ряд шапок и предложил Тане узнать, под какой шапкой она лежит. Таня может делать следующее действие: она показывает на одну из шапок, а Андрей поднимает ее, и, если монеты под ней нет, то говорит, слева или справа от указанной Таней шапки находится монета. При этом Андрей говорит правду и ложь по очереди, но не известно с чего именно начинается. Сможет ли Таня найти монету за три действия? Обоснуйте свой ответ.

**7.1.16.** (*«Бельчонок», 2022, 6.5*) Шестиклассники обсуждали, сколько лет их директору. Аня сказала: «Ему больше 38 лет». Боря сказал: «Ему меньше 35 лет». Вова: «Ему меньше 40 лет». Галя: «Ему больше 40 лет». Дима: «Боря и Вова правы». Саша: «Вы все ошибаетесь». Оказалось, что мальчики и девочки ошиблись одинаковое количество раз. Можно ли узнать, сколько лет директору?



**7.1.17.** (*«Надежда энергетики», 2022, 6.5*) Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали Торопыжка, Пончик и Сиропчик. Незнайке удалось установить следующее.

- Если Торопыжка не ел корм, то Пончик тоже не ел, а Сиропчик ел.
- Если Пончик ел, то Сиропчик тоже ел, а Торопыжка нет.
- Если Сиропчик ел, то Пончик тоже ел, а Торопыжка нет.

Помогите Незнайке выяснить, кто же съел за ночь целый куль собачьего корма (либо покажите, что информации для этого недостаточно).

**7.1.18.** (*«Курчатов», 2020, 6.5*) У Ивана Царевича есть 10 золотых монет. Он знает, что среди них есть 5 настоящих и 5 фальшивых, но не умеет их отличать друг от друга. Как известно, Баба Яга умеет отличать фальшивые монеты от настоящих. Иван договорился с Бабой Ягой, что он будет показывать на любые три монеты, а она будет выбирать две из них (Иван знает, какие монеты выбирает Баба Яга) и говорить, сколько из них фальшивых. Сможет ли Баба Яга, говоря только правду, сделать так, чтобы Иван не смог распознать все 5 фальшивых монет за 2020 вопросов?

**7.1.19.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 6.6, 7.6, 8.5*) На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту.

**7.1.20.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 6.6, 7.5, 9.4*) На одной конференции встретились известный ученый Франсуа и трое его не менее известных друзей: Карл, Рене и Леонард.

Франсуа, помимо своих научных достижений, известен ещё и тем, что является отцом нескольких детей, которые все родились в разные годы, но все в одну и ту же дату. Друзья заинтересовались, сколько лет каждому из детей, на что Франсуа дал им задачу. «Произведение возрастов моих детей, — сказал он, — как раз равно сумме дня и месяца их рождения. Сейчас я сообщу Карлу количество моих детей, Рене — месяц рождения, а Леонарду — день рождения, и попробуйте угадать, сколько им лет». После этого он шепнул на ухо друзьям указанную информацию.

Немного подумав, Карл воскликнул, что он точно знает возраст двоих детей Франсуа. «Ну тогда мы все понимаем, сколько детей, и сколько лет двум из них. Но я всё ещё не могу понять возраст остальных», — ответил Леонард. Рене тут же заметил: «А вот мне известен возраст всех детей, кроме самого старшего». После этого Леонард заключил, что теперь ему и, следовательно, всем троим точно известны возрасты всех детей. Сколько же у Франсуа детей и сколько лет каждому из них?

**7.1.21.** (*Математический праздник, 2023, 6.6*) Кащей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись?

## 7.2 Рыцари и лжецы

Дополнительные задачи — в листке [Логика](#).

**7.2.1.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.1*) На острове Рыцарей и Лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Недавно на острове появилось новое племя — Двuruшники. Они говорят правду или ложь через раз, т. е. если двuruшник сказал правду, то в следующий раз обязательно скажет ложь — и наоборот. Однажды путешественник спросил троих жителей А, В и С — кто они.

А сказал: «В — двuruшник».

В ответил — «Это неправда».

С сказал — «В сейчас солгал».

А сказал — «С сейчас солгал».

Определите, кем является А.

**7.2.2.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.1, 7–8.1*) На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды они собирали бананы и кокосы. Оказалось, что количество собранных бананов и количество собранных кокосов у всех разное. Каждый житель острова высказал два утверждения:

1. «Нет шести жителей, которые собрали бананов больше, чем я»,
2. «Хотя бы у семи жителей больше кокосов, чем у меня».

Могло ли это быть и, если да, сколько и каких жителей могло быть на острове? Укажите все возможные ответы.

**7.2.3.** (*«Бельчонок», 2023, 6.1*) Четыре человека встали в ряд. Среди них был хотя бы один лжец (всегда лжёт), хотя бы один правдивый (всегда говорит правду), и хотя бы один хитрец (может и лгать, и говорить правду). Первый сказал: «Рядом со мной стоит правдивый». Второй сказал: «По обе стороны от меня стоят хитрецы». Третий сказал: «По обе стороны от меня стоят лжецы». Четвертый сказал: «Рядом со мной стоит правдивый». Кто где стоит? Обозначайте лжеца — Л, правдивого — П, хитреца — Х.

**7.2.4.** («Бельчонок», 2023, 6.1) В волшебном лесу живут говорящие грибы двух видов: настоящие опята и ложные опята. Ложные ядовитые, а настоящие вкусные. Ложные всегда лгут, настоящие всегда говорят правду. Гриша увидел на полянке четыре опёнка. Первый опёнок сказал: «Мы с четвёртым разного вида». Второй сказал: «Третий — ложный». Третий сказал: «Второй — ложный». Четвёртый сказал: «Из нас четверых не меньше двух настоящих опят». Сколько было ложных опят?

**7.2.5.** (Всеросс., 2022, ШЭ, 6.6) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 65 жителей острова собрались на заседание. Все они по очереди сделали заявление: «Среди сделанных ранее заявлений истинных ровно на 20 меньше, чем ложных». Сколько рыцарей было на этом заседании?

**7.2.6.** («Курчатов», 2022, 6.2, 7.2) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «мой сосед слева — лжец» или «мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?

**7.2.7.** (Олимпиада КФУ, 2023, 6.3) Во время перемены один из пяти учеников написал на доске неверное равенство. На вопрос классного руководителя, кто это сделал, ученики дали следующие ответы.

Антон: «Это был Боря или Вова».

Боря: «Ни Дима, ни я этого не делали».

Вова: «Антон и Боря — оба лгут».

Гоша: «Среди Антона и Бори один лжет, а другой говорит правду».

Дима: «Гоша говорит неправду».

Классный руководитель знает, что трое из них всегда говорят правду, а двое других всегда лгут. Кто написал неверное равенство?

**7.2.8.** («Курчатов», 2023, 6.3, 7.2) На кастинг для кинофильма пригласили 10 пар близнецов. Известно, что в каждой паре близнецов один всегда говорит правду, а другой всегда лжёт. Все 20 человек расселись за круглым столом. У каждого спросили: «Правда ли, что ваш близнец сидит рядом с вами?» Десять человек ответили «Да». Сколько ответов «Да» могли дать оставшиеся десять человек? (У каждого человека есть только один близнец среди присутствующих.)

**7.2.9.** («Бельчонок», 2020, 6.4) Абитуриент Сибирского федерального университета спросил в лесу на развилке дорог у трёх зверят: зайчонка, лисёнка и бельчонка — дорогу в университет (он знает, что путь ровно один). Первый сказал: «Налево». Второй сказал: «Первый указал неверную дорогу», «Необходимо идти направо». Третий сказал: «Первый указал неверную дорогу», «Второй оба раза сказал неправду», «Прямо». Известно, что лисенок всегда лжёт, бельчонок всегда говорит правду, а зайчонок говорит правду или ложь, чередуя их, начиная либо с правды, либо со лжи. Определите, в каком порядке отвечали зверята и куда стоит идти абитуриенту, чтобы оказаться в университете.

**7.2.10.** («Бельчонок», 2020, 6.4) Лисёнок, зайчонок и бельчонок собрались в лесу, чтобы обсудить погоду. Лисенок всегда лжёт, бельчонок всегда говорит правду, а зайчонок говорит правду или ложь, чередуя их, начиная либо с правды, либо со лжи. На собрании каждый сказал две фразы. Первый зверь сказал: «Сегодня солнечно», «Сегодня дует сильный ветер». Второй сказал: «Сегодня целый день идёт дождь», «Сегодня нет ветра». Третий сказал: «Сегодня ярко светит солнце», «Сегодня нет ветра». Можно ли определить, каким по счету говорил зайчонок?

**7.2.11.** («Бельчонок», 2022, 6.5) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 10 жителей, причем известно, что среди них есть хотя бы один разбойник и хотя бы один купец. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей разбойник, а другой — купец»?

## 7.3 Оценка плюс пример

Дополнительные задачи — в листке [Оценка плюс пример](#).

**7.3.1.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 6.1) В каждую клетку таблицы  $100 \times 100$  записали натуральное число. Оказалось, что каждое число либо больше всех своих соседей, либо меньше всех соседей. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех чисел?

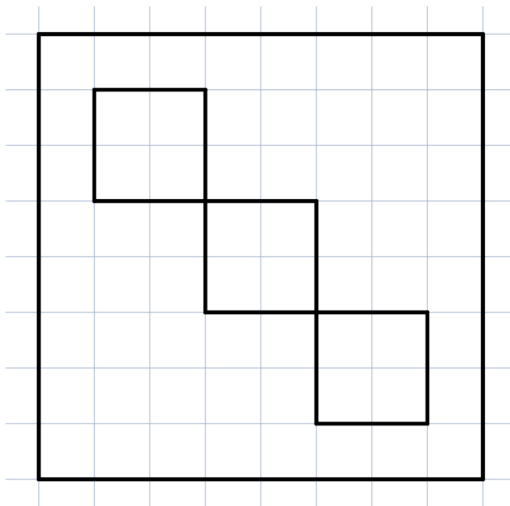
**7.3.2.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.2, 6.1, 7.1) Если из прямоугольника на клетчатой бумаге вырезали (тоже по клеткам) прямоугольник, один (и только один) из углов которого совпадает с каким-то из углов исходного, то фигуру, оставшуюся после такого вырезания, будем называть Г-образной. Квадрат какого наименьшего размера можно разрезать на Г-образные фигуры?

**7.3.3.** («Курчатов», 2021, 6.1) У Пети есть таблица  $3 \times 3$ . Он ставит в её клетки фишки по следующим правилам:

- в каждую клетку можно поставить не более одной фишки;
- в пустую клетку можно поставить фишку, если в соответствующих строке и столбце уже суммарно стоит чётное число фишек (0 является чётным числом).

Какое наибольшее количество фишек может поставить Петя?

**7.3.4.** («Ломоносов», 2022, 5–6.2) Петя вырезал из клетчатого квадрата  $8 \times 8$  три квадрата  $2 \times 2$ , как показано на рисунке. Оля хочет вырезать (по линиям сетки) из оставшейся части квадрата как можно больше прямоугольников  $1 \times 3$ . Какое наибольшее число таких прямоугольников она сможет вырезать?



**7.3.5.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.4, 6.2) У Вити есть белая доска из 16 клеток в форме квадрата  $4 \times 4$ , из которой он хочет вырезать 4 белых трёхклеточных уголка. Петя же хочет ему помешать, окрашивая некоторые клетки в красный цвет. Какое наименьшее количество клеток ему придётся закрасить? (Уголок — фигура, показанная на рисунке, возможно, повернутая.)



**7.3.6.** (Московская устная олимпиада, 2022, 6.2, 7.2) Клетчатый квадрат разбит по клеткам на несколько прямоугольников. Не все прямоугольники равны друг другу, но все имеют равный периметр. Найдите наименьший возможный размер квадрата.

**7.3.7.** (Олимпиада КФУ, 2022, 6.3) В клетках таблицы  $4 \times 4$  расставлены натуральные числа от 1 до 16 (в каждой клетке — по одному числу). В каждом квадратике  $2 \times 2$ , состоящем из четырёх клеток этой таблицы, отметили наибольшее из чисел, стоящих в них. Какое наибольшее и какое наименьшее количество чисел могло быть отмечено? Обоснуйте свой ответ.

**7.3.8.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.4, 6.4) Прямоугольник  $11 \times 12$  разрезан на несколько полосок  $1 \times 6$  и  $1 \times 7$ . Каково минимальное суммарное количество полосок?

**7.3.9.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 6.4, 8.4, 10.3) У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

**7.3.10.** («Курчатов», 2023, 6.4) Паша загадал несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Ваня задал несколько вопросов, а Паша на них честно ответил:

- Сколько загаданных тобою чисел делятся на 6? — Одно.
- Сколько загаданных тобою чисел делятся на 5? — Два.
- Сколько загаданных тобою чисел делятся на 4? — Три.
- Сколько загаданных тобою чисел делятся на 3? — Четыре.
- Сколько загаданных тобою чисел делятся на 2? — Пять.

Какое наименьшее количество чисел мог загадать Паша?

**7.3.11.** («Курчатов», 2022, 6.4) У Карлсона есть три коробки, в каждой из которых лежит по 10 конфет. На одной коробке написано число 4, на другой — 7, на третьей — 10. За одну операцию Карлсон последовательно делает два следующих действия:

- берет из любой коробки количество конфет, равное числу, написанному на ней;
- из взятых конфет 3 съедает, а остальные кладет в любую другую коробку.

Какое наибольшее количество конфет может съесть Карлсон в результате нескольких таких операций?

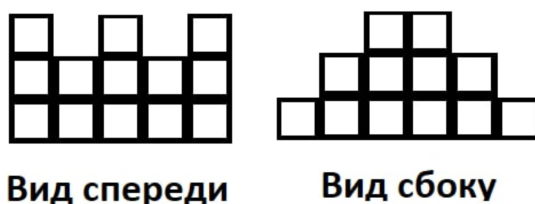
**7.3.12.** (*Олимпиада КФУ, 2023, 6.5*) Тимофей положил на клетчатое поле 10 клетчатых прямоугольников, площади которых равны 1, 2, 3, ..., 10 соответственно. Некоторые прямоугольники перекрывались друг с другом (возможно, полностью, а возможно, только частично). После этого он заметил, что имеется ровно одна клетка, покрытая ровно один раз; имеется ровно две клетки, покрытые ровно два раза; имеется ровно три клетки, покрытые ровно три раза и ровно четыре клетки, покрытые ровно четыре раза. Какое наибольшее количество клеток, покрытых хотя бы пять раз, могло найтись? Площадь клетчатого прямоугольника — это количество клеток, которые он содержит. Каждый прямоугольник лежит на поле ровно по клеточкам.

**7.3.13.** (*Московская устная олимпиада, 2021, 6.5*) Куб с ребром длины 6 оклеен в один слой прямоугольными полосками размером  $1 \times 8$  и трёхклеточными уголками (фигурки обоих видов присутствуют). Какое наименьшее количество уголков может быть?

**7.3.14.** (*«Бельчонок», 2022, 6.5*) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 25 жителей, каждый из них сказал: «У меня есть сосед разбойник». Какое наименьшее число разбойников может быть среди этих 25 жителей?

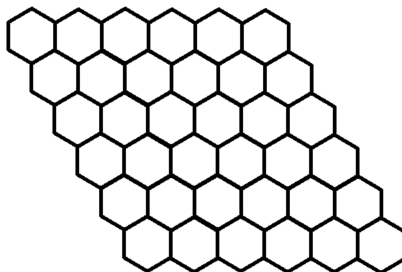
**7.3.15.** (*«Бельчонок», 2021, 6.5*) В стране Лаген используют монеты в 1, 2, 3, 4 лага. Перевоз на пароме стоит 1 лаг, монеты кладут в миску, которая вначале пуста. На паром зашли 12 человек. У них были только монеты в 2, 3, 4 лага. Сдачи паромщик не давал. Тем не менее, каждый оплатил свой проезд и получил сдачу от своих спутников. Какое наименьшее число монет могло у них быть?

**7.3.16.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.5, 7–8.5, 9.4*) Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?



**7.3.17.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.5, 7–8.5, 9.4*) Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т. е. если  $A$  знает  $B$ , то и  $B$  знает  $A$ ). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов. Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

**7.3.18.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 5.6, 6.6) Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.)



**7.3.19.** (Московская устная олимпиада, 2022, 6.6) Дорожка в саду выложена в два ряда несколькими прямоугольными плитками. Ширина всех плиток одинаковая, а длина может различаться. Требуется раскрасить эти плитки так, чтобы плитки одного цвета не имели общих отрезков границы. Какого наименьшего числа цветов для этого хватит?

**7.3.20.** (Математический праздник, 2021, 6.6) На витрине ювелирного магазина лежат 15 бриллиантов. Рядом с ними стоят таблички с указанием масс, на которых написано 1, 2, ..., 15 карат. У продавца есть чашечные весы и четыре гири массами 1, 2, 4 и 8 карат. Покупателю разрешается только один тип взвешиваний: положить один из бриллиантов на одну чашу весов, а гири — на другую и убедиться, что масса на соответствующей табличке указана верно. Однако за каждую взятую гирю нужно заплатить продавцу 100 монет. Если гиря снимается с весов и в следующем взвешивании не участвует, продавец забирает ее. Какую наименьшую сумму придется заплатить, чтобы проверить массы всех бриллиантов?

**7.3.21.** («Покори Воробьевы горы!», 2023, 5–6.6, 7–8.4, 9.2) В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть «перекрестком». Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрестками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?



**7.3.22.** («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.7, 7–8.6, 9.5) Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5 м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

**7.3.23.** (Московская устная олимпиада, 2023, 6.9) Вдоль дороги стоят 100 деревьев через каждый метр. Некоторые пары деревьев связаны верёвками, каждые два дерева связаны не более чем одной верёвкой. Оказалось, что нет верёвки, которая находится строго между концами какой-то другой верёвки. Какое наибольшее количество верёвок может быть?

## 7.4 Обратный ход

Дополнительные задачи — в листке [Обратный ход](#).

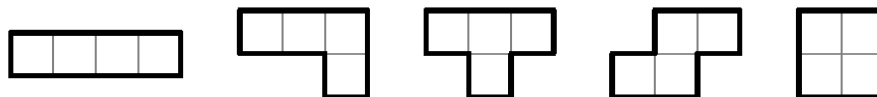
**7.4.1.** («Бельчонок», 2022, 6.1) В некоторый день в мешке было несколько орехов. На следующий день в этот мешок добавили столько же орехов, сколько там было, но восемь орехов забрали. На третий день снова добавили столько же орехов, сколько там уже стало, но восемь забрали. То же самое произошло и в четвертый день, и после этого в мешке орехов не осталось. Сколько орехов было в мешке в самом начале?

## 7.5 От противного

Дополнительные задачи — в листке [Доказательство от противного](#).

**7.5.1.** (Московская устная олимпиада, 2023, 6.4) Серёжа выписал все натуральные числа от 1 до  $N$  и заметил, что ровно 40% из них начинаются с единицы. Докажите, что и  $N$  начинается с единицы.

**7.5.2.** («Курчатов», 2022, 6.5) Клетчатый прямоугольник  $42 \times 44$  разрезали по линиям сетки на прямоугольники  $1 \times 8$ , один квадрат  $2 \times 2$  и одну тетраминошку. Докажите, что эта тетраминошка тоже является квадратом. (Все возможные тетраминошки изображены на рисунке ниже, их можно поворачивать и переворачивать.)



**7.5.3.** (Московская устная олимпиада, 2021, 6.7) Девять математиков встретились на международной конференции и обнаружили, что среди любых трёх из них по крайней мере двое говорят на одном языке. Известно, что каждый математик говорит не более чем на трёх языках. Докажите, что хотя бы трое из девяти говорят на одном и том же языке.

## 7.6 Разбиения на пары и группы

Дополнительные задачи — в листке [Разбиения на пары и группы](#).



**7.6.1.** («Курчатов», 2021, 6.5) На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1011 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

# Глава 8

## Наглядная геометрия

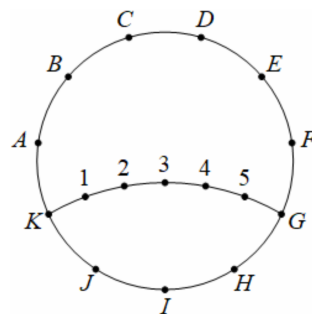
### 8.1 Наглядная геометрия на плоскости

Дополнительные задачи — в листке [Наглядная геометрия на плоскости](#).

**8.1.1.** (*Математический праздник, 2022, 6.2*) Три лягушки на болоте прыгнули по очереди. Каждая приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Длина прыжка второй лягушки 60 см. Найдите длину прыжка третьей лягушки.

**8.1.2.** (*САММАТ, 2022, 6.4*) Площадь пересечения квадрата и круга составляет 36% площади их объединения, при этом площадь вне квадрата составляет 20% площади их объединения. Сколько процентов площади квадрата находится вне круга?

**8.1.3.** (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.2*) Метро состоит из кольцевой линии и хорды (см. рис.). Между каждыми двумя соседними станциями ехать по времени одинаково, на пересадку между кольцевой линией и хордой время не тратится. Вася живёт на одной из шести станций над хордой, а школа расположена на одной из пяти станций внутри хорды. От Васиного дома до школы есть два различных кратчайших маршрута, причём хотя бы в одном из них нужно ехать по кольцевой линии по часовой стрелке. На каких станциях расположены Васин дом и школа?



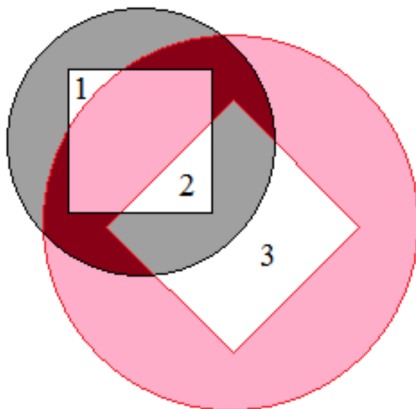
**8.1.4.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2022, 6.4*) Три лягушки сидели на одной прямой. Вначале прыгнула одна из них, потом другая, а затем и третья. Каждая лягушка приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Оказалось, что длины двух из этих трёх прыжков равны 60 см.

- а) Какой могла быть длина оставшегося прыжка?
- б) Каким могло быть расстояние между двумя крайними лягушками изначально?

**8.1.5.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3*) В треугольнике одна из сторон равна 12,67 см, другая 0,55 см. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она составляет целое число сантиметров.

**8.1.6.** (*Всеросс., 2023, ШЭ, 6.5*) На прямой отмечены 5 точек  $P, Q, R, S, T$  именно в таком порядке. Известно, что сумма расстояний от  $P$  до остальных 4 точек равна 67, а сумма расстояний от  $Q$  до остальных 4 точек равна 34. Найдите длину отрезка  $PQ$ .

**8.1.7.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 6.3, 7.2*) Будем называть *странным кольцом* круг с квадратной дыркой в середине (центры квадрата и круга совпадают; оставшаяся часть круга при этом не должна распадаться на части). Если положить на стол два странных кольца, то может получиться фигура с несколькими дырками (например, на рисунке их 3).



А можно ли вырезать из бумаги два странных кольца и положить их на стол так, чтобы получилось больше 5 дырок?

**8.1.8.** (*«Надежда энергетики», 2020, 6.3*) Квадратный лист бумаги сложили пополам, затем еще раз пополам и в третий раз пополам. В результате получился треугольник (см. рис. 1, на котором все линии сгибов проходят по пунктирным линиям). После этого сделали разрез по линии  $PQ$  и развернули лист. Будет ли отличаться форма получившейся фигуры от того, как был произведен первый сгиб: по линии  $MN$  или по линии  $AB$ ? Обоснуйте свой ответ и нарисуйте получившуюся фигуру (одну или две).

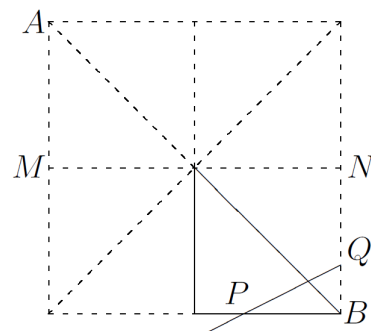
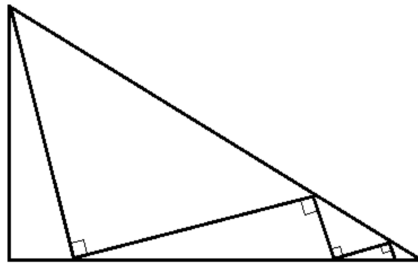
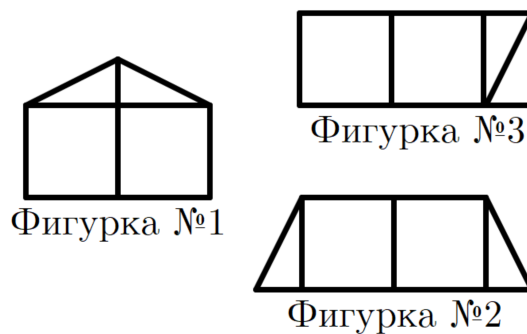


Рис. 1

**8.1.9.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.5, 6.4*) Муха сидит в одном из острых углов комнаты, имеющей форму прямоугольного треугольника, самая длинная из сторон которого равна 5 м. В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает под прямым углом и продолжает лететь по прямой (см. рис.). Коснувшись стены в десятый раз, она останавливается. Может ли муха пролететь больше 10 метров?



**8.1.10.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 6.4) У Иры есть два одинаковых квадрата и два одинаковых треугольничка, из которых она сложила три фигурки, как показано на рисунке, а затем посчитала периметры этих фигур. У первой фигурки он оказался равен 74, у второй — 84, у третьей — 82. Найдите длины сторон треугольника.



**8.1.11.** (Московская устная олимпиада, 2023, 6.8) В городе Нью-Васюки 2023 прямолинейные улицы. Известно, что каждые две улицы пересекаются, но никакие три улицы не пересекаются в одной точке. Докажите, что мэр Нью-Васюков может назначить на каждом перекрёстке приоритет улиц (одну назвать главной, а другую — второстепенной) так, чтобы при движении вдоль любой улицы от начала до конца приоритеты этой улицы на перекрёстках чередовались.

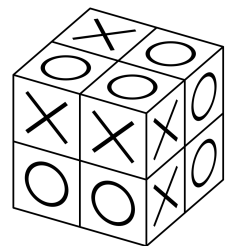
## 8.2 Наглядная геометрия в пространстве

Дополнительные задачи — в листке [Наглядная геометрия в пространстве](#).

**8.2.1.** («Надежда энергетики», 2021, 6.1) Пустой кубик размером  $2 \times 2 \times 2$ , изготовленный из листового материала, весит 5 грамм. Сколько весит кубик размером  $6 \times 6 \times 6$ , изготовленный из того же листового материала?

**8.2.2.** (Математический праздник, 2021, 6.2) а) Мальвина разбила каждую грань куба  $2 \times 2 \times 2$  на единичные квадраты и велела Буратино в некоторых квадратах написать крестики, а в остальных нолики так, чтобы каждый квадрат граничил по сторонам с двумя крестиками и двумя ноликами. На рисунке показано, как Буратино выполнил задание (видно только три грани). Докажите, что Буратино ошибся.

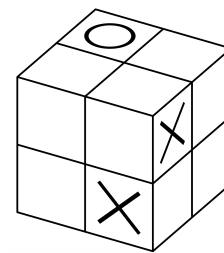
б) Помогите Буратино выполнить задание правильно. Достаточно описать хотя бы одну верную расстановку.



**8.2.3.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 6.4, 7.3, 10.2) Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.

**8.2.4.** (Всеросс., 2023, ШЭ, 6.6) Женя покрасил три грани белого кубика  $6 \times 6 \times 6$  в красный цвет. Затем он распилил его на 216 одинаковых маленьких кубиков  $1 \times 1 \times 1$ . Сколько у него могло получиться маленьких кубиков без красных граней? Укажите все возможные варианты.

**8.2.5.** (Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.6) Каждая грань куба  $2 \times 2 \times 2$  разделена на единичные квадраты. Маша хочет в некоторых квадратах написать крестики, а в остальных — нолики так, чтобы каждый квадрат граничил по сторонам с двумя крестиками и двумя ноликами.



- а) Маша нарисовала два крестика и нолик (см. рис.). Докажите, что это неудачное начало — заполнить все квадраты Маша не сможет.
- б) Как Маша могла бы (начав заново) расставить крестики и нолики в соответствии со своим замыслом? Достаточно описать хотя бы одну расстановку.

## 8.3 Прямоугольники и квадраты

Дополнительные задачи — в листке [Прямоугольники и квадраты](#).

**8.3.1.** («Бельчонок», 2021, 6.1) Из десяти одинаковых прямоугольников с периметром 42 Коля взял пять и выложил их в ряд. Получился прямоугольник с периметром 106. Из оставшихся пяти прямоугольников Коля сложил еще один прямоугольник. Чему может быть равен его периметр?

**8.3.2.** («Бельчонок», 2021, 6.1) Петя взял из восьми одинаковых прямоугольников четыре, и выложил их в ряд. Вася выложил в ряд четыре оставшихся прямоугольника. Периметр прямоугольника Пети равен 38, а периметр прямоугольника Васи равен 62. Чему равен периметр каждого из восьми одинаковых прямоугольников?

**8.3.3.** («Бельчонок», 2021, 6.1) Стас взял из шести одинаковых прямоугольников три, и выложил их в ряд. Миша выложил в ряд три оставшихся прямоугольника. Периметр прямоугольника Стаса равен 42, а периметр прямоугольника Миши равен 62. Чему равен периметр каждого из шести одинаковых прямоугольников?

**8.3.4.** («Бельчонок», 2020, 6.2) Сложите из семи прямоугольников размерами  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$ ,  $1 \times 4$ ,  $1 \times 5$ ,  $1 \times 6$ ,  $1 \times 7$  клеток два прямоугольника одинакового периметра, но разной площади.

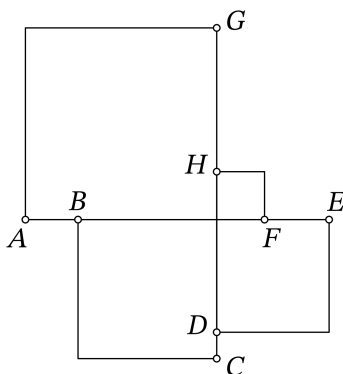
**8.3.5.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.3, 6.2) Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиной в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12 аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.

**8.3.6.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 6.2) Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры были одинаковы. Лишних квадратиков остаться не должно.

**8.3.7.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 6.3) Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 35%. На какой день пруд полностью замёрзнет?

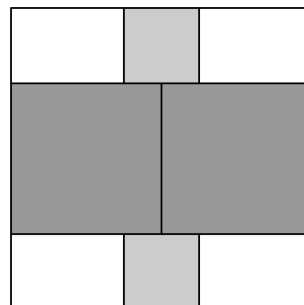
**8.3.8.** («Надежда энергетики», 2023, 6.4) В прямоугольнике  $ABCD$  проведена диагональ  $AC$ , а также прямая  $OY$ , которая делит сторону  $AB$  в отношении 1 : 3, считая от вершины  $B$ , а сторону  $CD$  в отношении 1 : 3, считая от вершины  $D$ . Найдите, какую часть площади прямоугольника составляет самая маленькая из образовавшихся четырех частей.

**8.3.9.** (Всеросс., 2021, ШЭ, 6.5) На рисунке изображено 4 квадрата. Известно, что длина отрезка  $AB$  равна 11, длина отрезка  $FE$  равна 13, длина отрезка  $CD$  равна 5. Чему равна длина отрезка  $GH$ ?



**8.3.10.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 6.5) В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

**8.3.11.** (Всеросс., 2022, ШЭ, 6.8) Крест, состоящий из двух одинаковых больших и двух одинаковых маленьких квадратов, поместили внутрь ещё большего квадрата. Вычислите в сантиметрах сторону самого большого квадрата, если площадь креста —  $810 \text{ см}^2$ .



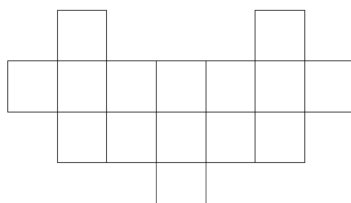
# Глава 9

## Комбинаторная геометрия

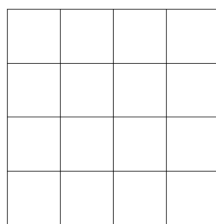
### 9.1 Разрезания

Дополнительные задачи — в листке [Разрезания](#).

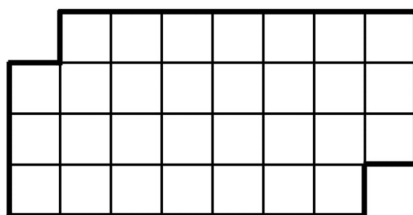
**9.1.1.** («Бельчонок», 2018, 6.1) Разрежьте фигуру на три равных части (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



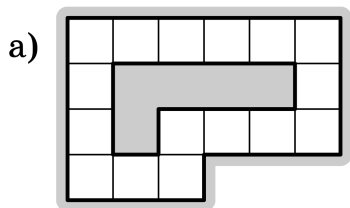
**9.1.2.** («Бельчонок», 2018, 6.1) Разрежьте фигуру на три равных части (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



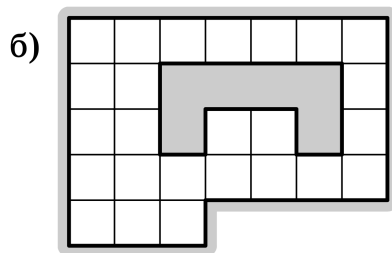
**9.1.3.** (Олимпиада КФУ, 2023, 6.1) Разрежьте фигуру на рисунке по линиям сетки на шесть равных клетчатых частей и затем сложите из них прямоугольник  $5 \times 6$ . Части называются равными, если их можно совместить наложением. В решении необходимо привести две картинки — как разрезать и как сложить.



9.1.4. (Матпраздник в Матвертикали, 2022, 6.2, 7.2) Дана бумажная клетчатая фигура с дыркой (см. рис.). Покажите, как разрезать эту фигуру на две части таким образом, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Части можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.



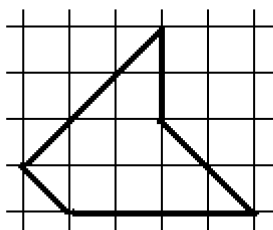
[2 балла]



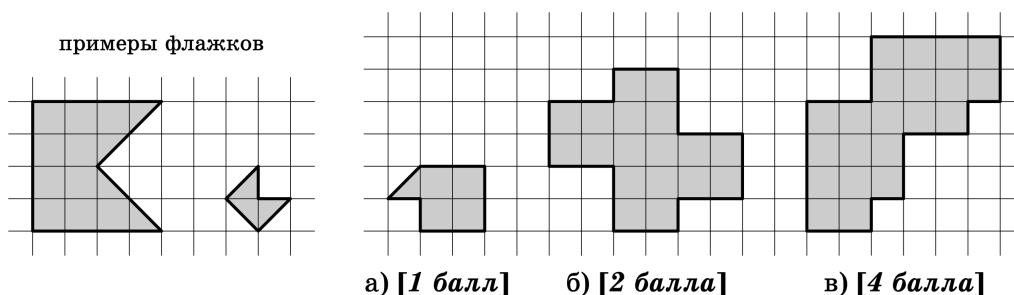
[2 балла]

9.1.5. («Бельчонок», 2020, 6.2) Разрежьте клетчатый квадрат  $6 \times 6$  на различные клетчатые фигурки, каждая из которых состоит не более чем из 5 клеток и не является прямоугольником (или квадратом).

9.1.6. (Московская устная олимпиада, 2021, 6.2) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на три равные части.



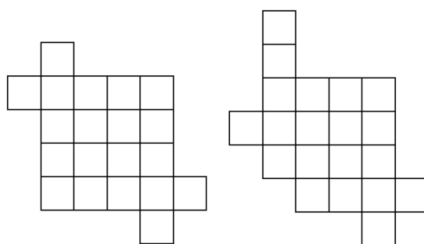
9.1.7. (Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.3, 7.3) Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого — вершины некоторого квадрата и его центр (слева нарисованы два флажка разных размеров). Покажите, как можно разрезать фигуры справа на флажки (флажки можно использовать любых размеров и в любом количестве).



9.1.8. («Бельчонок», 2022, 6.3) Даны два квадрата  $3 \times 3$  и  $4 \times 4$ . Как разрезать каждый из них на две части так, чтобы из получившихся четырёх частей можно было сложить квадрат?

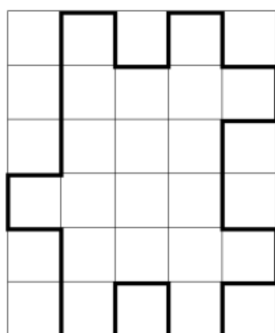


**9.1.9.** («Бельчонок», 2019, 6.3) Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке слева, на две равные части и покажите, как сложить из этих частей фигуру, изображенную на рисунке справа. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать.

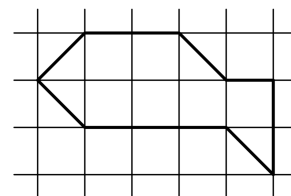


**9.1.10.** («Бельчонок», 2021, 6.3) Картонный квадрат  $10 \times 10$  расчерчен красным фломастером на клетки со стороной 1. В каждой его клетке зелёным фломастером провели обе диагонали, и разрезали большой квадрат по зелёным линиям. В результате картонный квадрат  $10 \times 10$  распался на части. Сколько частей получилось?

**9.1.11.** («Бельчонок», 2022, 6.4) Из фигуры, изображенной на рисунке, необходимо убрать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать на три равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать. Приведите два примера, где убираются разные клетки.



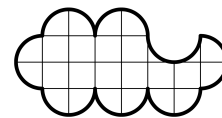
**9.1.12.** («Ломоносов», 2020, 5–6.4) На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Требуется разрезать её на несколько частей и сложить из них квадрат (поворачивать части можно, переворачивать нельзя). Можно ли это сделать при условии, что



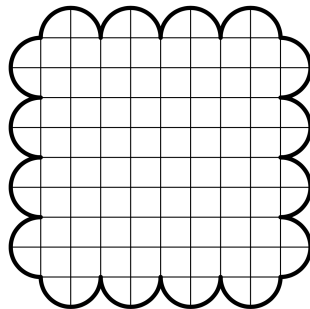
- а) частей не больше четырёх;
- б) частей не больше пяти, причём все они — треугольники?

Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.

**9.1.13.** (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 6.5*) а) От маленького «печенья» откусили кусочек. Разрежьте остаток, изображённый на рисунке, на 3 равные части (т. е. одинаковые по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.

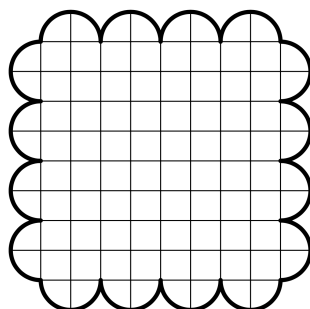


б) Разрежьте «печенье» на 16 равных частей (т. е. одинаковых по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.



**9.1.14.** (*Московская устная олимпиада, 2022, 6.5*) Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать на трёхклеточные уголки и вертикальные доминошки так, чтобы фигурок каждого вида было поровну?

**9.1.15.** (*Математический праздник, 2023, 6.4*) Разрежьте «печенье» на 16 равных частей (т. е. одинаковых по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.

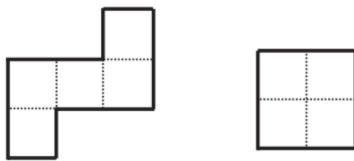


**9.1.16.** (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.5, 7.5*) Некоторые клетки доски размером  $7 \times 7$  покрашены в чёрный цвет, образуя чёрный многоугольник. Его разрезали по прямой, идущей по линии сетки. Мог ли он распасться на пять равных фигур?

## 9.2 Замощения плитками

Дополнительные задачи — в листке [Замощения плитками](#).

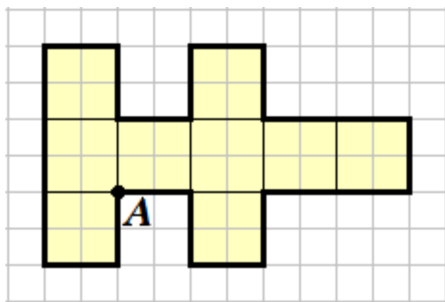
**9.2.1.** («Бельчонок», 2022, 6.3) Заполните квадрат размером  $8 \times 8$  фигурками, изображенными на рисунке, так, чтобы были использованы только фигурки каждого из указанных видов. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Накладывать фигурки друг на друга нельзя.



### 9.3 Геометрия на клетчатой бумаге

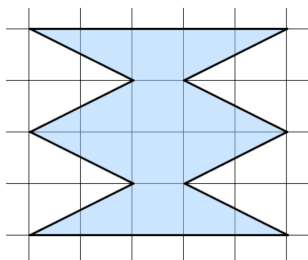
Дополнительные задачи — в листке [Геометрия на клетчатой бумаге](#).

**9.3.1.** («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 6.2) На клетчатом листе нарисована фигура. Проведите луч с началом в точке  $A$ , разрезающий её на две части равной площади. Покажите какой-нибудь узел сетки (кроме точки  $A$ ), через который проходит луч, и объясните, почему площади двух частей равны.

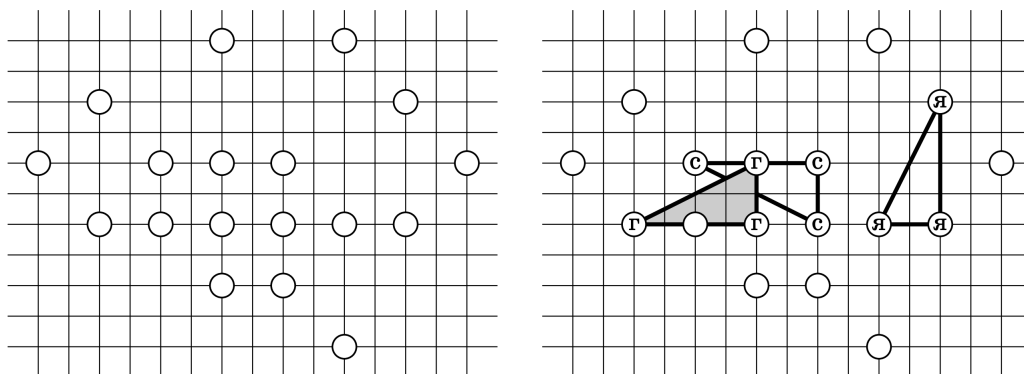


**9.3.2.** (Математический праздник, 2021, 6.4, 7.3) Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 клеток по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32 клетки (дырка не содержит граничных клеток). Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать ее по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик  $1 \times 1$  — это тоже полоска!)

**9.3.3.** («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.4) Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Площадь каждого квадрата сетки равна  $1 \text{ см}^2$ .



**9.3.4.** (*Математический праздник, 2021, 6.5*) Царь пообещал награду тому, кто сможет на каменистом пустыре посадить красивый фруктовый сад. Об этом узнали два брата. Старший смог выкопать 18 ям (см. рис. слева). Больше нигде не удалось, только все лопаты сломал. Царь рассердился и посадил его в темницу. Тогда младший брат Иван предложил разместить яблони, груши и сливы в вершинах равных треугольников (см. рис. справа), а остальные ямы засыпать.



Царь ответил так:

— Хорошо, если деревьев каждого вида будет ровно по три и они будут расти в вершинах равных треугольников, выйдет красиво. Но три вида — слишком мало. Если кроме яблонь, груш и слив будут еще и абрикосы — отпущу брата. Если добавишь пятый вид — черешню — заплачу за работу. Мне еще миндаль нравится, но шесть треугольников ты тут не сможешь разместить.

— А если смогу?

— Тогда проси чего хочешь!

Иван задумался, не получить ли заодно и полцарства. Подумайте и вы: разместите как можно больше видов деревьев в вершинах равных треугольников. (Равенство треугольников означает равенство всех его сторон и углов, то есть точное совпадение при наложении; треугольники можно поворачивать и переворачивать. В одной яме может расти только одно дерево.)

## 9.4 Целочисленные решетки

Дополнительные задачи — в листке [Целочисленные решётки](#).

**9.4.1.** (*«Надежда энергетики», 2022, 6.4*) Элементы 1, 2, 3, 4, 5, 6 электросхемы располагаются в узлах плоской клетчатой решетки, образованной одинаковыми квадратами. Надо соединить проводниками пары элементов 1-2, 1-3, 1-4, 2-5, 2-6, 3-5, 3-6 и 4-5. Каждый проводник должен проходить по линиям решетки, он может содержать несколько ребер квадратов, составляющих решетку, и если изгибается, то только под прямыми углами. По каждой стороне квадрата может проходить только один проводник, пересекаются проводники не должны. Найдите наименьшее число клеток решетки, содержащее такую схему.